Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 512.57

СУПЕРАЛГЕБРЫ ПУАССОНА И ФИЛИППОВА

А. П. Пожидаев

Аннотация. Установлена связь между супералгебрами Пуассона с некоторым дополнительным тождеством (Фаркаса) и супералгебрами Филиппова. Из данной конструкции получаются все известные к настоящему моменту простые алгебры Филиппова. Построены новые примеры простых конечномерных супералгебр Филиппова характеристики 2.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: супералгебра Пуассона, супералгебра Филиппова, простая супералгебра, супералгебра Грассмана.

Посвящается 75-летию Юрия Леонидовича Ершова

Введение

Пусть A — супералгебра Пуассона $(A;\{\ ,\ \},\cdot)$, где $\{\ ,\ \}$ — лиева операция, $\cdot$ — ассоциативная суперкоммутативная операция. Отметим, что $A = A_{\bar 0} \oplus A_{\bar 1}$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра ($A_{\bar i} \cdot A_{\bar j} \subseteq A_{\overline{i+j}}$), $(A;\{\ ,\ \})$ — супералгебра Ли и на A выполнено тождество Лейбница $\{a\cdot b, c\} = a\cdot\{b,c\}+(-1)^{p(b)p(c)}\{a,c\}\cdot b$. Элементы из $A_{\bar 0}$ называются *четными*, а элементы из $A_{\bar 1}$ — *нечетными*; при этом пишут $p(a) = i$, если $a \in A_{\bar i}$. В выражениях вида $(-1)^{p(a)p(b)}$ и т. п. условимся опускать символ p, т. е. $(-1)^{ab} := (-1)^{p(a)p(b)}$. Пусть D либо однородное ($D(A_{\bar i}) \subseteq A_{\bar i+\bar p}$) дифференцирование четности $p = p(D)$ в A относительно обеих операций (т. е. для любых однородных $a, b \in A$ выполнены равенства

$$D(a\cdot b) = D(a)\cdot b + (-1)^{aD} a\cdot D(b), \quad D\{a,b\} = \{D(a), b\} + (-1)^{aD}\{a, D(b)\},$$

здесь и далее обозначаем $D(a) := \bar a$ и $(-1)^{p(a)p(D)} := (-1)^{aD}$), либо тождественное отображение на A (при этом $D(a) = \bar a = a$). Заметим, что если $A_{\bar 1} = 0$, то приходим к определению алгебры Пуассона.

Определим на векторном пространстве супералгебры A новую тернарную операцию $[\ ,\ ,\ ]$ правилом

$$[x,y,z] = (-1)^{(x+y)D}\{x,y\}\cdot\bar z - (-1)^{(x+z)D+yz}\{x,z\}\cdot\bar y + \bar x\cdot\{y,z\} \qquad (1)$$

для любых однородных $x, y, z \in A$, а далее продолжим ее по линейности. Обозначим получившуюся тернарную супералгебру через A_D.

Тернарная антикоммутативная алгебра $\mathscr{F}$ называется *алгеброй Филиппова*, если все ее операторы правого умножения являются дифференцированиями

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–33031, 14–01–00014).

данной алгебры, т. е. на $\mathscr{F}$ кроме антикоммутативности также выполнено *обобщенное тождество Якоби* (*тождество Филиппова*)

$$[[x, y, z], u, v] = [[x, u, v], y, z] + [x, [y, u, v], z] + [x, y, [z, u, v]].$$

В 1997 г. И. П. Шестаков поставил вопрос: если A — алгебра Пуассона, то будет ли A_D алгеброй Филиппова? Автор показал, что ответ на этот вопрос отрицателен. Однако тогда автором не было замечено, что при некоторых дополнительных естественных предположениях на алгебру A вопрос решается положительно. Это положительное решение для более общего случая супералгебр мы и приводим ниже (в § 1). В § 2 показываем, что из конструкции алгебры A_D из § 1 получаются все известные к настоящему моменту простые тернарные алгебры Филиппова. В § 3, используя результаты § 1, строим новые примеры простых конечномерных супералгебр Филиппова характеристики 2.

Условимся опускать запятые в операциях и символ операции $\cdot$, когда это не приводит к двусмысленности. Так, например, $[\{xy\}zt]u$ означает $[\{x, y\}, z, t] \cdot u$.

§ 1. Супералгебры Пуассона — Фаркаса и Филиппова

Предположим, что на A выполняется тождество

$$\{xy\}\{zu\} + (-1)^{z(x+y)}\{zx\}\{yu\} + (-1)^{x(y+z)}\{yz\}\{xu\} = 0. \tag{2}$$

Алгебры Пуассона с данным тождеством (убирая знаки четностей) рассматривались Фаркасом (см., например, [1]), поэтому супералгебры с данным тождеством будем называть *супералгебрами Пуассона — Фаркаса*, а само тождество (2) — *тождеством Пуассона — Фаркаса*. Если нечетная часть A нулевая, то приходим к понятию *алгебры Пуассона — Фаркаса*.

Пусть A — супералгебра Пуассона, а Γ — супералгебра Грассмана от нечетных порождающих $x_1, x_2, \dots$. Тогда грассманова оболочка $\Gamma(A) := (A_{\bar 0} \otimes \Gamma_{\bar 0}) \oplus (A_{\bar 1} \otimes \Gamma_{\bar 1})$ является алгеброй Пуассона относительно операций (для однородных элементов)

$$(a \otimes f) \cdot (b \otimes g) = (-1)^{ab}(a \cdot b \otimes fg),$$
$$\{a \otimes f, b \otimes g\} = (-1)^{ab}\{a, b\} \otimes fg.$$

Если D — супердифференцирование на A относительно обеих операций, то отображение $a \otimes f \mapsto D(a) \otimes f$ будет дифференцированием алгебры $\Gamma(A)$ относительно обеих операций, которое также обозначим через D. Легко видеть, что если A — супералгебра Пуассона — Фаркаса, то $\Gamma(A)$ является алгеброй Пуассона — Фаркаса.

Напомним, что *тернарной супералгеброй* над полем F называется $\mathbb{Z}_2$-градуированная тернарная алгебра $A = A_{\bar 0} \oplus A_{\bar 1}$ над F (с операцией $(\cdot, \cdot, \cdot)$), т. е. если $x_i \in A_{\alpha_i}$, то $(x_1, x_2, x_3) \in A_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$. *Тернарная супералгебра Филиппова* над F — это тернарная антикоммутативная супералгебра $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{\bar 0} \oplus \mathscr{F}_{\bar 1}$ над F с одной тернарной операцией $[\cdot, \cdot, \cdot]$, удовлетворяющей тождеству

$$[[x_1, x_2, x_3], y, z] = (-1)^{pp_1}[[x_1, y, z], x_2, x_3] + (-1)^{pp_2}[x_1, [x_2, y, z], x_3] + [x_1, x_2, [x_3, y, z]], \tag{3}$$

где $p = p(y) + p(z)$, $p_1 = p(x_2) + p(x_3)$, $p_2 = p(x_3)$. Другими словами, грассманова оболочка тернарной супералгебры $\mathscr{F}$ является тернарной алгеброй Филиппова, где грассманова оболочка определяется аналогично предыдущему. Далее, вместо использования «длинного» термина «тернарная (супер)алгебра» просто используем термин «(супер)алгебра».

