

УДК 510.64

## ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НАД МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКОЙ И ИНТЕРВАЛЫ ОДИНЦОВА

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

**Аннотация.** Исследуется интерполяционное свойство Крейга СР в расширениях минимальной логики Йохансона. Рассматривается классификация J-логик, предложенная С. П. Одинцовым, в соответствии с их интуиционистскими и негативными напарниками. При этом все логики разбиваются на интервалы. Доказано, что нижний конец интервала имеет СР тогда и только тогда, когда оба его напарника имеют СР. Также показана узнаваемость нижних и верхних концов, которые имеют СР, и найдена их семантическая характеристика.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

**Ключевые слова:** минимальная логика Йохансона, интерполяционное свойство Крейга, узнаваемость, интервалы Одинцова.

*К юбилею Юрия Леонидовича Ершова*

### 1. Введение

Статья посвящена проблеме интерполяции в расширениях минимальной логики J Йохансона [1].

В [2] доказано, что существует точно семь непротиворечивых суперинтуиционистских логик с интерполяционным свойством Крейга СР [3]. Там получено описание всех этих логик. Все позитивные логики с интерполяционным свойством описаны в [4], а негативные логики — в [5], где также было начато исследование указанного свойства в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики Йохансона J, в частности, описаны все позитивно аксиоматизируемые J-логики с СР. В [6] найдены критерии для установления или опровержения интерполяционного свойства и проективного свойства Бета РВР в некоторых логиках специального вида, расширяющих J.

Свойства СР и РВР, а также ограниченное интерполяционное свойство IPR разрешимы на классах суперинтуиционистских, позитивных, негативных и стройных логик [2, 7–10].

В [11] доказана разрешимость слабого интерполяционного свойства WIP над логикой J. Однако более сильные свойства СР, IPR и РВР оказались более сложными и их исследование еще далеко от завершения.

Разрешимость СР над интуиционистской логикой Int основывалась на двух фактах: существует лишь конечное число суперинтуиционистских логик с СР,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00168а) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-860.2014.1).

и все они узнаваемы над  $\text{Int}$  [2]. Мы не знаем, конечно или бесконечно число  $\text{J}$ -логик с  $\text{CIP}$  и все ли они узнаваемы над  $\text{J}$ .

В [9] найдены все стройные логики с  $\text{CIP}$ , в [12, 13] доказано  $\text{CIP}$  для ряда других важных логик.

С. П. Одинцов [14] предложил классификацию  $\text{J}$ -логик в соответствии с их интуиционистскими и негативными напарниками, при этом все логики разбиваются на интервалы. В [15] доказано, что верхний конец интервала имеет  $\text{CIP}$  тогда и только тогда, когда оба его напарника имеют  $\text{CIP}$ . В этой статье мы покажем, что такой же результат верен для нижних концов интервалов. Также покажем узнаваемость всех концов, которые имеют  $\text{CIP}$ , и найдем их семантическую характеристику.

Для доказательства  $\text{CIP}$  используем семантические методы, разработанные в [12], а также предложим новые конструкции. Более подробно рассматриваются логики, удовлетворяющие некоторым условиям линейности.

В разд. 2 приводятся необходимые определения и предварительные сведения, а также доказана узнаваемость над  $\text{J}$  всех концов интервалов, определяемых суперинтуиционистскими и негативными логиками с  $\text{CIP}$  (предложение 2.5). В разд. 3 доказана семантическая полнота рассматриваемых логик. В разд. 4 приведены общие теоремы, лежащие в основе доказательства интерполяционного свойства с помощью специально подобранных классов моделей. В разд. 5, 6 и 8 приводятся конструкции, используемые для доказательства  $\text{CIP}$  в логике так называемых  $\text{Q}$ -линейных моделей (разд. 7) и тех логиках, интуиционистским напарником которых является известная логика  $\text{LC}$  (разд. 9). Эти результаты являются частью основного результата, доказанного в последнем разд. 10 (теорема 10.3).

## 2. Предварительные сведения

Язык логики  $\text{J}$  содержит в качестве исходных связок  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\perp$ ,  $\top$ , отрицание определяется как сокращение:  $\neg A = A \rightarrow \perp$ ,  $(A \leftrightarrow B) = (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$ . Формула называется *позитивной*, если она не содержит вхождений константы  $\perp$ . Логика  $\text{J}$  может быть задана исчислением, которое имеет те же самые схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление  $\text{Int}^+$ , и единственное правило вывода модус поненс:  $A, A \rightarrow B / B$ .

Под *J-логикой* понимаем любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления  $\text{J}$  и замкнутое относительно модус поненс и правила подстановки. Обозначаем

$$\text{Int} = \text{J} + (\perp \rightarrow p), \quad \text{Neg} = \text{J} + \perp, \quad \text{For} = \text{J} + p.$$

Логика называется *нетривиальной*, если она не совпадает с множеством всех формул  $\text{For}$ . *Суперинтуиционистской логикой* (с.и.л.) называется  $\text{J}$ -логика, содержащая интуиционистскую логику  $\text{Int}$ , а *негативной* —  $\text{J}$ -логика, содержащая логику  $\text{Neg}$ . Для любой  $\text{J}$ -логики  $L$  обозначаем через  $E(L)$  семейство всех  $\text{J}$ -логик, содержащих  $L$ .

Для любой  $L$  определяются ее интуиционистский и негативный напарники [14, 16]:

$$L_{\text{int}} = L + (\perp \rightarrow p), \quad L_{\text{neg}} = L + \perp.$$

Пусть  $L_1$  — с.и.л.,  $L_2$  — негативная логика,

$$[L_1; L_2] = \{L \mid L_{\text{int}} = L_1, L_{\text{neg}} = L_2\}.$$

$$L_1 * L_2 = J + \{I(A) \mid A \in L_1\} + \{\perp \rightarrow B \mid B \in L_2\},$$

$I(A)$  — результат подстановки в  $A$  формулы  $p_k \vee \perp$  вместо каждой переменной  $p_k$ .

**Теорема 2.1** [14]. Для любых с.и.л.  $L_1$  и негативной  $L_2$  множество  $[L_1; L_2]$  образует интервал с нижним концом  $L_1 * L_2$  и верхним концом  $L_1 \cap L_2$ .

При этом для аксиоматизации логики  $L_1 * L_2$  достаточно использовать лишь аксиомы логик  $L_1, L_2$ . Заметим, что

$$L_1 * \text{For} = L_1, \quad \text{For} * L_2 = L_2$$

и соответствующие интервалы одноэлементны.

Пусть  $L$  — логика,  $T$  — множество формул,  $A$  — формула. Пишем  $T \vdash_L A$ , если  $A$  выводима из  $L \cup T$  с помощью правила модус поненс.

Если  $\mathbf{p}$  — список переменных, то через  $A(\mathbf{p})$  обозначаем формулу, все переменные которой входят в  $\mathbf{p}$ , а через  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  — множество всех таких формул. *Интерполяционное свойство Крейга* СР определяется следующим образом (где списки  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$  попарно не пересекаются).

СР. Если  $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ , то существует такая формула  $C(\mathbf{p})$ , что  $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow C(\mathbf{p})$  и  $\vdash_L C(\mathbf{p}) \rightarrow B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ .

**Теорема 2.2** [15]. 1. Если J-логика имеет СР, то ее негативный и интуиционистский напарники имеют СР.

2. Для любых с.и.л.  $L_1$  и негативной  $L_2$  логика  $L_1 \cap L_2$  имеет СР тогда и только тогда, когда обе  $L_1$  и  $L_2$  имеют СР.

Конечно аксиоматизируемая логика  $L_1 \supseteq L_0$  узнаваема над  $L_0$ , если и только если существует алгоритм, который по любой формуле  $A$  узнает, верно ли равенство  $L_0 + A = L_1$ .

**Теорема 2.3** [2]. Существуют точно семь нетривиальных с.и.л. со свойством СР, и все они узнаваемы над Int:

- 1) Int;
- 2) KC = Int +  $(\neg p \vee \neg \neg p)$ ;
- 3) LC = Int +  $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$ ;
- 4) LP<sub>2</sub> = Int +  $(p \vee (p \rightarrow (q \vee \neg q)))$ ;
- 5) LV = LP<sub>2</sub> +  $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \vee (p \leftrightarrow \neg q))$ ;
- 6) LS = LP<sub>2</sub> +  $(\neg p \vee \neg \neg p)$ ;
- 7) Cl = Int +  $(p \vee \neg p)$ .

**Теорема 2.4** [5]. Существуют точно три нетривиальные негативные логики со свойством СР, и все они узнаваемы над Neg:

- 1) Neg;
- 2) NC = Neg +  $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$ ;
- 3) NE = Neg +  $(p \vee (p \rightarrow q))$ .

