Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 517.98

КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ РАНГА ДВА С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Н. Давлетшина

Аннотация. Построены примеры коммутирующих самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов ранга 2 порядков 4 и $4g+2$ с тригонометрическими коэффициентами.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: теория спектральных кривых, коммутирующие дифференциальные операторы.

1. Введение

Предположим, что обыкновенные дифференциальные операторы

$$L_n = \partial_x^n + \sum_{i=0}^{n-2} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \partial_x^m + \sum_{j=0}^{m-1} v_j(x)\partial_x^j$$

порядков n и m коммутируют. Тогда по лемме Бурхналла — Чаунди [1] существует ненулевой полином $R(z,w)$ такой, что $R(L_n, L_m) = 0$. Этот полином определяет *спектральную кривую* $\Gamma = \{(z,w) : R(z,w) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Если ψ является совместной собственной функцией L_n и L_m:

$$L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi,$$

то точка с координатами (z,w) принадлежит спектральной кривой Γ. Размерность пространства совместных собственных функций для (z,w) в общем положении является общим делителем n и m. *Рангом* l называется наибольший общий делитель всех порядков операторов из максимального коммутативного кольца, содержащего L_n и L_m.

Коммутативные кольца дифференциальных операторов классифицированы И. В. Кричевером [2, 3]. В случае операторов ранга 1 совместные собственные функции выражаются через тэта-функцию многообразия Якоби спектральной кривой [2]. Коэффициенты таких операторов являются мероморфными функциями [2]. При $l > 1$ собственные функции не находятся явно. В случае

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 14–11–00441).

эллиптических спектральных кривых операторы ранга $l=2$ найдены И. В. Кричевером и С. П. Новиковым [4], операторы ранга $l=3$ построены О. И. Моховым [5].

Некоторые примеры операторов ранга 2, 3, отвечающих спектральным кривым родов 2–4, построены в [6–9]. Операторы ранга 2, отвечающие гиперэллиптическим спектральным кривым рода g, изучались в [10]. В частности, в [10] доказано, что оператор

$$L_4^\sharp = \left(\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0\right)^2 + g(g+1)\alpha_3 x, \quad \alpha_3 \neq 0,$$

коммутирует с оператором порядка $L_{4g+2}^\sharp$. При $g=1$ операторы $L_4^\sharp$, $L_{4g+2}^\sharp$ совпадают с операторами Диксмье [11]. Операторы Диксмье были первыми примерами нетривиальных коммутирующих элементов в первой алгебре Вейля. Действия автоморфизмов первой алгебры Вейля на $L_4^\sharp$, $L_{4g+2}^\sharp$ изучались в [12]. В [13] показано, что

$$L_4^\natural = \left(\partial_x^2 + \alpha_1 \cos(x) + \alpha_0\right)^2 + \alpha_1 g(g+1)\cos(x)$$

коммутирует с $L_{4g+2}^\natural$. Используя замену координат и автоморфизмы первой алгебры Вейля, О. И. Мохов [14] с помощью $L_4^\natural$, $L_{4g+2}^\natural$ построил операторы произвольного ранга $l>1$. Пары операторов $L_4^\sharp$, $L_{4g+2}^\sharp$ и $L_4^\natural$, $L_{4g+2}^\natural$ изучались в [15].

Сформулируем основные результаты этой работы.

Теорема 1. *Оператор*

$$L_4 = \left(\partial_x^2 + \frac{1}{4}\alpha^2\cos^2(x) + \alpha\cos(x) + \frac{(2g+1)^2-\alpha^2}{4}\right)^2 - g(g+1)(\alpha^2\cos^2(x) + 2\alpha\cos(x)), \quad \alpha \neq 0, \tag{1}$$

коммутирует с некоторым оператором L_{4g+2} порядка $4g+2$.