Теорема 1. *Пусть* $(A; \{\,,\}, \cdot)$ — *супералгебра Пуассона — Фаркаса с дифференцированием* D. *Тогда* $(A_D; [\,,\,,])$ *является супералгеброй Филиппова.*

Доказательство. Перейдем к грассмановой оболочке $\Gamma(A)$. Как замечено ранее, $\Gamma(A)$ является алгеброй Пуассона — Фаркаса. Определим на $\Gamma(A)$ тернарную операцию $[\,,\,,]$ правилом

$$\begin{aligned}[a \otimes x_1, b \otimes x_2, c \otimes x_3] &= \{a \otimes x_1, b \otimes x_2\} \cdot D(c \otimes x_3) \\ &\quad - \{a \otimes x_1, c \otimes x_3\} \cdot D(b \otimes x_2) + D(a \otimes x_1) \cdot \{b \otimes x_2, c \otimes x_3\}.\end{aligned}$$

Легко проверяется, что

$$[a \otimes f, b \otimes g, c \otimes h] = (-1)^{ab+ac+bc}[a, b, c] \otimes fgh$$

для любых однородных $a, b, c \in A$, $f, g, h \in \Gamma$ (заметим, что $p(a) = p(f)$ и т. д.).

Покажем, что $\Gamma(A)$ является тернарной алгеброй Филиппова, откуда и следует утверждение теоремы.

Антикоммутативность операции $[\,,\,,]$ на $\Gamma(A)$ вытекает из определения данной операции. Тождество Филиппова запишем в виде

$$[[abc]ed] + [[ade]bc] + [[ebd]ca] + [[dec]ab] = 0. \tag{4}$$

Заметим, что для любых $a, b, c, x, y, e, d \in A_D$ имеем

$$[a, b, c] = \{a, b\} \cdot \bar{c} - \{a, c\} \cdot \bar{b} + \{b, c\} \cdot \bar{a},$$

$$\begin{aligned}[xy, e, d] &= \{xy, e\}\bar{d} - \{xy, d\}\bar{e} + \{e, d\}\bar{x}y + \{e, d\}x\bar{y} \\ &= \{x, e\}y\bar{d} + \{y, e\}x\bar{d} + \{d, x\}y\bar{e} + \{d, y\}x\bar{e} + \{e, d\}\bar{x}y + \{e, d\}x\bar{y}.\end{aligned}$$

Полагая последовательно $x = \{ab\}$, $y = \bar{c}$; $x = \{ac\}$, $y = \bar{b}$; $x = \{bc\}$, $y = \bar{a}$, получаем, что $[[abc]ed]$ перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned}&\{\{ab\}e\}\bar{c}\bar{d} + \{\bar{c}e\}\{ab\}\bar{d} + \{d\{ab\}\}\bar{c}\bar{e} + \{d\bar{c}\}\{ab\}\bar{e} + \{ed\}\{\bar{a}b\}\bar{c} + \{ed\}\{a\bar{b}\}\bar{c} \\ &\quad + \{ed\}\{ab\}\bar{\bar{c}} + \{\{ca\}e\}\bar{b}\bar{d} + \{\bar{b}e\}\{ca\}\bar{d} + \{d\{ca\}\}\bar{b}\bar{e} + \{d\bar{b}\}\{ca\}\bar{e} + \{ed\}\{\bar{c}a\}\bar{b} \\ &\quad + \{ed\}\{c\bar{a}\}\bar{b} + \{ed\}\{ca\}\bar{\bar{b}} + \{\{bc\}e\}\bar{a}\bar{d} + \{\bar{a}e\}\{bc\}\bar{d} + \{d\{bc\}\}\bar{a}\bar{e} + \{d\bar{a}\}\{bc\}\bar{e} \\ &\qquad + \{ed\}\{\bar{b}c\}\bar{a} + \{ed\}\{b\bar{c}\}\bar{a} + \{ed\}\{bc\}\bar{\bar{a}}.\end{aligned}$$

Аналогично для $[[ade]bc]$ выводим

$$\begin{aligned}&\{\{ad\}b\}\bar{e}\bar{c} + \{\bar{e}b\}\{ad\}\bar{c} + \{c\{ad\}\}\bar{e}\bar{b} + \{c\bar{e}\}\{ad\}\bar{b} + \{bc\}\{\bar{a}d\}\bar{e} + \{bc\}\{a\bar{d}\}\bar{e} \\ &\quad + \{bc\}\{ad\}\bar{\bar{e}} + \{\{ea\}b\}\bar{d}\bar{c} + \{\bar{d}b\}\{ea\}\bar{c} + \{c\{ea\}\}\bar{d}\,\bar{b} + \{c\bar{d}\}\{ea\}\bar{b} + \{bc\}\{\bar{e}a\}\bar{d} \\ &\quad + \{bc\}\{e\bar{a}\}\bar{d} + \{bc\}\{ea\}\bar{\bar{d}} + \{\{de\}b\}\bar{a}\bar{c} + \{\bar{a}b\}\{de\}\bar{c} + \{c\{de\}\}\bar{a}\bar{b} + \{c\bar{a}\}\{de\}\bar{b} \\ &\qquad + \{bc\}\{\bar{d}e\}\bar{a} + \{bc\}\{d\bar{e}\}\bar{a} + \{bc\}\{de\}\bar{\bar{a}},\end{aligned}$$

для $[[ebd]ca]$ получаем

$$\begin{aligned}&\{\{eb\}c\}\bar{d}\bar{a} + \{\bar{d}c\}\{eb\}\bar{a} + \{a\{eb\}\}\bar{d}\bar{c} + \{a\bar{d}\}\{eb\}\bar{c} + \{ca\}\{\bar{e}b\}\bar{d} + \{ca\}\{e\bar{b}\}\bar{d} \\ &\quad + \{ca\}\{eb\}\bar{\bar{d}} + \{\{de\}c\}\bar{b}\bar{a} + \{\bar{b}c\}\{de\}\bar{a} + \{a\{de\}\}\bar{b}\bar{c} + \{a\bar{b}\}\{de\}\bar{c} + \{ca\}\{\bar{d}e\}\bar{b} \\ &\quad + \{ca\}\{d\bar{e}\}\bar{b} + \{ca\}\{de\}\bar{\bar{b}} + \{\{bd\}c\}\bar{e}\bar{a} + \{\bar{e}c\}\{bd\}\bar{a} + \{a\{bd\}\}\bar{e}\bar{c} + \{a\bar{e}\}\{bd\}\bar{c} \\ &\qquad + \{ca\}\{\bar{b}d\}\bar{e} + \{ca\}\{b\bar{d}\}\bar{e} + \{ca\}\{bd\}\bar{\bar{e}},\end{aligned}$$