Разумеется, логика For тоже имеет СР. Ее узнаваемость над J показана в [17]. Из теорем 2.2–2.4 следует, что не более 32 интервалов вида  $[L_1, L_2]$  могут содержать логики с СР, причем верхние концы этих интервалов действительно имеют СР.

Покажем узнаваемость концов интервалов для логик с СР.

**Предложение 2.5.** Для любых с.и.л.  $L_1$  и негативной  $L_2$  с СР логики  $L_1 \cap L_2$  и  $L_1 * L_2$  узнаваемы над  $J$ .

**Доказательство.** По теоремам 2.3 и 2.4 все с.и. и негативные логики узнаваемы над  $\text{Int}$  и  $\text{Neg}$  соответственно. По теореме 2.2 логики  $L_1 \cap L_2$  имеют СР. Очевидно, что они содержат логику  $JX = J + ((\perp \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \perp))$ . В [17] показано, что все такие логики узнаваемы над  $J$ .

Суперинтуиционистские и негативные логики с СР аксиоматизируемы формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции. Поэтому логики  $L_1 * L_2$  финитно аппроксимируемы (см. следствие 4.5 из [9]). Далее, ввиду теоремы 2.1

$$J + A \supseteq L_1 * L_2 \iff (\text{Int} + A \supseteq L_1 \text{ и } \text{Neg} + A \supseteq L_2).$$

Из узнаваемости  $L_1$  и  $L_2$  следует узнаваемость  $L_1 * L_2$ .  $\square$

Рассмотрим нижние концы интервалов, где логики  $L_1, L_2$  имеют СР. Если одна из логик тривиальна, то  $L_1 * L_2$  совпадает с другой логикой, а значит, имеет СР. Остается 21 интервал, где обе логики нетривиальны. Для некоторых из них СР уже было установлено.

**Предложение 2.6** [6, 12]. Следующие логики имеют СР:  $J = \text{Int} * \text{Neg}$ ,  $\text{JK} = \text{KC} * \text{Neg}$ ,  $\text{JE}_1^Q = \text{Int} * \text{NE}$ ,  $\text{KC} * \text{NE}$ ,  $\text{Cl} * \text{Neg}$ ,  $\text{Cl} * \text{NC}$ ,  $\text{Cl} * \text{NE}$ .

В следующих разделах рассмотрим проблему интерполяции в нижних концах остальных интервалов для нетривиальных  $L_1, L_2$ .

### 3. Семантика

В [18] доказана теорема о полноте логики  $J$  и некоторых ее расширений относительно семантики типа Крипке. В [12] была предложена некоторая модификация этой семантики, удобная для наших целей.

Подмножество  $X$  частично упорядоченного множества  $W$  называем *конусом*, если оно удовлетворяет условию

$$x \in X, x \leq y \Rightarrow y \in X.$$

Под *J-шкалой* (или просто *шкалой*) понимаем тройку  $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$ , где  $W$  — непустое множество, частично упорядоченное отношением  $\leq$  и имеющее наибольший элемент  $\infty$ ,  $Q$  — конус множества  $W$ , содержащий  $\infty$ .

*Моделью языка  $\mathcal{L}$*  называется четверка  $M = (W, \leq, Q, \models)$ , где  $(W, \leq, Q)$  — шкала,  $\models$  — отношение между элементами множества  $W$  и формулами языка  $\mathcal{L}$ , удовлетворяющее условиям:

- (1)  $x \models p, x \leq y \Rightarrow y \models p$  для любой переменной  $p$  языка  $\mathcal{L}$ ;
- (2)  $\infty \models p$  для любой переменной  $p$  языка  $\mathcal{L}$ ;
- (3)  $x \models \perp \iff x \in Q$ ;
- (4)  $x \models (A \& B) \iff (x \models A \text{ и } x \models B)$ ;
- (5)  $x \models (A \vee B) \iff (x \models A \text{ или } x \models B)$ ;
- (6)  $x \models (A \rightarrow B) \iff (\forall y)(x \leq y \Rightarrow (y \models A \Rightarrow y \models B))$ .

**Лемма 3.1.** Для любой модели  $M$  языка  $\mathcal{L}$

- (1)  $\infty \models A$  для любой формулы  $A$  языка  $\mathcal{L}$ ;
- (2)  $x \models A, x \leq y \Rightarrow y \models A$  для любой формулы  $A$  языка  $\mathcal{L}$ .

**Доказательство** проводится индукцией по длине формулы.

Модель (или шкала) называется *инициальной*, если имеет наименьший элемент. Если  $x$  есть элемент шкалы  $W$ , через  $W^x$  обозначаем шкалу  $\{y \mid x \leq y\}$

с индуцированным порядком; через  $M^x$  обозначаем ограничение модели  $M$  на шкалу  $W^x$ .

Формула  $A$  называется *истинной*, или *общезначимой*, в модели  $M$ , если  $x \models A$  для любого  $x \in M$ .

Пусть  $L \in E(J)$ . Модель  $M$  языка  $\mathcal{L}$  называется *L-моделью*, если  $x \models A$  для любого  $x \in M$  и любой формулы  $A$  языка  $\mathcal{L}$ , выводимой в  $L$ .

Определим понятие канонической модели  $M_L$  языка  $\mathcal{L}$ . Множество  $T$  формул языка  $\mathcal{L}$  называется *L-теорией языка  $\mathcal{L}$* , если оно содержит  $L \cap \mathcal{L}$  и замкнуто относительно правила модус поненс; *L-теория  $T$*  называется *простой*, если удовлетворяет условию:  $(A \vee B) \in T \Rightarrow (A \in T \text{ или } B \in T)$  для любых формул  $A, B$ . В частности, множество  $F(\mathcal{L})$  всех формул языка  $\mathcal{L}$  является простой *L-теорией языка  $\mathcal{L}$* .

В дальнейшем нам потребуется следующая простая

**Лемма 3.2.** Пусть  $T$  — множество формул языка  $\mathcal{L}$ . Тогда  $T$  является *L-теорией языка  $\mathcal{L}$*  в том и только в том случае, если  $T$  содержит  $L \cap \mathcal{L}$ , замкнуто относительно взятия конъюнкции формул и для всех формул  $A, B$  языка  $\mathcal{L}$  удовлетворяет условию

$$A \vdash_L B \Rightarrow (A \in T \Rightarrow B \in T).$$

*Каноническая модель  $M_L$  языка  $\mathcal{L}$*  строится следующим образом. Обозначим через  $W_L$  множество всех простых *L-теорий языка  $\mathcal{L}$* , где  $\leq_L$  — отношение теоретико-множественного включения,  $Q_L = \{T \in W_L \mid \perp \in T\}$ . Полагаем

$$M_L = (W_L, \leq_L, Q_L, \models_L),$$

где для любой  $T \in W_L$  и любой переменной  $p$

$$T \models_L p \iff p \in T.$$

Отметим, что  $F(\mathcal{L})$  является наибольшим элементом шкалы  $W_L$ .

Определение канонической модели введено Сегербергом [18]. Оно отличается от нашего определения тем, что теория  $F(\mathcal{L})$  не включалась в  $W_L$ . Следующие теоремы, доказанные Сегербергом [18], справедливы и для моделей, рассматриваемых в этой статье.

**Теорема 3.3** (о канонической модели). Для любых *J-логики  $L$*  и языка  $\mathcal{L}$  каноническая модель  $M_L$  языка  $\mathcal{L}$  является *L-моделью*. Более того, для любой теории  $T$  из  $M_L$  и любой формулы  $A$  языка  $\mathcal{L}$

$$T \models A \iff A \in T.$$

Отсюда сразу вытекает

**Теорема 3.4** (о полноте). Для любой формулы  $A$  языка  $\mathcal{L}$  и любой *J-логики  $L$*  следующие условия эквивалентны:

- 1)  $A$  выводима в  $L$ ;
- 2)  $A$  общезначима во всех *L-моделях языка  $\mathcal{L}$* .

Рассмотрим следующие условия на *J-модели*, точнее, на *J-шкалы*.

(KCF) Множество  $W - Q$  пусто или имеет наибольший элемент.

(LCF) Множество  $W - Q$  линейно упорядочено.

(LP<sub>2</sub>F) Длины цепей в  $W - Q$  не превосходят 2.

(LVF) (LP<sub>2</sub>F) и  $W^x - Q$  содержит не более двух максимальных элементов.

(LSF) (LP<sub>2</sub>F) и (KCF).

(NCF) Для  $x \in Q$  множество  $Q^x$  линейно упорядочено.

(NEF) Все элементы множества  $Q - \{\infty\}$  попарно не сравнимы.

