Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 512.54

О КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ С АВТОМОРФИЗМАМИ НЕКОПРОСТОГО ПОРЯДКА ПОЧТИ БЕЗ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Е. И. Хухро

Аннотация. Доказывается, что если конечная p-разрешимая группа G допускает автоморфизм φ порядка p^n, имеющий не более m неподвижных точек на каждой φ-инвариантной элементарной абелевой p'-секции группы G, то p-длина группы G ограничена сверху в терминах p^n и m; если вдобавок группа G разрешима, то высота Фиттинга группы G ограничена сверху в терминах p^n и m. Доказывается также, что если конечная разрешимая группа G допускает автоморфизм ψ порядка $p^a q^b$ для некоторых простых чисел p, q, то высота Фиттинга группы G ограничена сверху в терминах $|\psi|$ и $|C_G(\psi)|$.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, автоморфизм, p-длина, высота Фиттинга.

Юрию Леонидовичу Ершову по случаю его 75-летия

1. Введение

Изучение групп с автоморфизмами «почти без неподвижных точек» означает получение ограничений на строение групп в зависимости от их автоморфизмов и определенных ограничений, налагаемых на подгруппы неподвижных точек. В данной работе мы рассматриваем вопросы ограничения p-длины и высоты Фиттинга конечных p-разрешимых и разрешимых групп, допускающих автоморфизмы некопростого порядка почти без неподвижных точек.

Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut} G$ — автоморфизм конечной группы G. Изучение строения группы G в зависимости от φ и подгруппы неподвижных точек $C_G(\varphi)$ является одним из наиболее важных и плодотворных путей в теории конечных групп. Прославленные теорема Брауэра — Фаулера [1] (ограничивающая индекс разрешимого радикала в терминах порядка $|C_G(\varphi)|$ в случае $|\varphi| = 2$) и теорема Томпсона [2] (дающая нильпотентность группы G, когда φ имеет простой порядок и действует без неподвижных точек, т. е. $C_G(\varphi) = 1$) лежат в основаниях классификации конечных простых групп. Классификация использовалась для получения дальнейших результатов о разрешимости группы G или подходящей «большой» подгруппы. Например, используя классификацию, Хартли [3] обобщил теорему Брауэра — Фаулера на любой порядок автоморфизма φ: группа

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14–21–00065).

G обладает разрешимой подгруппой индекса, ограниченного в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$.

Теперь предположим, что группа G разрешима. Дальнейшая информация о строении группы G ищется прежде всего в виде ограничений на высоту Фиттинга (нильпотентную длину). Ограничение высоты Фиттинга естественно сводит дальнейшие исследования к случаю нильпотентных групп с автоморфизмами (почти) без неподвижных точек, для которых, в свою очередь, возникают задачи ограничения ступени разрешимости или нильпотентности группы, или подходящей «большой» подгруппы. Такие ограничения для нильпотентных групп пока получены в случаях, когда φ простого порядка или порядка 4, в [4–9]. Кроме того, общие результаты решающего значения получены в изучении p-автоморфизмов, действующих почти без неподвижных точек на конечных p-группах [10–15].

Особенно сильные результаты по ограничению высоты Фиттинга получены в случае разрешимых групп автоморфизмов $A \leq \operatorname{Aut} G$ копростого порядка. Томпсон [16] доказал, что если обе группы G и A разрешимы и имеют копростые порядки, то высота Фиттинга группы G ограничена в терминах высоты Фиттинга подгруппы $C_G(A)$ и числа $\alpha(A)$ простых сомножителей в $|A|$ с учетом кратностей. Позднее оценки в теореме Томпсона улучшались в многочисленных работах и окончательные результаты были получены Туруллом [17] и Хартли и Айзексом [18].

Случай некопростых порядков групп G и $A \leq \operatorname{Aut} G$ более трудный. Белл и Хартли [19] построили примеры, показывающие, что для любой ненильпотентной конечной группы A имеются разрешимые группы G произвольной высоты Фиттинга, допускающие A в качестве группы автоморфизмов без неподвижных точек. Но если A нильпотентна и $C_G(A) = 1$, то высота Фиттинга группы G ограничена в терминах $\alpha(A)$ в силу частного случая теоремы Дэйда [20]. В ситуации почти без неподвижных точек даже для циклической группы автоморфизмов $\langle\varphi\rangle \leq \operatorname{Aut} G$ все еще открыта задача: получить ограничение для высоты Фиттинга конечной разрешимой группы G в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$ (этот вопрос эквивалентен записанному Беляевым в «Коуровской тетради» [21] как задача Хартли 13.8(a)). Кроме случая без неподвижных точек теоремы Дэйда пока единственные случаи, где известно положительное решение, — это случай автоморфизмов примарного порядка p^n (Хартли и Турау [22]) и случай бипримарного порядка $p^a q^b$ (обсуждаемый в настоящей работе).