и $[[dec]ab]$ запишется в виде

$$\begin{gathered}\{\{de\}a\}\bar{c}\bar{b}+\{\bar{c}a\}\{de\}\bar{b}+\{b\{de\}\}\bar{c}\bar{a}+\{b\bar{c}\}\{de\}\bar{a}+\{ab\}\{\bar{d}e\}\bar{c}+\{ab\}\{d\bar{e}\}\bar{c}\\ +\{ab\}\{de\}\bar{\bar{c}}+\{\{cd\}a\}\bar{e}\bar{b}+\{\bar{e}a\}\{cd\}\bar{b}+\{b\{cd\}\}\bar{e}\bar{a}+\{b\bar{e}\}\{cd\}\bar{a}+\{ab\}\{\bar{c}d\}\bar{e}\\ +\{ab\}\{c\bar{d}\}\bar{e}+\{ab\}\{cd\}\bar{\bar{e}}+\{\{ec\}a\}\bar{d}\bar{b}+\{\bar{d}a\}\{ec\}\bar{b}+\{b\{ec\}\}\bar{d}\bar{a}+\{b\bar{d}\}\{ec\}\bar{a}\\ +\{ab\}\{\bar{e}c\}\bar{d}+\{ab\}\{e\bar{c}\}\bar{d}+\{ab\}\{ec\}\bar{\bar{d}}.\end{gathered}$$

Обозначим слагаемое с номером $7i+j$ (из всех последних полученных 84 слагаемых) через $s_{i+1,j}$, $i=0,\dots,11$, $j=1,\dots,7$ (пишем s_{ij}, если $i<10$), т. е. левая часть (4) равна $\sum\limits_{i=1}^{12}\sum\limits_{j=1}^{7}s_{i,j}$. Тогда следующие суммы равны нулю по антикоммутативности:

$$s_{61}+s_{10,3};\quad s_{81}+s_{63};\quad s_{10,1}+s_{83};\quad s_{12}+s_{12,6};\quad s_{22}+s_{76};\quad s_{32}+s_{56};$$

$$s_{62}+s_{15};\quad s_{82}+s_{35};\quad s_{10,2}+s_{25};\quad s_{14}+s_{11,5};\quad s_{24}+s_{95};\quad s_{34}+s_{45};$$

$$s_{64}+s_{26};\quad s_{84}+s_{16};\quad s_{10,4}+s_{36};\quad s_{17}+s_{10,7};\quad s_{27}+s_{87};\quad s_{37}+s_{67},$$

последующие — по тождеству Якоби:

$$s_{11}+s_{51}+s_{73};\quad s_{21}+s_{53}+s_{12,1};\quad s_{31}+s_{71}+s_{12,3};$$

$$s_{41}+s_{13}+s_{93};\quad s_{91}+s_{33}+s_{11,3};\quad s_{11,1}+s_{23}+s_{43},$$

и последние — по тождеству (2):

$$s_{42}+s_{94}+s_{10,6};\quad s_{52}+s_{74}+s_{10,5};\quad s_{72}+s_{12,4}+s_{65};$$

$$s_{92}+s_{11,4}+s_{66};\quad s_{11,2}+s_{44}+s_{86};\quad s_{12,2}+s_{54}+s_{85};\quad s_{55}+s_{75}+s_{12,5};$$

$$s_{46}+s_{96}+s_{10,6};\quad s_{47}+s_{97}+s_{11,7};\quad s_{57}+s_{77}+s_{12,7}.$$

Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{12}\sum\limits_{j=1}^{7}s_{i,j}=0$, что и доказывает теорему. $\square$

Легко заметить, что существуют алгебры Пуассона, на которых (2) выполняется, и такие, на которых (2) не справедливо. Это показывают следующие три примера.

Пример 1. Рассмотрим кольцо многочленов $A=F[x,y,z]$ над полем F. Положим

$$\{f,g\}:=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y};\quad D(f):=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Тогда A — алгебра Пуассона с дифференцированием D и тождеством (2). Заметим, что при этом A D-проста, однако простой не является.

Пример 2. Рассмотрим кольцо многочленов $A=F[x,y,u,v]$ над полем F. Положим

$$\{f,g\}:=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Тогда A — алгебра Пуассона, однако тождество (2) в A не выполняется.

Замечание. Легко видеть, что (2) в случае алгебр влечет тождество

$$\{\{tz\}x\}y+\{\{yt\}x\}z+\{\{zy\}x\}t=0.$$

Также можно заметить, что если рассмотреть A как алгебраическую систему с тремя операциями $(A; \{\ ,\ \}, \cdot, [\ ,\ ,])$, то на A выполняются следующие соотношения:

$$\{ad\}R_{b,c} + \{bc\}R_{a,d} = \{aR_{b,c}, x\} + \{a, xR_{b,c}\},$$

$$\{aR_{b,c}, x\} + \{a, xR_{b,c}\} = \{bR_{a,x}, c\} + \{b, cR_{a,x}\},$$

где $R_{a,b}$ — оператор правого умножения в $(A; [\ ,\ ,]) : xR_{a,b} = [x, a, b]$.

Легко видеть, что $R_{a,b}$ — дифференцирование относительно ассоциативной операции:

$$(xy)R_{a,b} = (xR_{a,b})y + x(yR_{a,b}).$$

Пример 3. Как известно (см., например, [2]), один из примеров алгебр Пуассона дают скобки Пуассона — Ли на пространстве многочленов от n переменных $x_1, \dots, x_n$ с ассоциативной и коммутативной операцией умножения многочленов и лиевой операцией, определенной для образующих $x_1, \dots, x_n$ по формуле

$$\{x_i, x_j\} = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_k, \tag{5}$$

где c_{ijk} — структурные константы фиксированной алгебры Ли L на n-мерном пространстве. Для остальных многочленов операция определяется на основе (5) с помощью тождества Лейбница. Обозначим полученную алгебру через $P(L)$. Легко заметить, что в общем случае $P(L)$ не является алгеброй Пуассона — Фаркаса. Пример дает уже $P(sl_3)$: достаточно рассмотреть (2) на элементах $e_{12}, e_{23}, e_{11} - e_{22}, e_{11} - e_{33}$. Тем не менее даже среди простых алгебр Ли L существуют $P(L)$, являющиеся алгебрами Пуассона — Фаркаса, что показывает