**Лемма 3.5.** Для любой J-логики  $L$

1. Пусть  $L_1 \in \{KC, LC, LP_2, LV, LS\}$ . Если  $L_{\text{int}} \supseteq L_1$ , то инициальные конусы всех канонических моделей логики  $L$  удовлетворяют условию  $(L_1F)$ .

2. Пусть  $L_2 \in \{NC, NE\}$ . Если  $L_{\text{neg}} \supseteq L_2$ , то инициальные конусы всех канонических моделей логики  $L$  удовлетворяют условию  $(L_2F)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для  $L_1 = KC$  и  $L_2 = NE$  утверждение доказано в [12] (см. предложение 2.5). Для  $L_1 = LC$  и  $L_2 = NC$  утверждение доказано Сегербергом [18]. Для остальных логик доказывается аналогично.  $\square$

Пусть  $(\text{Int}F)$  и  $(\text{Neg}F)$  — тождественно истинные условия. Имеет место

**Теорема 3.6.** Пусть  $L_1 \in \{\text{Int}, KC, LC, LP_2, LV, LS\}$ ,  $L_2 \in \{\text{Neg}, NC, NE\}$ . Тогда логика  $L_1 * L_2$  полна относительно класса шкал, удовлетворяющих условиям  $(L_1F)$  и  $(L_2F)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если модель удовлетворяет условиям  $(L_1F)$  и  $(L_2F)$ , то в ней общезначимы все аксиомы логики  $L_1 * L_2$ . С другой стороны, по лемме 3.5 инициальные конусы всех канонических моделей логики  $L$  удовлетворяют условиям  $(L_1F)$  и  $(L_2F)$ .  $\square$

#### 4. Достаточные условия интерполяции

Для доказательства СІР применим метод из [12].

В [12] доказана теорема, дающая достаточное условие для СІР в J-логиках. Сначала приведем определения.

Даны шкалы  $W_1, W_0$ . Отображение  $\theta$  из  $W_1$  на  $W_0$  называется *p-морфизмом шкал*, если удовлетворяет условиям

- (p1)  $x, y \in W_1, x \leq_1 y \Rightarrow \theta(x) \leq_0 \theta(y)$ ;
- (p2)  $x \in W_1, y \in W_0, \theta(x) \leq_0 y \Rightarrow (\exists z \in W_1)(x \leq_1 z \wedge \theta(z) = y)$ ;
- (p3)  $x \in Q_1 \iff \theta(x) \in Q_0$ .

Из (p1) следует, что для любого *p-морфизма*  $\theta$  из  $W_1$  на  $W_0$  выполнены условия:  $\theta(\infty_1) = \infty_0$ , и если  $W_1$  — инициальная шкала с наименьшим элементом  $a$ , то  $\theta(a)$  — наименьший элемент в  $W_0$ .

Даны модели  $M_1$  языка  $\mathcal{L}_1$  и  $M_0$  языка  $\mathcal{L}_0$ , содержащегося в языке  $\mathcal{L}_1$ . Отображение  $\theta$  из  $W_1$  на  $W_0$  называется  *$\mathcal{L}_0$ -морфизмом моделей*, если удовлетворяет условиям

- (m1)  $\theta$  является *p-морфизмом шкал*;
- (m2) для любого  $x \in W_1$  и любой переменной  $p$  языка  $\mathcal{L}_0$

$$x \models_1 p \iff \theta(x) \models_0 p.$$

Индукцией по длине формулы доказывается

**Лемма 4.1.** Пусть  $\theta$  —  $\mathcal{L}_0$ -морфизм модели  $M_1$  языка  $\mathcal{L}_1$  на модель  $M_0$  языка  $\mathcal{L}_0$ . Тогда для любого  $x \in W_1$  и любой формулы  $A$  языка  $\mathcal{L}_0$ :

$$x \models_1 A \iff \theta(x) \models_0 A.$$

Для дальнейшего нам потребуются некоторые естественные морфизмы канонических  $L$ -моделей.

**Лемма 4.2** (о канонических морфизмах). Пусть даны канонические  $L$ -модели  $M_1$  языка  $\mathcal{L}_1$  и  $M_0$  языка  $\mathcal{L}_0$ , содержащегося в языке  $\mathcal{L}_1$ . Тогда отображение

$$\theta(T_1) = T_1 \cap \mathcal{L}_0,$$

где  $T_1 \in M_1$ , является  $\mathcal{L}_0$ -морфизмом из  $M_1$  на  $M_0$ .

Отображение  $\theta$  из леммы 4.2 называется *каноническим  $\mathcal{L}_0$ -морфизмом* из  $M_1$  на  $M_0$ .

Класс моделей  $K$  будем называть *устойчивым*, если для любых инициальных моделей  $M_1$  языка  $\mathcal{L}_1$ ,  $M_2$  языка  $\mathcal{L}_2$  и  $M_0$  языка  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$  из  $K$  и любых  $\mathcal{L}_0$ -морфизмов  $\theta_1 : M_1 \rightarrow M_0$ ,  $\theta_2 : M_2 \rightarrow M_0$  существуют инициальная модель  $M$  языка  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ , принадлежащая  $K$ , а также  $\mathcal{L}_1$ -морфизм  $\varphi$  из  $M$  на  $M_1$  и  $\mathcal{L}_2$ -морфизм  $\psi$  из  $M$  на  $M_2$  такие, что  $\theta_1\varphi = \theta_2\psi$ .

Такую модель вместе с морфизмами будем называть *амальгамой* для  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ .

**Теорема 4.3** [12]. Пусть выбранный класс  $L$ -моделей содержит все инициальные конусы канонических  $L$ -моделей всех языков от различных конечных множеств переменных. Если этот класс является устойчивым, то  $L$  имеет СР.

Нам также потребуется более сильное утверждение, где достаточно существования амальгамы для канонических моделей и морфизмов.

**Теорема 4.4.** Пусть  $L$  — произвольная  $J$ -логика. Пусть для любых инициальных конусов  $M_1$  канонической  $L$ -модели языка  $\mathcal{L}_1$ ,  $M_2$  канонической  $L$ -модели языка  $\mathcal{L}_2$  и  $M_0$  канонической  $L$ -модели языка  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$  и любых канонических  $\mathcal{L}_0$ -морфизмов  $\theta_1 : M_1 \rightarrow M_0$ ,  $\theta_2 : M_2 \rightarrow M_0$  существуют инициальная  $L$ -модель  $M$  языка  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ , а также  $\mathcal{L}_1$ -морфизм  $\phi$  из  $M$  на  $M_1$  и  $\mathcal{L}_2$ -морфизм  $\psi$  из  $M$  на  $M_2$  такие, что  $\theta_1\phi = \theta_2\psi$ . Тогда  $L$  имеет СР.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет доказательство теоремы 4.3.  $\square$

В следующих разделах приведем конструкции, которые потребуются в доказательствах.

## 5. Согласованные произведения

В [12] определено понятие согласованного произведения моделей. Пусть даны две модели  $M_1$  языка  $\mathcal{L}_1$  и  $M_2$  языка  $\mathcal{L}_2$ , имеющие общий  $\mathcal{L}_0$ -морфный образ  $M_0$ , где  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ , относительно  $\mathcal{L}_0$ -морфизмов  $\theta_1, \theta_2$  соответственно. Рассмотрим следующую модель

$$M = (W, \leq, Q, \models)$$

языка  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ . Положим

$$W = \{(a, b) \mid a \in W_1, b \in W_2, \theta_1(a) = \theta_2(b)\},$$

$$(a, b) \leq (a', b') \iff (a \leq_1 a' \text{ и } b \leq b'),$$

$$Q = \{(a, b) \in W \mid a \in Q_1, b \in Q_2\},$$

$$(a, b) \models p \iff ((p \in \mathcal{L}_1 \text{ и } a \models_1 p) \text{ или } (p \in \mathcal{L}_2 \text{ и } b \models_2 p)).$$

Заметим, что  $\theta_1(\infty_1) = \theta_2(\infty_2)$  ввиду монотонности  $p$ -морфизмов, поэтому пара  $\infty = (\infty_1, \infty_2)$  принадлежит  $W$  и является наибольшим элементом в этом множестве. Кроме того, если  $M_1$  и  $M_2$  — инициальные модели, порожденные элементами  $a_1$  и  $a_2$  соответственно, то  $\theta_1(a_1) = \theta_2(a_2)$  есть наименьший элемент модели  $M_0$ , пара  $(a_1, a_2)$  принадлежит  $W$  и является наименьшим элементом в модели  $M$ , а значит,  $M$  — инициальная модель.

Модель  $M$  называем *согласованным произведением  $M_1$  и  $M_2$  над  $M_0$* .