Отметим, что L_4, L_{4g+2} образуют пару коммутирующих операторов ранга 2. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Оператор L_4 не коммутирует с оператором нечетного порядка.*

Отметим также, что, используя замену координат из [14], с помощью L_4, L_{4g+2} можно получить семейство операторов с полиномиальными коэффициентами, т. е. эти операторы определяют новые коммутативные подалгебры в первой алгебре Вейля.

Теорема 3. *Спектральная кривая операторов L_4 и L_{4g+2} задается уравнением*

$$F(z) = zA_0(z)^2 + \frac{1}{4}((1-\alpha^2-4g(g+1))A_1(z)^2 + 4A_2(z)^2 - 12A_1(z)A_3(z))$$

$$+A_0(z)(\alpha A_1(z) + (4g(g+1)-3-\alpha^2)A_2(z) + 12A_4(z)),$$

функции $A_i(z)$ определены в формуле (6) (см. ниже).

2. Доказательство теорем 1–3

В [10] исследовались коммутирующие дифференциальные операторы L_4, L_{4g+2} ранга 2 порядков 4 и $4g+2$, отвечающие гиперэллиптическим спектральным кривым рода g:

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \dots + c_0.$$

Совместные собственные функции ψ этих операторов удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка [4]

$$\psi'' = \chi_1(x,P)\psi' + \chi_0(x,P)\psi, \quad P(z,w) \in \Gamma,$$

где χ_0 и χ_1 — рациональные функции на Γ. Оператор L_4 формально самосопряжен тогда и только тогда, когда $\chi_1(x,P) = \chi_1(x,\sigma(P))$, где $\sigma(z,w) = (z,-w)$ [10]. Пусть L_4 формально самосопряжен, т. е.

$$L_4 = \left(\partial_x^2 + V(x)\right)^2 + W(x).$$

В [10] доказана следующая

Теорема 4. *Функции χ_0 и χ_1 имеют вид*

$$\chi_0 = -\frac{Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - V, \quad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q},$$

где Q — полином степени g по z,

$$Q = z^g + \alpha_{g-1}(x)z^{g-1} + \dots + \alpha_0(x),$$

$\alpha_i(x)$ — некоторые функции. Полином Q удовлетворяет уравнению

$$4F_g(z) = 4(z-W)Q^2 - 4V(Q_x)^2 + (Q_{xx})^2 - 2Q_xQ_{xxx} + +2Q(2V_xQ_x + 4VQ_{xx} + Q_{xxxx}). \tag{2}$$

Следствие 1 [10]. *Полином Q удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению*

$$\partial_x^5 Q + 4VQ_{xxx} + 2Q_x(2z - 2W + V_{xx}) + 6V_xQ_{xx} - 2QW_x = 0. \tag{3}$$

Теорема 4 использовалась в [16, 17] при построении операторов ранга 2.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть

$$V(x) = \frac{1}{4}\alpha^2\cos^2(x) + \alpha\cos(x) + \frac{(2g+1)^2 - \alpha^2}{4},$$

$$W(x) = -g(g+1)(\alpha^2\cos^2(x) + 2\alpha\cos(x)).$$

Для доказательства существования оператора L_{4g+2}, коммутирующего с L_4, достаточно доказать, что существует полином $Q(x,z)$, удовлетворяющий (3). Будем искать Q в виде

$$Q(x,z) = A_{2g}(z)\cos^{2g}(x) + \dots + A_1(z)\cos(x) + A_0(z).$$

Считаем $A_s(z) = 0$ при $s > 2g$ и $A_s(z) = 0$ при $s < 0$. Тогда (3) примет вид

$$-\sin(x)(B_{2g}(z)\cos^{2g}(x) + \dots + B_1(z)\cos(x) + B_0(z)) = 0, \tag{4}$$