Предложение 1. *$P(sl_2)$ является алгеброй Пуассона — Фаркаса.*

Доказательство. Лиева операция на порождающих задается следующим образом:

$$\{x_1, x_2\} = x_3, \quad \{x_1, x_3\} = 2x_1, \quad \{x_2, x_3\} = -2x_2. \tag{6}$$

Обозначим произвольный базисный элемент $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ алгебры $P(sl_2)$ через $x^{(k)}$, где $(k) = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$. Из тождества Лейбница и (6) получаем следующие правила умножения:

$$\left\{x^{(k)}, x_1^s\right\} = -sk_2 x^{(k)+(s-1,-1,1)} - 2sk_3 x^{(k)+(s,0,-1)},$$

$$\left\{x^{(k)}, x_2^s\right\} = sk_1 x^{(k)+(-1,s-1,1)} + 2sk_3 x^{(k)+(0,s,-1)},$$

$$\left\{x^{(k)}, x_3^s\right\} = (2k_1 - k_2) s x^{(k)+(0,0,s-1)},$$

откуда вытекает общая формула:

$$\{x^{(k)}, x^{(s)}\} = (k_1 s_2 - s_1 k_2) x^{(k)+(s)+(-1,-1,1)} \\ + 2(k_3(s_2 - s_1) + s_3(k_1 - k_2)) x^{(k)+(s)+(0,0,-1)}.$$

Пусть $\sigma_{k,s,t}$ — оператор взятия циклической суммы по k, s, t. Проверяем тождество Пуассона — Фаркаса:

$$\sigma_{k,s,t}\{x^{(k)}, x^{(s)}\} \cdot \{x^{(t)}, x^{(l)}\} = \sigma_{k,s,t}(x_{k,s} \cdot x_{t,l} \cdot x^{(k)+(s)+(t)+(l)}) = 0,$$

где $x_{a,b} := (a_1 b_2 - b_1 a_2) x^{(-1,-1,1)} + 2(a_3(b_2 - b_1) + b_3(a_1 - a_2)) x^{(0,0,-1)}$.

Рассмотрим коэффициент при $x^{(k)+(s)+(t)+(l)+(-2,-2,2)}$:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{k,s,t}(k_1s_2 - s_1k_2)(t_1l_2 - l_1t_2)\\
&\qquad = l_2(t_1(k_1s_2 - s_1k_2) + s_1(t_1k_2 - k_1t_2) + k_1(s_1t_2 - t_1s_2))\\
&\qquad - l_1(t_2(k_1s_2 - s_1k_2) + s_2(t_1k_2 - k_1t_2) + k_2(s_1t_2 - t_1s_2))\\
&\qquad\qquad = l_2 \cdot 0 + l_1 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что коэффициенты при всех остальных базисных элементах также равны 0. □

Теорема 2. *Пусть* $(A; \{\,,\}, \cdot)$ *либо супералгебра Пуассона над полем* F *характеристики 2, либо супералгебра Пуассона — Фаркаса. Тогда* $(A_D; [\,,\,,])$ *является тернарной супералгеброй Филиппова, если* D *— тождественное отображение на* A.

Доказательство. Антикоммутативность операции $[\,,\,,]$ следует из определения данной операции. Ради разнообразия дадим прямое доказательство супертождества Филиппова, которое запишем в виде

$$
[[abc]ed] + \overbrace{[[ade]bc]}^{(e+d)(b+c)+ed} + \overbrace{[[ebd]ca]}^{a(b+c+e+d)+c(e+d)+eb} + \overbrace{[[dec]ab]}^{(a+b)(c+e+d)+c(e+d)+ed} = 0 \qquad (7)
$$

(здесь и далее используем обозначение $\overbrace{X}^{ab} := (-1)^{ab}X$, где X — некоторое выражение).

Заметим, что для любых $a, b, c, x, y, z, e, d \in A_D$ имеем

$$
[a, b, c] = \{a, b\}c - (-1)^{bc}\{a, c\}b + a\{b, c\},
$$

$$
\begin{aligned}
[xy, e, d] = \{xy, e\}d - (-1)^{ed}\{xy, d\}e + xy\{e, d\} = (-1)^{ye}\{x, e\}yd\\
+ x\{y, e\}d - (-1)^{ed+yd}\{x, d\}ye - (-1)^{ed}x\{y, d\}e + xy\{e, d\}.
\end{aligned}
$$

Полагая во втором равенстве последовательно $x = \{ab\}$, $y = c$; $x = \{a, c\}$, $y = b$; $x = a$, $y = \{b, c\}$, получаем, что $[[abc]ed]$ перепишется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{\{\{ab\}e\}cd}^{ec} + \{ab\}\{ce\}d - \overbrace{\{\{ab\}d\}ce}^{d(e+c)} - \overbrace{\{ab\}\{cd\}e}^{ed} + \{ab\}c\{ed\}\\
&\quad - \overbrace{\{\{ac\}e\}bd}^{b(e+c)} - \overbrace{\{ac\}\{be\}d}^{bc} + \overbrace{\{\{ac\}d\}be}^{d(e+b)+bc} + \overbrace{\{ac\}\{bd\}e}^{ed+bc} - \overbrace{\{ac\}b\{ed\}}^{bc}\\
&\qquad + a\{\{bc\}e\}d + \overbrace{\{ae\}\{bc\}d}^{e(b+c)} - \overbrace{a\{\{bc\}d\}e}^{ed} - \overbrace{\{ad\}\{bc\}e}^{d(b+c+e)} + a\{bc\}\{ed\}.
\end{aligned}
$$

Аналогично для $(-1)^{(e+d)(b+c)+ed}[[ade]bc]$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{\{\{ad\}b\}ec}^{be} + \{ad\}\{eb\}c - \overbrace{\{\{ad\}c\}eb}^{c(e+b)} - \overbrace{\{ad\}\{ec\}b}^{bc} + \{ad\}e\{bc\}\\
&\quad - \overbrace{\{\{ae\}b\}dc}^{d(e+b)} - \overbrace{\{ae\}\{db\}c}^{de} + \overbrace{\{\{ae\}c\}d\,b}^{c(b+d)+de} + \overbrace{\{ae\}\{dc\}b}^{bc+de} - \overbrace{\{ae\}d\{bc\}}^{de}\\
&\qquad + a\{\{de\}b\}c + \overbrace{\{ab\}\{de\}c}^{b(d+e)} - \overbrace{a\{\{de\}c\}b}^{bc} - \overbrace{\{ac\}\{de\}b}^{c(d+e+b)} + a\{de\}\{bc\};
\end{aligned}
$$