По следующей лемме  $M$  с проекциями  $\pi_i$  является амальгамой для  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ .

**Лемма 5.1** [12]. Если даны две модели  $M_1$  языка  $\mathcal{L}_1$  и  $M_2$  языка  $\mathcal{L}_2$ , имеющие общий  $\mathcal{L}_0$ -морфный образ  $M_0$ , где  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ , относительно  $\mathcal{L}_0$ -морфизмов  $\theta_1, \theta_2$  соответственно и  $M$  — их согласованное произведение над  $M_0$ , то проекция  $\pi_1$  является  $\mathcal{L}_1$ -морфизмом из  $M$  на  $M_1$ , а проекция  $\pi_2$  —  $\mathcal{L}_2$ -морфизмом из  $M$  на  $M_2$ , причем  $\theta_1\pi_1 = \theta_2\pi_2$ .

Из этой леммы и теоремы 4.3 вытекает

**Следствие 5.2.** Если логика полна относительно класса моделей, замкнутого относительно согласованных произведений, то она имеет СР.

## 6. Композиции шкал и моделей

Следствие 5.2 использовалось в [12, 13] для доказательства СР в ряде J-логики. Однако во многих случаях требуются более сложные конструкции.

Для построения моделей, удовлетворяющих тем или иным условиям, определим понятие композиции шкал и моделей.

Пусть  $W = (W, \leq, Q)$ ,  $W_1 = (W_1, \leq_1, Q_1)$  — шкалы,  $\theta$  —  $p$ -морфизм из  $W$  на  $W_1$ ,  $B$  — некоторое множество элементов из  $W$ . Для всех  $b \in B$  даны шкалы  $Y_b = (Y_b, \leq_b, Q_b)$ , где  $Y_b \cap W = \{b, \infty\}$ ,  $Y_b \cap Y_{b'} = \{\infty\}$  при  $b \neq b'$ ,  $b$  — наименьший, а  $\infty$  — наибольший элементы в  $Y_b$  относительно  $\leq_b$ ,  $\alpha_b$  —  $p$ -морфизм из  $Y_b$  на  $W_1^{\theta(b)}$ .

Ясно, что  $\alpha_b(b) = \theta(b)$ ,  $\alpha_b(\infty) = \infty_1$ .

Следующую шкалу  $W^* = (W^*, \leq^*, Q^*)$  будем называть *композицией над*  $W$ . Положим

$$W^* = W \cup \bigcup_{b \in B} Y_b = (W - B) \cup \bigcup_{b \in B} Y_b, \quad Q^* = Q \cup \bigcup_{b \in B} Q_b, \quad \infty^* = \infty.$$

Для  $x, y \in W^*$

$$x \leq^* y \iff [(x, y \in W, x \notin B, x \leq y) \text{ или } (\exists b \in B)(x, y \in Y_b \text{ и } x \leq_b y) \text{ или } (x \in (W - B) \text{ и } (\exists b \in B)(y \in Y_b \text{ и } x \leq b))].$$

Для  $x \in W^*$  положим

$$\beta(x) = \begin{cases} \theta(x), & \text{если } x \in W, \\ \alpha_b(x), & \text{если } x \in Y_b \text{ для } b \in B. \end{cases}$$

Отметим, что для  $b \in B$  выполняется  $\theta(b) = \alpha_b(b)$ ,  $\theta(\infty) = \alpha_b(\infty) = \infty_1$ . Поэтому  $\beta$  определено корректно.

Отметим простые свойства введенного отношения.

**Лемма 6.1.** Пусть  $x <^* y$ .

1. Если  $x \in Y_b$  для некоторого  $b \in B$ , то  $y \in Y_b$  и  $x \leq_b y$ .
2. Если  $y \in W - \{\infty\}$ , то  $x \in W - B - \{\infty\}$ .

**Доказательство.** (1) Пусть  $x <^* y$  и  $x \in Y_b$ . Из  $Y_b \cap W = \{b, \infty\}$  следует, что  $x \notin (W - B)$ . Поэтому существует  $b' \in B$  такой, что  $x, y \in Y_{b'}$  и  $x \leq_{b'} y$ . Получаем  $x \in Y_b \cap Y_{b'}$ , поэтому  $b = b'$ .

(2) Следует сразу из (1).  $\square$

Построенную в следующей лемме модель  $M^*$  будем называть *композицией над*  $M$ .

**Лемма 6.2** (о композиции). 1. Отношение  $\leq^*$  является частичным порядком на  $W^*$ , причем  $x \leq^* \infty$  для всех  $x \in W^*$ .

2. Отображение  $\beta$  есть  $p$ -морфизм из  $W^*$  на  $W_1$ .

3. Пусть  $M = (W, \leq, Q, \models)$  и все  $M_b = (Y_b, \leq_b, Q_b, \models_b)$  — модели языка  $\mathcal{L}$ ,  $M_1 = (W_1, \leq_1, Q_1, \models_1)$  — модель языка  $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$  и все  $\alpha_b$  и  $\theta$  являются  $\mathcal{L}_1$ -морфизмами. Тогда  $\beta$  является  $\mathcal{L}_1$ -морфизмом модели  $M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$  на  $M_1$ , где для  $x \in W^*$ ,  $p \in \mathcal{L}_1$

$$x \models^* p \iff ((x \in W \text{ и } x \models p) \text{ или } (\exists b \in B)(x \in Y_b \text{ и } x \models_b p)).$$

**Доказательство.** (1) Если  $x \in Y_b$  для некоторого  $b \in B$ , то  $x \leq_b x$  и  $x \leq_b \infty$ . Если  $x \in W - B$ , то  $x \leq x$  и  $x \leq \infty$ . Таким образом,  $\leq^*$  рефлексивно и  $x \leq^* \infty$ .

Антисимметричность легко проверяется.

Докажем транзитивность. Достаточно проверить случай

$$x <^* y, \quad y <^* z <^* \infty.$$

Пусть  $z \in W - \{\infty\}$ . Тогда по лемме 6.1  $y \in W - B$ ,  $x \in W - B$ ,  $x < y < z$ , поэтому  $x < z$  и  $x <^* z$ .

Пусть  $z \in (Y_b - \{\infty\})$  для некоторого  $b \in B$ .

Если  $y \in W - B$ , то  $x \in W - B$ . Кроме того,  $y \leq_b b$ ,  $x < y$ . Тогда  $x \leq_b b$  и  $x \leq^* z$ .

Рассмотрим случай  $y \in Y_{b'}$  для некоторого  $b' \in B$ . Тогда по лемме 6.1  $b = b'$  и  $b \leq_b y \leq_b z$ . Если  $x \in W - B$ , то  $x \leq b$  и  $x \leq^* z$ . Если  $x \in \bigcup_{b'' \in B} Y_{b''}$ , то  $x \in Y_b$ ,  $x \leq_b y \leq_b z$  и  $x \leq^* z$ .

(2) (p1) Пусть  $x, y \in W^*$ ,  $x \leq^* y$ . Рассмотрим возможные случаи.

Если  $x, y \in Y_b$ ,  $x \leq_b y$  для некоторого  $b \in B$ , то  $\alpha_b(x) \leq_1 \alpha_b(y)$ , т. е.  $\beta(x) \leq_1 \beta(y)$ .

Если  $x, y \in W$ , то  $x \leq y$ ,  $\theta(x) \leq_1 \theta(y)$ , т. е.  $\beta(x) \leq_1 \beta(y)$ .

Если  $x \in (W - B)$ ,  $y \in Y_b$ ,  $x \leq b$  для некоторого  $b \in B$ , то  $b \leq_b y$ . Поэтому

$$\beta(x) = \theta(x) \leq_1 \theta(b) = \alpha_b(b) \leq_1 \alpha_b(y) = \beta(y).$$

(p2) Пусть  $x \in W^*$ ,  $\beta(x) <_1 y$ ,  $y \in W_1$ . Найдем  $z >^* x$  такой, что  $\beta(z) = y$ .

Если  $x \in Y_b$  для некоторого  $b \in B$ , то  $\alpha_b(x) <_1 y$ . Поэтому существует  $z \in Y_b$  такой, что  $x \leq_b z$  и  $\alpha_b(z) = y$ . Отсюда  $x <^* z$  и  $\beta(z) = y$ .

Пусть  $x \in (W - B)$ . Тогда  $\theta(x) <_1 y$ , поэтому  $y = \theta(z)$  для некоторого  $z \in W$ . Так как  $x \notin B$ , получаем  $x <^* z$ . Кроме того,  $\beta(z) = y$ .