где

$$B_{s+1}(z) = -(s+1)(-4g(g+1) + s(s+2))\alpha^2 A_s(z)$$

$$+ 2\alpha(2s+3)(2g(g+1)-(s+1)(s+2))A_{s+1}(z)$$
$$+ ((s+2)^3(3-4g(g+1)+s(s+4)+2\alpha^2)+4(s+2)z)A_{s+2}(z)$$
$$+ 2\alpha(2s+5)(s+2)(s+3)A_{s+3}(z)$$
$$+ (s+2)(s+3)(s+4)(4g(g+1)-2(s+3)^2-\alpha^2-1)A_{s+4}(z)$$
$$+ (s+2)(s+3)(s+4)(s+5)(s+6)A_{s+6}(z), \quad -1 \le s \le 2g-1. \quad (5)$$

Пусть $A_{2g}(z) = (-1)^g \alpha^{2g} 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2g-1)^2$. Определим $A_{2g-1}(z), \ldots, A_0(z)$ с помощью рекуррентной формулы

$$A_s(z) = \frac{1}{(s+1)(4g(g+1)-s(s+2))\alpha^2}$$
$$\times (2\alpha(2s+3)(-2g(g+1)+(s+1)(s+2))A_{s+1}(z)$$
$$+ ((s+2)^3(-3+4g(g+1)-s(s+4)-2\alpha^2)-4(s+2)z)A_{s+2}(z)$$
$$- 2\alpha(2s+5)(s+2)(s+3)A_{s+3}(z)$$
$$- (s+2)(s+3)(s+4)(4g(g+1)-2(s+3)^2-\alpha^2-1)A_{s+4}(z)$$
$$- (s+2)(s+3)(s+4)(s+5)(s+6)A_{s+6}(z)). \quad (6)$$

Из (5) следует, что

$$B_{2g}(z) = 0, \ldots, B_1(z) = 0.$$

Заметим, что из (6) с помощью индукции вытекает тождество

$$A_{2i-1}(z) = \frac{2iA_{2i}(z)}{\alpha}, \quad 1 \le i \le g. \quad (7)$$

С учетом равенств $A_1(z) = \frac{2}{\alpha}A_2(z)$, $A_3(z) = \frac{4}{\alpha}A_4(z)$ и $A_5(z) = \frac{6}{\alpha}A_6(z)$ имеем

$$B_0(z) = \frac{1}{\alpha}(-4g(g+1)\alpha^2 A_0(z) + 2(4g(g+1)-2(\alpha^2+2z))A_2(z)$$
$$- 12\alpha^2 A_2(z) - 24(4g(g+1)-9-\alpha^2)A_4(z) - 720A_6(z)). \quad (8)$$

Прямыми выкладками проверяется, что из (6) и (7) следует равенство $B_0(z) = 0$.

Таким образом, построенный полином $Q(x,z)$ является полиномом степени g по z и удовлетворяет (3). Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится

Лемма 1 [15]. *Коммутатором операторов*

$$L_4 = \left(\partial_x^2 + V(x)\right)^2 + W(x)$$

и

$$L_n = a_n(x)\partial_x^n + a_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} + \cdots + a_1(x)\partial_x + a_0(x)$$

является оператор порядка $n+3$*:*

$$[L_n, L_4] = b_{n+3}(x)\partial_x^{n+3} + b_{n+2}(x)\partial_x^{n+2} + \cdots + b_1(x)\partial_x + b_0(x), \quad b_i = b_i(x),$$

где

$$b_{m+3} = -4a'_m - 6a''_{m+1} - 4a'''_{m+2} - a''''_{m+3}$$
$$- 2Va_{m+1} - 4Va'_{m+2} - 2Va''_{m+3} + 2\sum_{s=m+1}^{n} C_s^{m+1} a_s \partial_x^{s-m-1} V$$

$$- 2V'a_{m+2} - 2V'a'_{m+3} + 2\sum_{s=m+2}^{n} C_s^{m+2} a_s \partial_x^{s-m-1} V$$

$$- (V^2 + W + V'')a_{m+3} + \sum_{s=m+3}^{n} C_s^{m+3} a_s \partial_x^{s-m-3}(V^2 + W + V'') \quad (9)$$

при $-3 \le m \le n$. *При этом* $a_s = 0$, *если* $s < 0$, *и* $a_s = 0$, *если* $s > n$, $C_q^p = \frac{q!}{(q-p)!p!}$ *при* $p \ge 0$ *и* $C_q^p = 0$ *при* $p < 0$.