для $(-1)^{a(b+c+e+d)+c(e+d)+eb}[[ebd]ca]$ получаем

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{\{\{eb\}c\}da}^{cd}+\{eb\}\{dc\}a-\overbrace{\{\{eb\}a\}dc}^{a(d+c)}-\overbrace{\{eb\}\{da\}c}^{ac}+\{eb\}d\{ca\}\\
&\quad-\overbrace{\{\{ed\}c\}ba}^{b(d+c)}-\overbrace{\{ed\}\{bc\}a}^{bd}+\overbrace{\{\{ed\}a\}bc}^{a(b+c)+bd}+\overbrace{\{ed\}\{ba\}c}^{ac+bd}-\overbrace{\{ed\}b\{ca\}}^{bd}\\
&\quad+e\{\{bd\}c\}a+\overbrace{\{ec\}\{bd\}a}^{c(b+d)}-\overbrace{e\{\{bd\}a\}c}^{ca}-\overbrace{\{ea\}\{bd\}c}^{a(b+c+d)}+e\{bd\}\{ca\}
\end{aligned}
$$

и для $(-1)^{(a+b)(c+e+d)+c(e+d)+ed}[[dec]ab]$ выводим

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{\{\{de\}a\}cb}^{ac}+\{de\}\{ca\}b-\overbrace{\{\{de\}b\}ca}^{b(a+c)}-\overbrace{\{de\}\{cb\}a}^{ab}+\{de\}c\{ab\}\\
&\quad-\overbrace{\{\{dc\}a\}eb}^{e(a+c)}-\overbrace{\{dc\}\{ea\}b}^{ec}+\overbrace{\{\{dc\}b\}ea}^{(a+e)b+ec}+\overbrace{\{dc\}\{eb\}a}^{ab+ec}-\overbrace{\{dc\}e\{ab\}}^{ec}\\
&\quad+d\{\{ec\}a\}b+\overbrace{\{da\}\{ec\}b}^{a(e+c)}-\overbrace{d\{\{ec\}b\}a}^{ab}-\overbrace{\{d\,b\}\{ec\}a}^{b(a+c+e)}+d\{ec\}\{ab\}.
\end{aligned}
$$

Обозначая $s_{i,j}$, как в теореме 1 (теперь это $5i+j$, $i=0,\dots,11$, $j=1,\dots,5$), получим, что следующие суммы равны нулю по антикоммутативности:

$$s_{61}+s_{10,3};\quad s_{81}+s_{63};\quad s_{10,1}+s_{83};\quad s_{12}+s_{12,5};\quad s_{22}+s_{75};\quad s_{32}+s_{55};$$

$$s_{15}+s_{62};\quad s_{35}+s_{65};\quad s_{25}+s_{85};\quad s_{14}+s_{11,5};\quad s_{24}+s_{95};\quad s_{34}+s_{45},$$

последующие — по антикоммутативности и тождеству Якоби:

$$s_{11}+s_{51}+s_{73};\quad s_{21}+s_{53}+s_{12,1};\quad s_{31}+s_{71}+s_{12,3};$$

$$s_{41}+s_{13}+s_{93};\quad s_{91}+s_{33}+s_{11,3};\quad s_{11,1}+s_{23}+s_{43},$$

и последние — либо из условия $\operatorname{char}F=2$, либо по антикоммутативности и тождеству (2):

$$s_{44}+s_{54}+s_{64}+s_{10,2}+s_{11,2}+s_{12,2}; \tag{8}$$

$$s_{72}+s_{82}+s_{92}+s_{10,4}+s_{11,4}+s_{12,4}; \tag{9}$$

$$s_{42}+s_{52}+s_{10,5}+s_{74}+s_{84}+s_{94}. \tag{10}$$

Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{12}\sum\limits_{j=1}^{5}s_{i,j}=0$, что и доказывает теорему. $\square$

Заметим, что в силу (8)–(10) утверждение теоремы остается справедливым и для более ослабленного тождества на алгебре Пуассона

$$
\begin{aligned}
a(\{be\}\{cd\}+\{bc\}\{de\}+\{bd\}\{ec\})+b(\{ad\}\{ce\}+\{ae\}\{dc\}+\{ac\}\{ed\})&\\
+c(\{ad\}\{eb\}+\{ae\}\{bd\}+\{ab\}\{de\})&=0,
\end{aligned}
$$

в частности, для тождества

$$(\{ab\}\{cd\}+\{ca\}\{bd\}+\{bc\}\{ad\})e=0.$$

Теорема 3. *Пусть $(A;\cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра, на которой также определены антикоммутативная операция $\{\ ,\ \}$ и инволюция $\tilde{}$ относительно обеих операций. Предположим, что на A также выполнены тождества*

$$(\{ab\}c+\{ca\}b+\{bc\}a)\{ed\}=0, \tag{11}$$

$$a\{b\{ed\},c\}-b\{a\{ed\},c\}+\{ab\}\{ed\}c=0, \tag{12}$$

$$(\{\{ab\}d,c\}+\{\{ca\}d,b\}+\{\{bc\}d,a\})c=0. \tag{13}$$

Определим на A тернарную операцию $[\ ,\ ,\ ]$ правилом

$$[x,y,z]=\{x,y\}\tilde{z}+\{z,x\}\tilde{y}+\{y,z\}\tilde{x}. \tag{14}$$

Тогда $(A;[\ ,\ ,\ ])$ является тернарной алгеброй Филиппова.

Доказательство. Антикоммутативность операции $[\ ,\ ,\ ]$ следует из определения данной операции. Для любых $a,b,c,e,d\in A$ имеем

$$\begin{aligned}[][a,b,c],e,d]&=[\{a,b\}\tilde{c}+\{c,a\}\tilde{b}+\{b,c\}\tilde{a},e,d]\\&=\tilde{d}(\{\{a,b\}\tilde{c},e\}+\{\{c,a\}\tilde{b},e\}+\{\{b,c\}\tilde{a},e\})\\&+\tilde{e}(\{d,\{a,b\}\tilde{c}\}+\{d,\{c,a\}\tilde{b}\}+\{d,\{b,c\}\tilde{a}\})\\&\qquad+\{e,d\}(\{\tilde{b},\tilde{a}\}c+\{\tilde{a},\tilde{c}\}b+\{\tilde{c},\tilde{b}\}a).\end{aligned}$$

Рассмотрим тождество Филиппова (4). Слагаемые из (4) получаем из предыдущего равенства, используя последовательные замены:

$$\begin{pmatrix}b&c&e&d\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\d&e&b&c\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}a&c&e&d\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\e&d&c&a\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}a&b&e&d\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\d&e&a&b\end{pmatrix}.$$

В силу антикоммутативности якобиана (т. е. левой части (4)) по a,b,c и по d,e достаточно рассмотреть слагаемые, содержащие $\tilde{d}$ и $\tilde{c}$, потом — $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ и в конце — $\tilde{e}$ и $\tilde{d}$.