(p3) Пусть  $x \in W^*$ . Если  $x \in (W - B)$ , то

$$x \in Q^* \iff x \in Q \iff \theta(x) \in Q_1 \iff \beta(x) \in Q_1.$$

Пусть  $x \in (Y_b - \{\infty\})$  для некоторого  $b \in B$ . Тогда

$$x \in Q^* \iff x \in Q_b \iff \alpha_b(x) \in Q_1 \iff \beta(x) \in Q_1.$$

(3) Легко следует из (2). Пусть  $p$  — переменная языка  $\mathcal{L}_1$ ,  $x \in W^*$ . Если  $x \in B$ , то

$$x \models p \iff \theta(x) \models_1 p \iff \alpha_x(x) \models_1 p \iff \beta(x) \models_1 (p).$$

Поэтому  $x \models^* p \iff \beta(x) \models_1 p$ . При  $x \in W^* - B$  такое же соотношение очевидно.  $\square$

## 7. CIP в Int \* NC

Напомним, что

$$\text{Int} * \text{NC} = \mathbf{J} + (\perp \rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)).$$

Модель называем *Q-линейной*, если выполнено условие (NCF)  $x \in Q, x \leq y, x \leq z \Rightarrow (y \leq z \text{ или } z \leq y)$ .

По лемме 3.5 и теореме 3.6 все канонические модели логики Int\*NC являются Q-линейными, а сама логика полна относительно класса Q-линейных моделей.

**Лемма 7.1** (о линейности). Пусть  $W_0, W_1, W_2$  — линейно упорядоченные шкалы,  $\theta_i$  —  $p$ -морфизмы из  $W_i$  на  $W_0$  ( $i = 1, 2$ ),  $a$  и  $b$  — инициальные элементы шкал  $W_1$  и  $W_2$  соответственно,  $\theta_1(a) = \theta_2(b)$ , для любого  $z \in W_0$  множества  $\theta_1^{-1}(z)$  и  $\theta_2^{-1}(z)$  имеют наименьший и наибольший элементы. Тогда существуют линейно упорядоченная инициальная шкала  $W = (W, \leq, Q)$  и  $p$ -морфизмы  $\alpha$  и  $\beta$  из  $W$  на  $W_1$  и  $W_2$  соответственно такие, что  $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $z \in W_0$ . Обозначим через  $a_{1z}$  наименьший элемент в множестве  $\theta_1^{-1}(z)$ , а через  $b_{2z}$  — наибольший элемент в множестве  $\theta_2^{-1}(z)$ .

Положим

$$\begin{aligned} S_z &= \{(a_{1z}, v) \mid v \in \theta_2^{-1}(z)\} \cup \{(u, b_{2z}) \mid u \in \theta_1^{-1}(z)\}, \\ W &= \bigcup \{S_z \mid z \in W_0\}, \quad Q = \bigcup \{S_z \mid z \in Q_0\}, \\ \infty &= (\infty_1, \infty_2). \end{aligned}$$

Для  $(u, v), (u', v') \in W$

$$(u, v) \leq (u', v') \iff (u \leq_1 u' \text{ и } v \leq_2 v').$$

Заметим, что  $S_z$  непусто для любого  $z$ , так как содержит пару  $(a_{1z}, b_{2z})$ . Кроме того,  $(a, b) \in W$ .

Очевидно,  $\leq$  — частичный порядок на  $W$ . Покажем, что  $\leq$  — линейный порядок. Пусть  $(u, v), (u', v') \in W$ . Тогда  $(u, v) \in S_z, (u', v') \in S_{z'}$ , где  $z = \theta_1(u) = \theta_2(v), z' = \theta_1(u') = \theta_2(v')$ . Имеем  $z \leq_0 z'$  или  $z' \leq_0 z$ .

Пусть  $z = z'$ . Допустим, что  $(u, v) \not\leq (u', v')$ . Тогда  $u \not\leq_1 u'$  или  $v \not\leq_2 v'$ . В первом случае  $u' <_1 u, u \neq a_{1z}$ , а значит,  $v = b_{2z}$ . Поэтому  $(u', v') \leq (u, v)$ . Во втором случае  $v' <_2 v, v' \neq b_{2z}$ , а значит,  $u' = a_{1z}$ . Тем самым  $(u', v') \leq (u, v)$ .

Пусть  $z <_0 z'$ . Поскольку множества  $W_1$  и  $W_2$  линейно упорядочены, получаем  $u <_1 u'$  и  $v <_2 v'$ , т. е.  $(u, v) \leq (u', v')$ . Аналогично если  $z' <_0 z$ , то  $(u', v') \leq (u, v)$ . Итак,  $\leq$  — линейный порядок.

Для  $(u, v) \in W$  положим

$$\alpha(u, v) = u, \quad \beta(u, v) = v.$$

Покажем, что  $\alpha$  —  $p$ -морфизм из  $W$  на  $W_1$ . Условие (p1) очевидно, докажем (p2).

Пусть  $(u, v) \in W, u \leq_1 u'$ . Тогда  $z = \theta_1(u) = \theta_2(v) \leq_0 \theta_1(u') = z'$ . Получаем  $(u', b_{2z'}) \in S_{z'} \subseteq W$  и  $(u, v) \leq (u', b_{2z'})$ ,  $\alpha(u', b_{2z'}) = u'$ .

Покажем, что  $\beta$  —  $p$ -морфизм из  $W$  на  $W_2$ . Достаточно проверить условие (p2).

Пусть  $(u, v) \in W, v <_2 v'$ . Тогда  $z = \theta_1(u) = \theta_2(v) \leq_0 \theta_2(v') = z'$ . Кроме того,  $(a_{1z'}, v') \in S_{z'} \subseteq W$ . Если  $z <_0 z'$ , то  $(u, v) < (a_{1z'}, v')$ .

Рассмотрим случай  $z' = z$ . Имеем  $v \neq b_{1z}$ , поэтому  $u = a_{1z}$ . Кроме того,  $(a_{1z}, v') \in S_z, (u, v) < (a_{1z}, v')$  и  $\beta(a_{1z}, v') = v'$ .

Ясно, что  $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$ .  $\square$

**Лемма 7.2.** Пусть  $M, M_0$  — инициальные конусы канонических моделей логики  $L$  языков  $\mathcal{L}, \mathcal{L}_0$ , где  $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ , и  $\theta$  — канонический  $\mathcal{L}_0$ -морфизм из  $M$  на  $M_0$ . Пусть  $x \in W$ ,  $W^x$  линейно упорядочено и  $\theta(x) = x_0$ . Тогда  $W_0^{x_0}$  линейно упорядочено и для любого  $z \geq_0 x_0$  множество  $W^x \cap \theta^{-1}(z)$  имеет наименьший элемент  $a_z$  и наибольший элемент  $b_z$ .

**Доказательство.** Линейная упорядоченность следует из (p1). Далее, вспомним, что  $\theta(x) = x \cap \mathcal{L}_0$ . Пересечение цепи простых теорий и объединение цепи простых теорий из  $W^x \cap \theta^{-1}(z)$  снова являются простыми теориями и принадлежат тому же множеству.  $\square$

**Предложение 7.3.** Пусть  $L$  содержит  $(\perp \rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$ . Пусть  $M_0, M_1, M_2$  — инициальные конусы канонических моделей логики  $L$  языков  $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ , где  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ , и  $\theta_1, \theta_2$  — канонические  $\mathcal{L}_0$ -морфизмы из  $M_1, M_2$  на  $M_0$ . Тогда существуют модель  $M^*$ , удовлетворяющая условию (NCF), а также  $\mathcal{L}_1$ -морфизм  $\alpha$  из  $M^*$  на  $M_1$  и  $\mathcal{L}_2$ -морфизм  $\beta$  из  $M^*$  на  $M_2$  такие, что  $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$  и  $M_0, M_1, M_2$  — инициальные конусы канонических моделей логики  $L$  языков  $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  соответственно. Пусть  $M_i = (W_i, \leq_i, Q_i)$  для  $i = 0, 1, 2$  и  $\theta_1, \theta_2$  — канонические  $\mathcal{L}_0$ -морфизмы из  $M_1, M_2$  на  $M_0$ . Надо построить  $Q$ -линейную амальгаму.

Обозначим через  $M = (W, \leq, Q, \models)$  согласованное произведение моделей  $M_1$  и  $M_2$  над  $M_0$ .

По лемме 5.1 проекции  $\pi_i$  являются  $\mathcal{L}_i$ -морфизмами из  $M$  на  $M_i$ , причем  $\theta_1\pi_1(x, y) = \theta_2\pi_2(x, y)$  для любой пары  $(x, y) \in W$ .

Построим композицию  $M^*$  над  $M$ . Положим  $B = Q$ .