Из леммы 1 следует, что для коммутирующих операторов коэффициенты a_n и a_{n-1} являются константами. Пусть $a_n = 1$, $a_{n-1} = \lambda$.

Предположим, что существует обыкновенный дифференциальный оператор нечетного порядка:

$$L_{2k+1} = \partial_x^{2k+1} + \lambda\partial_x^{2k} + a_{2k-1}(x)\partial_x^{2k-1} + \dots + a_1(x)\partial_x^1 + a_0(x), \quad a_i = a_i(x),$$

такой, что $[L_{2k+1}, L_4] = 0$. Тогда по формуле (9) вычислим $a_{2k-1}, \dots, a_0$:

$$\begin{aligned} 4a'_m = {} & 6a''_{m+1} - 4a'''_{m+2} - a''''_{m+3} \\ & - 4V(x)a'_{m+2} - 2V(x)a''_{m+3} + 2\sum_{s=m+2}^{2k+1} C_s^{m+1} a_s \partial_x^{s-m-1} V(x) \\ & - 2V'(x)a'_{m+3} + 2\sum_{s=m+3}^{2k+1} C_s^{m+2} a_s \partial_x^{s-m-1} V(x) \\ & + \sum_{s=m+4}^{2k+1} C_s^{m+3} a_s \partial_x^{s-m-3}(V^2(x) + W(x) + V''(x)), \quad 0 \le m \le 2k-1. \end{aligned}$$

Коэффициенты $a_n, \dots, a_0$ являются тригонометрическими полиномами, а именно для $s = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} a_{2k-2s} = {} & \frac{\lambda k! \alpha^{2s}}{2^{2s} s!(k-s)!} \cos^{2s}(x) \\ & - \frac{\alpha^{2s} \prod_{i=0}^{s} (2k - (2i-1))}{2^{3s}(s-1)!} \cos^{2s-1}(x)\sin(x) + \dots, \quad s = 1, \dots, k. \quad (10) \end{aligned}$$

$$a_{2k+1-2s} = \frac{\alpha^{2s} \prod_{i=0}^{s-1} (2k - (2i-1))}{s! 2^{3s}} \cos^{2s}(x) + \dots, \quad s = 1, \dots, k. \quad (11)$$

При $m = -3$ формула (9) примет вид

$$b_0 = -a_0'''' - 2V(x)a_0'' - 2V'(x)a_0' + a_1\partial_x(V(x)^2 + W(x) + V''(x)) + \sum_{s=2}^{2k+1} \partial_x^s (V^2 + W + V'').$$

Тогда из (10) и (11) следует, что b_0 является полиномом по косинусам и синусам степени $2k+3$:

$$b_0 = -\frac{\alpha^{2k+4} \prod_{i=0}^{k-1} (2k - (2i-1))}{2^{3k+2} k!} \cos^{2k+3}(x)\sin(x) + \dots.$$

Таким образом, $b_0 \neq 0$, и, следовательно, $[L_{2k+1}, L_4] \neq 0$. Теорема 2 доказана.

Докажем теорему 3. Заметим, что правая часть (2) содержит производные Q не более четвертого порядка. Поэтому при подстановке $x = \pi/2$ на левую часть в (2) влияют только последние пять слагаемых в Q, т. е.

$$F(z) = \frac{1}{4}(4(z-W)\widetilde{Q}^2 - 4V(\widetilde{Q}_x)^2 + (\widetilde{Q}_{xx})^2 - 2\widetilde{Q}_x\widetilde{Q}_{xxx} \\ + 2\widetilde{Q}(2V_x\widetilde{Q}_x + 4V\widetilde{Q}_{xx} + \widetilde{Q}_{xxxx}))|_{x=\pi/2},$$