В первом случае имеем

$$\tilde{d}\{\{a,b\}\tilde{c},e\}+\tilde{c}\{\{e,a\}\tilde{d},b\}+\tilde{c}\{a,\{e,b\}\tilde{d}\}+\{\tilde{d},\tilde{c}\}e\{a,b\},$$

что равно нулю по тождествам (12) и (13).

Во втором случае по (12) получаем

$$\{e,d\}\{\tilde{b},\tilde{a}\}c+\tilde{b}\{c,\{d,e\}\tilde{a}\}+\tilde{a}\{\{d,e\}\tilde{b},c\}=0.$$

В третьем случае из (11) следует, что

$$\{b,c\}\{\tilde{e},\tilde{d}\}a+\{c,a\}\{\tilde{e},\tilde{d}\}b+\{a,b\}\{\tilde{e},\tilde{d}\}c=0.$$

Полученные равенства доказывают теорему. $\square$

Заметим, что на $(A;[\ ,\ ,\ ])$ определена «индуцированная инволюция» $\tilde{}$ такая, что $\widetilde{[x,y,z]}=[\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}]$.

Следствие 1. *Пусть $(A;\cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра, на которой определены антикоммутативная скобка $\{\ ,\ \}$ и инволюция $\tilde{}$ относительно обеих операций. Предположим, что на A также выполнены тождества*

$$\{ab\}c + \{ca\}b + \{bc\}a = 0, \tag{15}$$

$$a\{bx, y\} - b\{ax, y\} + \{a, b\}xy = 0, \tag{16}$$

$$\{\{ab\}x, c\} + \{\{ca\}x, b\} + \{\{bc\}x, a\} = 0. \tag{17}$$

Определим на A тернарную операцию $[\ ,\ ,\ ]$ правилом

$$[x, y, z] = \{x, y\}\tilde{z} + \{z, x\}\tilde{y} + \{y, z\}\tilde{x}.$$

Тогда $(A; [\ ,\ ,\ ])$ является тернарной алгеброй Филиппова.

Доказательство. Легко видеть, что (11)–(13) следуют из (15)–(17). □

Рассмотрим тождество

$$2\{a, b\}c = \{a, bc\} + \{ac, b\}. \tag{18}$$

Заметим, что (15) и (18) влекут (16). Действительно, имеем

$$\{bx, y\}a = -\{a, bx\}y - \{y, a\}xb,$$

$$\{y, ax\}b = -\{ax, b\}y - \{b, y\}ax.$$

Складывая данные равенства, получаем

$$\{bx, y\}a + \{y, ax\}b = -x(\{y, a\}b + \{b, y\}a) - y(\{a, xb\} + \{ax, b\})$$
$$= \{ab\}xy - 2\{ab\}xy = -\{ab\}xy.$$

Также отметим, что при наличии (15) и (18) тождество (17) эквивалентно тождеству Фаркаса — достаточно сложить следующие равенства:

$$\{\{ab\}x, c\} = \{c\{ab\}, x\} + 2\{ab\}\{xc\},$$

$$\{\{ca\}x, b\} = \{b\{ca\}, x\} + 2\{ca\}\{xb\},$$

$$\{\{bc\}x, a\} = \{a\{bc\}, x\} + 2\{bc\}\{xa\}.$$

При этом если характеристика равна 2, то из (15) следует (17).

Таким образом, получаем

Следствие 2. *Пусть $(A;\cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра, на которой определены антикоммутативная скобка $\{\ ,\ \}$ и инволюция $\tilde{}$ относительно обеих операций. Предположим, что на A выполнены тождества (15) и (18), а также тождество Фаркаса. Определим на A тернарную операцию $[\ ,\ ,\ ]$ правилом*

$$[x, y, z] = \{x, y\}\tilde{z} + \{z, x\}\tilde{y} + \{y, z\}\tilde{x}.$$

Тогда $(A; [\ ,\ ,\ ])$ является тернарной алгеброй Филиппова.

Следствие 3 [3]. *Пусть $(A;\cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с инволюцией $\tilde{}$ и дифференцированием D таким, что $D(\tilde{x}) = -\widetilde{D(x)}$ для любого $x \in A$. Определим на A скобку $\{\ ,\ \}$ правилом $\{x, y\} = xD(y) - yD(x)$ и тернарную операцию $[\ ,\ ,\ ]$:*

$$[x, y, z] = \{x, y\}\tilde{z} + \{z, x\}\tilde{y} + \{y, z\}\tilde{x}.$$

Тогда $(A; [\ ,\ ,\ ])$ является тернарной алгеброй Филиппова.

Доказательство. Легко проверить, что $\{\ ,\ \}$ является скобкой Ли на A и выполнены все предположения следствия 2. □

§ 2. Простые тернарные алгебры Филиппова

В данном параграфе покажем, что из конструкции алгебры A_D получаются все известные к настоящему моменту простые тернарные алгебры Филиппова.

Рассмотрим следующую алгебраическую систему. Пусть $(G;+)$ — абелева группа. Рассмотрим векторное пространство $A_G = \langle e_g : g \in G\rangle$ над полем F. Зафиксируем $\mu, \xi \in G$ и два аддитивных отображения $h_i : G \mapsto F$, $i = 1, 2$. Определим на A_G две бинарные операции $\cdot$ и $\{\,,\}$ правилами

$$e_a \cdot e_b = e_{a+b+\xi}, \tag{19}$$

$$\{e_a, e_b\} = h(a, b)e_{a+b+\mu}, \tag{20}$$

где $h(a, b)$ — определитель матрицы $\begin{pmatrix} h_1(a) & h_1(b) \\ h_2(a) & h_2(b) \end{pmatrix}$.

Полученную алгебраическую систему $(A_G; +, \cdot, \{\,,\})$ обозначим через A.

Лемма 1. *В алгебре A выполняется тождество Якоби.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&\{\{e_a, e_b\}, e_c\} + \{\{e_c, e_a\}, e_b\} + \{\{e_b, e_c\}, e_a\} \\
&= (h(a, b)h(a + b + \mu, c) + h(c, a)h(c + a + \mu, b) + h(b, c)h(b + c + \mu, a))e_{a+b+c+2\mu} \\
&\qquad = (h(a, b)h(\mu, c) + h(c, a)h(\mu, b) + h(b, c)h(\mu, a))e_{a+b+c+2\mu} = 0,
\end{aligned}$$

что следует из равенства $h(a, b)h(\mu, c) + h(c, a)h(\mu, b) + h(b, c)h(\mu, a) = 0$ для любых $a, b, c \in G$. $\square$

Пусть h — отображение из G в пространство строк F_2, заданное правилом $h(a) = (h_1(a), h_2(a))$. Будем говорить, что *ранг h равен* 2, если существуют $a, b \in G$ такие, что $h(a)$ и $h(b)$ линейно независимы (обозначение: $r(h) = 2$).