Пусть  $(a, b) \in B$ , т. е.  $a \in Q_1, b \in Q_2$  и  $\theta_1(a) = \theta_2(b)$ . Так как  $M_1$  и  $M_2$  удовлетворяют условию (NCF) по лемме 3.5, множества  $W_1^a$  и  $W_2^b$  линейно упорядочены. По лемме 7.2 для любого  $z \geq_0 \theta_1(a)$  множества  $W_1^a \cap \theta_1^{-1}(z)$  и  $W_2^b \cap \theta_2^{-1}(z)$  имеют наименьшие и наибольшие элементы. Тогда по лемме 7.1 существуют линейно упорядоченная инициальная шкала  $Y_{ab} = (Y_{ab}, \leq_{ab}, Q_{ab})$  и  $p$ -морфизмы  $\alpha_{ab}$  и  $\beta_{ab}$  из  $Y_{ab}$  на  $W_1^a$  и  $W_2^b$  такие, что  $\theta_1\alpha_{ab} = \theta_2\beta_{ab}$ . Заменяя в случае необходимости множества их изоморфными копиями, можно считать, что  $Y_{ab} \cap W = \{(a, b), \infty\}$ ,  $Y_{ab} \cap Y_{a'b'} = \{\infty\}$  при  $(a, b) \neq (a', b')$ ,  $Q_{ab} = Y_{ab}$ ,  $(a, b)$  — наименьший, а  $\infty = (\infty_1, \infty_2)$  — наибольший элемент в  $Y_{ab}$ . В частности,  $Y_{\infty_1\infty_2} = \{\infty\}$ .

Определим модель  $M_{ab} = (Y_{ab}, \leq_{ab}, Q_{ab}, \models_{ab})$ , полагая для  $x \in Y_{ab}$  и переменной  $p \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$

$$x \models_{ab} p \iff [(p \in \mathcal{L}_1 \text{ и } \alpha_{ab}(x) \models_1 p) \text{ или } (p \in \mathcal{L}_2 \text{ и } \beta_{ab}(x) \models_2 p)].$$

Учитывая условие  $\theta_1\alpha_{ab} = \theta_2\beta_{ab}$ , нетрудно проверить, что тогда  $\alpha_{ab}$  является  $\mathcal{L}_1$ -морфизмом из  $M_{ab}$  на  $M_1^a$ , а  $\beta_{ab}$  —  $\mathcal{L}_2$ -морфизмом из  $M_{ab}$  на  $M_2^b$ .

Строим композицию  $W^*$  над  $W$ . Получаем

$$W^* = W \cup \bigcup_{(a,b) \in Q} Y_{ab}, \quad Q^* = \bigcup_{(a,b) \in Q} Q_{ab}, \quad \infty^* = \infty.$$

Заметим, что  $W^* - Q^* = W - Q$ .

Для  $x, y \in W^*$  определим

$$x \leq^* y \iff [(x, y \in W, x \notin Q, x \leq y) \text{ или } (\exists (a, b) \in Q)(x, y \in Y_{ab} \text{ и } x \leq_{ab} y) \text{ или } (x \in (W - Q) \text{ и } (\exists (a, b) \in Q)(y \in Y_{ab} \text{ и } x \leq (a, b))].$$

По лемме 6.2  $W^*$  частично упорядочено отношением  $\leq^*$ . Для  $x \in W^*$  положим

$$\alpha(x) = \begin{cases} \pi_1(x), & \text{если } x \in W, \\ \alpha_{ab}(x), & \text{если } x \in Y_{ab} \text{ для } (a, b) \in B; \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} \pi_2(x), & \text{если } x \in W, \\ \beta_{ab}(x), & \text{если } x \in Y_{ab} \text{ для } (a, b) \in B. \end{cases}$$

Определим  $M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$ , где для  $x \in W^*$  и переменной  $p \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$

$$x \models^* p \iff [(p \in \mathcal{L}_1 \text{ и } \alpha(x) \models_1 p) \text{ или } (p \in \mathcal{L}_2 \text{ и } \beta(x) \models_2 p)].$$

Тогда по лемме 6.2  $\alpha$  является  $\mathcal{L}_1$ -морфизмом из  $M^*$  на  $M_1$ , а  $\beta$  —  $\mathcal{L}_2$ -морфизмом из  $M^*$  на  $M_2$ . Очевидно,  $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$ .

Покажем, что  $M^*$  удовлетворяет условию (NCF). Пусть  $y \in Q^*$ . Тогда  $y \in Y_{ab}$  для некоторых  $a, b$ .

Допустим, что  $y <^* z$  и  $y <^* t$ . По лемме 6.1 заключаем, что  $z, t \in Y_{ab}$ . Поскольку  $Y_{ab}$  линейно упорядочено, элементы  $z$  и  $t$  сравнимы по  $\leq_{ab}$ , а значит, и по  $\leq^*$ . Условие (NCF), а вместе с ним и лемма доказаны.  $\square$

Из предложения 7.3 и теоремы 4.4 сразу следует

**Теорема 7.4.** *Логика  $\text{Int} * \text{NC}$  имеет СР.*

## 8. Корректные подмодели

Шкала  $(W', \leq', Q')$  называется *подшкалой* шкалы  $(W, \leq, Q)$ , если  $W' \subseteq W$ , отношение  $\leq'$  является ограничением  $\leq$  на  $W'$  и  $Q' = Q \cap W'$ .

Модель  $M = (W', \leq', Q', \models')$  языка  $\mathcal{L}$  называется *подмоделью* модели  $M = (W, \leq, Q, \models)$  языка  $\mathcal{L}$ , если  $(W', \leq', Q')$  является подшкалой шкалы  $(W, \leq, Q)$  и для любых  $x \in W'$  и переменной  $p$  языка  $\mathcal{L}$

$$x \models' p \iff x \models p.$$

Пусть  $W, W_1$  — шкалы,  $\theta$  —  $p$ -морфизм из  $W$  на  $W_1$ . Подшкалу  $W'$  шкалы  $W$  называем *корректной относительно  $\theta$* , если ограничение  $\theta'$   $p$ -морфизма  $\theta$  на  $W'$  снова является  $p$ -морфизмом на  $W_1$ .

Пусть  $\theta$  —  $\mathcal{L}_1$ -морфизм модели  $M$  языка  $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}_1$  на модель  $M_1$  языка  $\mathcal{L}_1$ . Подмодель  $M'$  модели  $M$  называется *корректной относительно  $\theta$* , если ограничение  $\theta'$   $\mathcal{L}_1$ -морфизма  $\theta$  на  $M'$  снова является  $\mathcal{L}_1$ -морфизмом на  $M_1$ .

Ясно, что если  $\theta$  —  $\mathcal{L}_1$ -морфизм модели  $M = (W, \leq, Q, \models)$  языка  $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}_1$  на модель  $M_1 = (W_1, \leq_1, Q_1, \models_1)$  языка  $\mathcal{L}_1$  и  $M' = (W', \leq', Q', \models')$  — подмодель  $M$ , причем подшкала  $W'$  корректна относительно  $\theta$ , то подмодель  $M'$  корректна относительно  $\theta$ .

Следующая лемма дает достаточное условие корректности.

**Лемма 8.1** (об ограничении). *Пусть  $W, W_1$  — шкалы,  $\theta$  —  $p$ -морфизм из  $W$  на  $W_1$ ,  $D \subseteq W - Q$ , причем  $\theta(D) = W_1 - Q_1$  и выполнено условие*

$$x \in D, \quad \theta(x) <_1 y, \quad y \in W_1 - Q_1 \Rightarrow (\exists z \in D)(x < z \text{ и } \theta(z) = y).$$

Определим подшкалу  $W' = D \cup Q$  шкалы  $W$ , где  $Q' = Q$ , порядок на  $W'$  индуцирован порядком на  $W$ . Тогда подшкала  $W'$  корректна относительно  $\theta$ .

**Доказательство.** Условия (p1) и (p3) очевидны. Проверим (p2). Пусть  $x \in W'$ ,  $\theta'(x) <_1 y$ ,  $y \in W_1$ . Найдем  $z \in W'$  такой, что  $x <' z$  и  $\theta'(z) = y$ .

Если  $x \in Q'$ , то  $y \in Q_1$ , а значит, существует  $z \in Q$  такой, что  $z > x$  и  $\theta(z) = y$ . Тогда  $z \in W'$ ,  $x <' z$  и  $\theta'(z) = y$ .

Пусть  $x \notin Q'$ , т. е.  $x \in D$ . Если  $y \in Q_1$ , то, как и в предыдущем случае, существует  $z \in W'$  такой, что  $x <' z$  и  $\theta'(z) = y$ . Допустим, что  $y \in W_1 - Q_1$ . Тогда требуемый  $z$  существует по условию леммы.  $\square$

Следующая лемма доказывает устойчивость класса моделей, удовлетворяющих условию (NEF), что позволяет доказать СР в логике Int\*NE.