где

$$\widetilde{Q} = A_4(z)\cos^4(x) + A_3(z)\cos^3(x) + A_2(z)\cos^2(x) + A_1(z)\cos(x) + A_0(z).$$

Отсюда получаем

$$F(z) = zA_0(z)^2 + \frac{1}{4}((1-\alpha^2-4g(g+1))A_1(z)^2 + 4A_2(z)^2 - 12A_1(z)A_3(z)) \\ +A_0(z)(\alpha A_1(z) + (4g(g+1)-3-\alpha^2)A_2(z) + 12A_4(z)).$$

Теорема 3 доказана.

Пример. При $g = 1$ имеем

$$L_6 = \partial_x^6 + \frac{3\alpha}{4}\cos(x)(\alpha\cos(x)+4)\partial_x^4 - 3\alpha\sin(x)(2+\alpha\cos(x))\partial_x^3 \\ + \left(\frac{3\alpha^4}{16}\cos^4(x) + \frac{3\alpha^3}{2}\cos^3(x) - 7\alpha^2\cos^2(x) + \frac{-275+142\alpha^2-3\alpha^4}{16}\right)\partial_x^2 \\ + \sin(x)\left(-\frac{3\alpha^4}{4}\cos^3(x) - \frac{9\alpha^3}{2}\cos^2(x) + 8\alpha^2\cos(x) + 10\alpha\right)\partial_x \\ + \frac{\alpha^6}{64}\cos^6(x) + \frac{3\alpha^5}{16}\cos^5(x) - \frac{5\alpha^4}{4}\cos^4(x) - \frac{37\alpha^3}{4}\cos^3(x) \\ + \frac{349\alpha^2+94\alpha^4-3\alpha^6}{64}\cos^2(x) + \frac{37\alpha+118\alpha^3-3\alpha^5}{16}\cos(x).$$

Уравнение спектральной кривой пары L_4, L_6 имеет вид

$$F(z) = z^3 + 4(\alpha^2-1)z^2 + (4+5\alpha^2(\alpha^2-3))z + \alpha^2(7+2\alpha^2(\alpha^2-7)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burchnall J. L., Chaundy I. W.* Commutative ordinary differential operators // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 1923. V. 21, N 2. P. 420–440.
2. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, № 1. С. 15–31.
3. *Кричевер И. М.* Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1978. Т. 12, № 3. С. 20–31.
4. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 6. С. 47–68.
5. *Мохов О. И.* Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные дифференциальные уравнения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53, № 6. С. 1291–1315.
6. *Миронов А. Е.* Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 5. С. 103–114.
7. *Миронов А. Е.* О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2 // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 533–536.
8. *Миронов А. Е.* Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2 // Функцион. анализ и его прил. 2005. Т. 39, № 3. С. 91–94.

9. *Zuo D.* Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2 // SIGMA. 2012. V. 8, N 044. P. 1–11.
10. *Mironov A. E.* Self-adjoint commuting ordinary differential operators // Invent. Math. 2014. V. 197, N 2. P. 417–431.
11. *Dixmier J.* Sur les algebres de Weyl // Bull. Soc. Math. France. 1968. V. 96, N ???. P. 209–242.
12. *Мохов О. И.* О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 2. С. 314–316.
13. *Mironov A. E.* Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2014. V. 234, N 2. P. 309–321.
14. *Mokhov O. I.* Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2014. V. 234, N ??. P. 323–336.
15. *Давлетшина В. Н., Шамаев Э. И.* О коммутирующих дифференциальных операторах ранга два // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 744–749.
16. *Давлетшина В. Н.* О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 109–112.
17. *Oganesyan V.* Commuting differential operators of rank 2 with polynomial coefficients. arXiv: 1409.4058v2.

Статья поступила 17 февраля 2015 г.

Давлетшина Валентина Николаевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
v.davletshina@gmail.com