Лемма 2. *Пусть $r(h) = 2$. На A выполняется тождество Лейбница тогда и только тогда, когда $h(\xi) = 0$.*

Доказательство. Пусть $d := a + b + c + \xi + \mu$, где $a, b, c \in G$. Имеем

$$\{e_a \cdot e_b, e_c\} = \{e_{a+b+\xi}, e_c\} = h(a + b + \xi, c)e_d,$$

$$\{e_a, e_c\} \cdot e_b = h(a, c)e_{a+c+\mu} \cdot e_b = h(a, c)e_d, \quad \{e_b, e_c\} \cdot e_a = h(b, c)e_d,$$

откуда следует, что на A выполняется тождество Лейбница тогда и только тогда, когда $h(\xi, c) = 0$ для любого $c \in G$. Так как $r(h) = 2$, последнее эквивалентно равенству $h(\xi) = 0$. $\square$

Лемма 3. *В алгебре A выполняется тождество Фаркаса.*

Доказательство. Пусть $x = e_a$, $y = e_b$, $z = e_c$, $u = e_d$, $a, b, c, d \in G$. Тогда (2) эквивалентно равенству $h(a, b)h(c, d) + h(c, a)h(b, d) + h(b, c)h(a, d) = 0$, истинность которого заметили в лемме 1. $\square$

Зафиксируем аддитивное отображение $h_3 : G \mapsto F$. Пусть $\bar{h}$ — отображение из G в пространство строк F_3, заданное правилом $\bar{h}(a) = (h_1(a), h_2(a), h_2(a))$. Будем говорить, что *ранг $\bar{h}$ равен* 3, если существуют $a, b, c \in G$ такие, что $h(a), h(b)$ и $h(c)$ линейно независимы (обозначение: $r(\bar{h}) = 3$). Зафиксируем $\theta \in G$ и определим на A линейное отображение D, задав его на базисе правилом

$$D(e_a) = h_3(a)e_{a+\theta}.$$

Лемма 4. *Пусть $r(\bar{h}) = 3$. Отображение D является дифференцированием на A относительно операций (19) и (20) тогда и только тогда, когда $h_1(\theta) = h_2(\theta) = 0$, $h_3(\mu) = 0$, $h_3(\xi) = 0$.*

Доказательство. Имеем

$$D(e_a \cdot e_b) = D(e_a) \cdot e_b + e_a \cdot D(e_b) \iff h_3(\xi)e_{a+b+\theta+\xi} = 0 \iff h_3(\xi) = 0.$$

Далее

$$D(\{e_a, e_b\}) = (h_3(a) + h_3(b) + h_3(\mu))h(a,b)e_{a+b+\mu+\theta},$$

$$\{D(e_a), e_b\} = \{h_3(a)e_{a+\theta}, e_b\} = h_3(a)h(a+\theta, b)e_{a+b+\theta+\mu},$$

$$\{e_a, D(e_b)\} = \{e_a, h_3(b)e_{b+\theta}\} = h_3(b)h(a, b+\theta)e_{a+b+\theta+\mu},$$

откуда $h_3(\mu)h(a,b) = \left|\begin{pmatrix} h_1(\theta) & h_3(a)h_1(b) - h_3(b)h_1(a) \\ h_2(\theta) & h_3(a)h_2(b) - h_3(b)h_2(a) \end{pmatrix}\right|$ тогда и только тогда, когда D является дифференцированием операции (20), а первое эквивалентно тому, что

$$\left|\begin{pmatrix} h_1(a) & h_1(b) & -h_1(\theta) \\ h_2(a) & h_2(b) & -h_2(\theta) \\ h_3(a) & h_3(b) & h_3(\mu) \end{pmatrix}\right| = 0.$$

Таким образом, если $(h_1(\theta), h_2(\theta), h_3(\mu)) \neq 0$, то существуют $a, b \in G$ такие, что последний определитель не равен нулю. $\square$

Для простоты получаемой тернарной алгебры Филиппова необходимо, чтобы алгебра Пуассона была D-простой. Как следует из [4], достаточным условием являются существование в $G \setminus \{\xi\}$ трех элементов ранга 3 и инъективность отображения $\bar{h}$ (G — элементарная абелева p-группа (или группа без кручения)), откуда и следует простота A_D.

В заключение данного параграфа покажем, что предложенная конструкция позволяет получить все известные к настоящему времени простые тернарные алгебры Филиппова, список которых исчерпывается алгебрами $A(h,t)$, $E(h,t,\mathscr{J})$, A_4 (см. [4]). Напомним определение тернарной алгебры $A(h,t)$.

Пусть F — поле, $(G;+)$ — ненулевая абелева группа. Обозначим через $A_G = \langle e_a : a \in G\rangle$ линейное пространство над F. Зафиксируем $t \in G$ и определим на A_G тернарную операцию

$$[e_a, e_b, e_c] = h(a,b,c)e_{a+b+c+t},$$

где $h : G^3 \mapsto F$ — кососимметрическое полилинейное отображение, заданное правилом

$$h(a,b,c) := \begin{vmatrix} h_1(a) & h_1(b) & h_1(c) \\ h_2(a) & h_2(b) & h_2(c) \\ h_3(a) & h_3(b) & h_3(c) \end{vmatrix}$$

для некоторых аддитивных отображений $h_1, h_2, h_3 : G \mapsto F$. Полученную тернарную алгебру Филиппова (см. [4]) обозначим через $\bar{A}(h,t)$. Простые тернарные алгебры Филиппова $A(h,t)$, $E(h,t,\mathscr{J})$, A_4 получаются как подалгебры и фактор-алгебры алгебры $\bar{A}(h,t)$ (см. [4, 5]). Как видно из определения $\bar{A}(h,t)$, данная алгебра выводится из предложенной конструкции алгебры A_D, а алгебра $E(h,t,\mathscr{J})$ аналогично — из конструкции алгебры A_D, когда D — тождественное отображение.

§ 3. Простые супералгебры Филиппова характеристики 2

Из теоремы 2 следует, что по любой супералгебре Пуассона характеристики 2 можно построить тернарную супералгебру Филиппова характеристики 2. Как легко видеть, для простоты полученной тернарной супералгебры Филиппова необходима простота супералгебры Пуассона.

Рассмотрим простую супералгебру Грассмана Γ_n (с единицей 1) от нечетных порождающих $x_1, \dots, x_n$. Скобка Пуассона на Γ_n определяется следующим образом:

$$\{f, g\} := (-1)^f \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Определим на векторном суперпространстве алгебры Γ_n тернарную операцию правилом

$$[f, g, h] := \{f, g\} \cdot h - (-1)^{gh}\{f, h\} \cdot g + f \cdot \{g, h\}.$$

Обозначим полученную тернарную супералгебру над полем F через $A{=}A_F(\Gamma_n)$.