**Лемма 8.2.** Пусть даны две модели  $M_1$  языка  $\mathcal{L}_1$  и  $M_2$  языка  $\mathcal{L}_2$ , удовлетворяющие условию (NEF), и  $\mathcal{L}_0$ -морфизмы  $\theta_1, \theta_2$  моделей  $M_1, M_2$  на модель  $M_0$  языка  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ . Тогда существует подмодель

$$M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$$

согласованного произведения моделей  $M_1$  и  $M_2$  над  $M_0$ , где

$$W^* - Q^* = \{(a, b) \mid a \in W_1 - Q_1, b \in W_2 - Q_2, \theta_1(a) = \theta_2(b)\},$$

удовлетворяющая условию (NEF), причем ограничения  $\pi_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) проекций  $\pi_i$  на  $M^*$  являются  $\mathcal{L}_i$ -морфизмами из  $M^*$  на  $M_i$  и  $\theta_1 \pi_1^* = \theta_2 \pi_2^*$ .

**Доказательство.** По существу, лемма доказана в [12]. Доказательство СР для логики  $\text{JE}_1^Q = \text{Int} * \text{NE}$  основано на устойчивости класса моделей, удовлетворяющих условию (NEF), которая устанавливается с помощью следующей конструкции. По данным моделям строится подмодель

$$M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$$

согласованного произведения моделей  $M_1$  и  $M_2$  над  $M_0$ , где

$$W^* = \{(a, b) \mid a \in W_1 - Q_1, b \in W_2 - Q_2, \theta_1(a) = \theta_2(b)\} \cup Q^*,$$

$$Q^* = \{(a, b) \mid a \in Q_1, b \in Q_2, \theta_1(a) = \theta_2(b) \neq \infty_0\} \\ \cup \{(a, \infty_2) \mid a \in Q_1, \theta_1(a) = \infty_0\} \cup \{(\infty_1, b) \mid b \in Q_2, \theta_2(b) = \infty_0\}.$$

Тогда  $M^*$  удовлетворяет требованиям леммы.  $\square$

### 9. СР в LC\*Neg, LC\*NC и LC\*NE

**Лемма 9.1.** Пусть  $L_{\text{int}} \supseteq \text{LC}$ ,  $M, M_0$  — инициальные конусы канонических моделей логики  $L$  языков  $\mathcal{L}, \mathcal{L}_0$ , где  $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ , и  $\theta$  — канонический  $\mathcal{L}_0$ -морфизм из  $M$  на  $M_0$ . Тогда для любого  $z \in (W_0 - Q_0)$  множество  $\theta^{-1}(z)$  имеет наименьший элемент  $a_z$  и наибольший элемент  $b_z$ .

**Доказательство.** По лемме 3.5 множество  $W - Q$  линейно упорядочено. Следовательно,  $\theta^{-1}(z)$  линейно упорядочено. Утверждение легко вытекает из определения канонического морфизма.  $\square$

**Теорема 9.2.** Логики  $\text{LC} * \text{Neg}$ ,  $\text{LC} * \text{NC}$ ,  $\text{LC} * \text{NE}$  имеют СР.

**Доказательство.** Сначала докажем СР в  $\text{LC} * \text{NC}$ . Используем доказательство для  $\text{Int} * \text{NC}$ .

Пусть  $M_0, M_1, M_2$  — инициальные конусы канонических моделей логики  $\text{LC} * \text{NC}$ ,  $\theta_i : M_i \rightarrow M_0$  —  $\mathcal{L}_0$ -морфизмы для  $i = 1, 2$ .

В соответствии с доказательством предложения 7.3 обозначаем через  $M = (W, \leq, Q, \models)$  согласованное произведение моделей  $M_1$  и  $M_2$  над  $M_0$ . Затем строим модель  $M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$  и  $\mathcal{L}_i$ -морфизмы  $\alpha, \beta$  из  $M^*$  на  $M_1$  и  $M_2$  соответственно такие, что  $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$ . При этом

$$W^* - Q^* = W - Q = \{(x, y) \mid x \in W_1 - Q_1, y \in W_2 - Q_2, \theta_1(x) = \theta_2(y)\},$$

для  $(x, y), (x', y') \in (W^* - Q^*)$  выполняется

$$\begin{aligned} (x, y) \leq^* (x', y') &\iff (x, y) \leq (x', y') \iff (x \leq_1 x' \text{ и } y \leq_2 y'), \\ \alpha(x, y) &= x, \quad \beta(x, y) = y. \end{aligned}$$

По предложению 7.3 модель  $M^*$  удовлетворяет условию (NCF).

Вспомним, что исходные модели удовлетворяли  $I((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$ . Тогда  $W_i - Q_i$  линейно упорядочены по лемме 3.5. Кроме того, по лемме 9.1 для любого  $x_0 \in W_0 - Q_0$  в множестве  $\theta_i^{-1}(x_0)$  существуют наименьший элемент  $l_i(x_0)$  и наибольший элемент  $u_i(x_0)$ .

Применим лемму 8.1. Определим подмодель  $M'$  модели  $M^*$ , полагая

$$D = \{(x_1, x_2) \mid \theta_1(x_1) = \theta_2(x_2) = x_0 \in W_0 - Q_0, (x_1 = l_1(x_0) \text{ или } x_2 = u_2(x_0))\},$$

$$W' = D \cup Q^*, \quad Q' = Q^*.$$

Тогда  $W' - Q'$  линейно упорядочено. Покажем, что  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют условиям леммы 8.1.

Пусть  $x \in D$ . Тогда

$$x = (x_1, x_2), \quad x_i \in (W_i - Q_i), \quad \theta_1(x_1) = \theta_2(x_2).$$

Допустим  $\alpha(x) <_1 y_1, y_1 \in (W_1 - Q_1)$ . Найдем  $z \in D$  такой, что  $x <^* z$  и  $\alpha(z) = y_1$ .

Имеем

$$x_1 <_1 y_1, \quad \theta_2(x_2) = \theta_1(x_1) \leq_0 \theta_1(y_1) = x_0, \quad x_0 \in (W_0 - Q_0).$$

Отсюда  $z = (y_1, u_2(x_0)) \in D$  и  $x <^* z$ .

Допустим  $\beta(x) <_2 y_2, y_2 \in (W_2 - Q_2)$ . Найдем  $z \in D$  такой, что  $x <^* z$  и  $\beta(z) = y_2$ .

Пусть  $\theta_2(y_2) = y_0$ . Если  $\theta_1(x_1) <_0 y_0$ , то  $x_1 <_1 l_1(y_0)$ . При  $z = (l_1(y_0), y_2)$  получаем  $z \in D, x <^* z$  и  $\beta(z) = y_2$ .

Рассмотрим случай  $\theta_1(x_1) = y_0$ . Поскольку  $(x_1, x_2) \in D$ , получаем  $x_1 = l_1(y_0)$  или  $x_2 = u_2(y_0)$ . Второй вариант невозможен, так как  $\theta_2(y_2) = y_0$ , а значит,  $y_2 \leq_2 u_2(y_0)$  в противоречие с  $x_2 <_2 y_2$ . Поэтому  $x_1 = l_1(y_0), z = (x_1, y_2) \in D, x <^* z$  и  $\beta(z) = y_2$ .

По лемме 8.1 ограничения  $\alpha'$  и  $\beta'$  отображений  $\alpha$  и  $\beta$  на множество  $W'$  являются  $p$ -морфизмами из  $W'$  на  $W_1$  и  $W_2$  соответственно. Ясно, что они являются и  $\mathcal{L}_i$ -морфизмами и  $\theta_1\alpha' = \theta_2\beta'$ .

По теореме 4.4  $LC * NC$  имеет СР.

Доказательство для  $LC * Neg$  аналогично. Достаточно вместо амальгамы  $M^*$  и морфизмов  $\alpha$  и  $\beta$  взять согласованное произведение  $M$  и проекции  $\pi_i$ . Для  $LC * NE$  вместо амальгамы  $M^*$  и морфизмов  $\alpha$  и  $\beta$  достаточно взять амальгаму  $M^*, \pi_1^*, \pi_2^*$  из леммы 8.2.  $\square$

### 10. Основной результат

Докажем основной результат — теорему 10.3.

Будем говорить, что модель  $M = (W, \leq, Q, \models)$  удовлетворяет условию максимальнойности, если для любого  $x \in W - Q$  существует  $y \geq x$ , максимальный в  $W - Q$ .

В [13] доказана

**Лемма 10.1.** Пусть  $M = (W, \leq, Q, \models)$  — согласованное произведение моделей с условием максимальнойности. Тогда

- (1)  $M$  также удовлетворяет условию максимальнойности;
- (2) для любого  $x$ , максимального в  $W_1 - Q_1$ , существует  $y$ , максимальный в  $W_2 - Q_2$  и такой, что  $(x, y) \in W$ ;
- (3) для любого  $y$ , максимального в  $W_2 - Q_2$ , существует  $x$ , максимальный в  $W_1 - Q_1$  и такой, что  $(x, y) \in W$ ;
- (4) если  $(x_1, x_2) \in W$ , то элемент  $(x_1, x_2)$  является максимальным в  $W - Q$  тогда и только тогда, когда  $x_1$  и  $x_2$  максимальны в  $W_1 - Q_1$  и  $W_2 - Q_2$  соответственно.

**Лемма 10.2.** Классы инициальных моделей, удовлетворяющих любому из условий (KCF), (LP<sub>2</sub>F), (LVF), (LSF), являются устойчивыми.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть даны две инициальные модели  $M_1$  языка  $\mathcal{L}_1$  и  $M_2$  языка  $\mathcal{L}_2$ , удовлетворяющие одному из указанных условий, и  $\mathcal{L}_0$ -морфизмы  $\theta_1, \theta_2$  моделей  $M_1, M_2$  на модель  $M_0$  языка  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ . По предложению 5.1 согласованное произведение  $M = (W, \leq, Q, \models)$  моделей  $M_1$  и  $M_2$  над  $M_0$  вместе с проекциями  $\pi_i$  является амальгамой для  $M_0, M_1, M_2$ . Построим подмодель

$$M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$$

согласованного произведения  $M$ , удовлетворяющую тому же условию и корректную относительно обоих  $\mathcal{L}_i$ -морфизмов  $\pi_i$ .

(KCF) Само  $M$  удовлетворяет этому условию.

(LP<sub>2</sub>F) В множестве  $W - Q$  оставляем лишь наименьший и максимальные элементы.

(LVF) В множестве  $W - Q$  оставляем лишь наименьший и максимальные элементы. При этом число максимальных элементов равно 1, 2 или 4. В первых двух случаях  $M$  удовлетворяет (LVF). В последнем случае каждое из множеств  $W_i - Q_i$  состоит из двух различных элементов  $a_i, b_i$  и мы оставляем в  $W^* - Q^*$  лишь две пары  $(a_1, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$ .

(LSF) В множестве  $W - Q$  оставляем лишь наименьший и наибольший элементы.

Корректность легко следует из леммы 8.1. Таким образом, ограничения  $\pi_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) проекций  $\pi_i$  на  $M^*$  являются  $\mathcal{L}_i$ -морфизмами из  $M^*$  на  $M_i$  и  $\theta_1 \pi_1^* = \theta_2 \pi_2^*$ .  $\square$

**Теорема 10.3.** Логика  $L_1 * L_2$  имеет СРП тогда и только тогда, когда  $L_1$  и  $L_2$  имеют СРП.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $L_1 * L_2$  имеет СРП, то  $L_1$  и  $L_2$  имеют СРП по теореме 2.2. Докажем обратное.

Если одна из логик есть For, то логика  $L_1 * L_2$  совпадает с другой логикой и доказывать нечего. Для случая  $L_1 = \text{Cl}$  утверждение уже доказано (предложение 2.6). Там же установлено СРП для логик  $\text{Int} * \text{Neg}$  и  $\text{Int} * \text{NE}$ , а в тео-

реме 7.4 — для  $\text{Int} * \text{NC}$ . Случай  $L_1 = \text{LC}$  рассмотрен в теореме 9.2. Остается рассмотреть случаи  $L_2 \in \{\text{Neg}, \text{NC}, \text{NE}\}$  и  $L_1 \in \{\text{KC}, \text{LP}_2, \text{LV}, \text{LS}\}$ .

Если  $L_2 \in \{\text{Neg}, \text{NE}\}$ , то СРП вытекает из теоремы 4.3. Устойчивость класса инициальных моделей для  $L_1 * \text{Neg}$  следует из теоремы 3.6 и лемм 3.5 и 10.2.

Класс моделей для  $L_1 * \text{NE}$  должен удовлетворять  $(L_1F)$  и дополнительно условию  $(\text{NEF})$ . Устойчивость этого класса доказывается аналогично лемме 10.2. Надо лишь в качестве амальгамы для данных моделей  $M_0, M_1, M_2$  вместо их согласованного произведения взять модель  $M^*$  с морфизмами  $\pi_i^*$  из леммы 8.2.

Пусть  $L_2 = \text{NC}$ . Используем теорему 4.4. Докажем, что  $L = L_1 * \text{NC}$  удовлетворяет условию этой теоремы.

Пусть даны инициальные конусы  $M_1$  и  $M_2$  канонических  $L$ -моделей языков  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  соответственно и канонические  $\mathcal{L}_0$ -морфизмы  $\theta_1, \theta_2$  моделей  $M_1, M_2$  на модель  $M_0$  языка  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ . По лемме 3.5 все модели удовлетворяют условиям  $(L_1F)$  и  $(\text{NCF})$ . Сначала применяем предложение 7.3 и строим модель  $M^*$ , удовлетворяющую условию  $(\text{NCF})$ , и морфизмы  $\alpha$  и  $\beta$ . Затем аналогично конструкции из леммы 10.2 строим подмодель модели  $M^*$ , обладающую свойством  $(L_1F)$  и корректную относительно  $\alpha$  и  $\beta$ . Построенная подмодель является амальгамой для  $M_0, M_1, M_2$  и удовлетворяет условиям  $(L_1F)$  и  $(\text{NCF})$ . По теореме 4.4  $L$  имеет СРП.  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Johansson I.* Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // *Compos. Math.* 1937. V. 4. P. 119–136.
2. *Максимова Л. Л.* Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр // *Алгебра и логика.* 1977. Т. 16, № 6. С. 643–681.
3. *Craig W.* Three uses of Herbrand–Gentzen theorem in relating model theory and proof theory // *J. Symb. Log.* 1957. V. 22. P. 269–285.
4. *Максимова Л. Л.* Интерполяционная теорема Крейга и амальгамируемые многообразия // *Докл. АН СССР.* 1977. Т. 237, № 6. С. 1281–1284.
5. *Максимова Л. Л.* Неявная определимость в позитивных логиках // *Алгебра и логика.* 2003. Т. 42, № 1. С. 65–93.
6. *Максимова Л. Л.* Интерполяция и определимость в расширениях минимальной логики // *Алгебра и логика.* 2005. Т. 44, № 6. С. 726–750.
7. *Максимова Л. Л.* Разрешимость проективного свойства Бета в многообразиях гейтинг-овых алгебр // *Алгебра и логика.* 2001. Т. 40, № 3. С. 290–301.
8. *Gabbay D. M., Maksimova L.* Interpolation and definability: Modal and intuitionistic logics. Oxford: Clarendon Press, 2005.
9. *Максимова Л. Л.* Разрешимость интерполяционного свойства Крейга в стройных J-логиках // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 5. С. 1048–1064.
10. *Максимова Л. Л.* Проективное свойство Бета в стройных логиках // *Алгебра и логика.* 2013. Т. 52, № 2. С. 172–202.
11. *Максимова Л. Л.* Разрешимость слабого интерполяционного свойства над минимальной логикой // *Алгебра и логика.* 2011. Т. 50, № 2. С. 152–188.
12. *Максимова Л. Л.* Метод доказательства интерполяции в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики // *Алгебра и логика.* 2007. Т. 46, № 5. С. 627–648.
13. *Максимова Л. Л.* Негативная эквивалентность над минимальной логикой и интерполяция // *Сиб. электрон. мат. изв.* 2014. Т. 11. С. 1–17.
14. *Odintsov S.* Logic of classic refutability and class of extensions of minimal logic // *Log. Log. Philos.* 2001. V. 9. P. 91–107.
15. *Максимова Л. Л.* Неявная определимость в расширениях минимальной логики // *Логические исследования.* 2001. Т. 8. С. 72–81.
16. *Odintsov S.* Constructive negations and paraconsistency. Dordrecht: Springer-Verl., 2008. (Ser. Trends in Logic; V. 26).
17. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Узнаваемые логики // *Алгебра и логика* (в печати).

18. *Segeberg K.* Propositional logics related to Heyting's and Johansson's // *Theoria*. 1968. V. 34. P. 26–61.

*Статья поступила 8 сентября 2014 г.*

Максимова Лариса Львовна  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
`lmaksi@math.nsc.ru`

Юн Вета Федоровна  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
`veta_v@mail.ru`