Теорема 4. *Пусть характеристика $A = A_F(\Gamma_n)$ не равна 3 и $n \geq 2$. Тогда A является простой тернарной антикоммутативной супералгеброй. В случае характеристики 3 при $n \geq 3$ алгебра $[A, A, A]$ проста, при $n = 2$ фактор-алгебра $[A, A, A]$ по идеалу $F \cdot 1$ проста.*

Доказательство. Пусть I — ненулевой идеал в A. Рассмотрим ненулевой элемент

$$a = \sum_{i_1 \dots i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} \in I, \quad \alpha_{i_1 \dots i_k} \in F. \tag{21}$$

Тогда $a = b + c$, где c — произвольное слагаемое максимальной длины из представления (21) элемента a (считаем, что запись элемента несократима и ненулевой моном $x_{i_1} \dots x_{i_d}$ по определению имеет длину d). Пусть $c = x_{i_1} \dots x_{i_m}$, где предполагаем $m \geq 1$, так как целью в настоящий момент является доказательство включения $1 \in I$. Имеем $[1, a, f] \in I$ для любого $f \in A$, т. е. $\{a, f\} \in I$ для любого $f \in \Gamma_n$. Полагая $f = x_{i_1}$, получаем $a_1 + x_{i_2} \dots x_{i_m} \in I$, где все слагаемые из a_1 не содержат x_{i_1}, не совпадают с $x_{i_2} \dots x_{i_m}$ (с точностью до элемента из F) и имеют длину $\leq m - 1$. Продолжая так далее последовательно с $x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$, получаем $1 \in I$. Но тогда $[1, f, g] = \{f, g\} \in I$ для любых $f, g \in \Gamma_n$. В частности, $-\{x_i, x_i x_j\} = x_j \in I$ для любого $j = 1, \dots, n$. Тем самым для любого монома $h := x_{i_1} \dots x_{i_k}$ имеем $[x_{i_1}, x_{i_1}, h] = -3h \in I$, откуда $I = A$.

В характеристике 3 имеем $A^{(1)} = [A, A, A] \subsetneqq A$, так как иначе должны существовать мономы f, g, h такие, что $f = x_1 f_1$, $g = x_1 g_1$, $h = x_1 h_1$ и $x_1 f_1 g_1 h_1 = x_1 \dots x_n$. Но тогда $[f, g, h] = 3(-1)^{l+1} x_1 f_1 g_1 h_1 = 0$; противоречие. Если $n \geq 3$, то, как и выше,

$$\{x_n x_2, x_n x_1 x_3 \dots x_{n-1}\} = -x_1 \dots x_{n-1} \in I,$$

$$\{x_i, x_1 \dots x_{n-1}\} = \pm x_1 \dots \overset{\wedge}{x_i} \dots x_{n-1} \in I, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\{x_i, x_1 \dots \overset{\wedge}{x_j} \dots x_{n-1}\} = \pm x_1 \dots \overset{\wedge}{x_i} \dots \overset{\wedge}{x_j} \dots x_{n-1} \in I, \quad 1 \leq i \neq j \leq n-1,$$

и т. д., откуда получаем, что $A^{(1)}$ является простой супералгеброй.

При $n = 2$ в случае поля характеристики 3 имеем $[A, A, A] \subsetneqq A$ и $F \cdot 1$ — идеал в $[A, A, A]$, фактор по которому прост. $\square$

Из теорем 2 и 4 непосредственно получаем

Следствие 4. *Пусть характеристика $A = A_F(\Gamma_n)$ равна 2 и $n \geq 2$. Тогда A является простой тернарной (супер)алгеброй Филиппова размерности 2^n.*

Все известные к настоящему времени простые конечномерные n-арные алгебры Филиппова имеют размерности $n+1$, p^n-1, p^n-2, p^{n-1}, $p^{n-1}-1$, где p — характеристика основного поля, если поле имеет ненулевую характеристику [4]. Простых нетривиальных (т. е. с нетривиальной нечетной частью) супералгебр Филиппова на данный момент не было известно. Известно, что над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 конечномерных простых нетривиальных супералгебр Филиппова не существует [6]. Таким образом, получен пример новой простой конечномерной тернарной (супер)алгебры Филиппова характеристики 2. При $n = 1$ в $A = A_F(\Gamma_n)$ есть нетривиальный одномерный идеал $I = F \cdot 1$, но фактор-алгебра A/I уже является простой. Тем самым получаем пример новой простой одномерной тернарной супералгебры Филиппова характеристики 2 с тривиальной четной частью. (Если поле произвольно, то супералгебра будет также проста, если характеристика отлична от 3.)

Легко заметить, что тождество (2) на Γ_n при $n \geq 1$ не выполняется, если характеристика основного поля не равна 3. Действительно, достаточно положить $x = y = z = u = x_1$. Также легко видеть, что A (при $n \geq 1$) из теоремы 4 является тернарной простой супералгеброй Филиппова тогда и только тогда, когда характеристика A равна 2.

Используя описание тождеств степени 2 антикоммутативных тернарных алгебр из [7] и пример 2, легко показать, что если A — это свободная алгебра Пуассона, то любое тождество степени 2 тернарной алгебры A_D, где D — тождественное отображение, является следствием антикоммутативности.

Отметим, что основные результаты § 1, 2 докладывались автором на конференции «Алгебра и логика: теория и приложения» (Россия, Красноярск, 21–27 июля 2013 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Farkas D. R.* Poisson polynomial identities // Commun. Algebra. 1998. V. 26, N 2. P. 401–416.
2. *Кантор И. Л.* Йорданова и лиева супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона // Тр. второй сибирской школы «Алгебра и анализ». Томск: Томск. гос. ун-т, 1990. С. 89–125.
3. *Bai R., Wu Y.* Constructing 3-Lie algebras // http://arxiv.org/pdf/1306.1994.pdf.
4. *Пожидаев А. П.* О простых n-лиевых алгебрах // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 334–353.
5. *Pojidaev A. P.* Enveloping algebras of Filippov algebras // Commun. Algebra. 2003. V. 31, N 2. P. 883–900.
6. *Cantarini N., Kac V. G.* Classification of simple linearly compact n-Lie superalgebras // Commun. Math. Phys. 2010. V. 298. P. 833–853.
7. *Bremner M.* Varieties of anticommutative n-ary algebras // J. Algebra. 1997. V. 191, N 1. P. 76–88.

Статья поступила 8 октября 2014 г.

Пожидаев Александр Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
app@math.nsc.ru