Другим обобщением автоморфизмов без неподвижных точек в некопростом случае является задача Томпсона об ограничении p-длины конечной p-разрешимой группы G, допускающей p-группу автоморфизмов P, действующую без неподвижных точек на каждой P-инвариантной p'-секции группы G. Раэ [23] и Хартли и Раэ [24] положительно решили эту задачу для $p \neq 2$, а также для циклической группы P при любом p. Частным случаем этой задачи является случай, когда p-разрешимая группа G допускает так называемый p^n-расщепляющий автоморфизм φ, что означает, что $xx^{\varphi}x^{\varphi^2}\cdots x^{\varphi^{p^n-1}} = 1$ для всех $x \in G$ (отсюда также следует $\varphi^{p^n} = 1$); тогда, конечно, φ автоматически действует без неподвижных точек на φ-инвариантных p'-секциях. Этот случай рассматривался на самом деле ранее Курцвайлем [25], который получил оценки высоты Фиттинга разрешимой группы G, и эти оценки были улучшены до линейных Майкснером [26]. Если известно только, что φ индуцирует p^n-расщепляющий автоморфизм на φ-инвариантной силовской p-подгруппе группы G, то уже получается ограничение в терминах n на p-длину группы G: при $p \neq 2$ такое ограничение было получено Уилсоном [27], а для всех простых чисел p в работе [28] — даже при более слабом условии.

В данной работе рассматриваем естественное обобщение задачи Томпсона для p-разрешимой группы G, допускающей автоморфизм φ порядка p^n, в котором условие, что φ действует без неподвижных точек на φ-инвариантных p'-секциях, заменяется тем, что φ действует почти без неподвижных точек на этих секциях. На самом деле достаточно налагать ограничение на число неподвижных точек автоморфизма φ только на элементарные абелевы φ-инвариантные p'-секции.

Теорема 1.1. *Если конечная p-разрешимая группа G допускает автоморфизм φ порядка p^n, имеющий не более m неподвижных точек на каждой φ-инвариантной элементарной абелевой p'-секции группы G, то p-длина группы G ограничена сверху в терминах p^n и m.*

Было бы интересно получить оценку p-длины в терминах n (или хотя бы в терминах p^n) для некоторой подгруппы индекса, ограниченного в терминах p^n и m.

Замечание 1.2. Имеется определенная аналогия с описанной выше ситуацией для p^n-расщепляющего автоморфизма. А именно, если для p-разрешимой группы G с автоморфизмом φ порядка p^n вместо ограничения на число неподвижных точек на p'-секциях имеется ограничение $|C_P(\varphi)| = p^m$ на число неподвижных точек автоморфизма φ в φ-инвариантной силовской p-подгруппе P, то также получаем оценку p-длины группы G. В самом деле, тогда ступень разрешимости группы P ограничена в терминах p, n и m по теореме Шалева [12], так что оценка на p-длину немедленно вытекает из теорем Холла — Хигмэна [29] при $p \neq 2$ и теорем Хоаре [30], Бергера и Гросса [31] и Е. Г. Брюхановой [32]. Более того, в силу [13] группа P даже обладает (нормальной) подгруппой индекса, ограниченного в терминах p, n и m, которая разрешима p^n-ограниченной ступени. Поэтому по теореме Холла — Хигмэна — Хартли 2.3 (см. ниже) имеется характеристическая подгруппа H группы G такая, что p-длина H p^n-ограничена, а силовская p-подгруппа фактор-группы G/H имеет порядок, ограниченный в терминах p, n и m.

Для разрешимых групп теорема 1.1 в сочетании с известными результатами дает оценку высоты Фиттинга.

Следствие 1.3. *Если конечная разрешимая группа G допускает автоморфизм φ порядка p^n, имеющий не более m неподвижных точек на каждой φ-инвариантной p'-секции группы G, то высота Фиттинга группы G ограничена сверху в терминах p^n и m.*

Техника, используемая в доказательстве теоремы 1.1, применяется также в доказательстве разрешимого случая следующей теоремы об автоморфизме бипримарного порядка почти без неподвижных точек; сведение же к разрешимому случаю дает теорема Хартли [3] (основанная на классификации конечных простых групп).

Теорема 1.4. *Если конечная группа G допускает автоморфизм φ порядка p^aq^b для каких-то простых чисел p, q и неотрицательных целых a, b, то она обладает разрешимой подгруппой, у которой индекс и высота Фиттинга ограничены сверху в терминах p^aq^b и $|C_G(\varphi)|$.*

Стандартные рассуждения об обратном пределе дают следствие для локально конечных групп.

Следствие 1.5. *Если локально конечная группа G содержит элемент g порядка $p^a q^b$ для каких-то простых чисел p, q и неотрицательных целых a, b с конечным централизатором $C_G(g)$, то G обладает подгруппой конечного индекса, у которой есть конечный нормальный ряд с локально нильпотентными факторами.*

Еще одно следствие более технического характера, но оно может быть полезным в дальнейших исследованиях.

Следствие 1.6. *Если конечная группа G допускает автоморфизм φ, для которого имеется не более двух общих простых делителей чисел $|\varphi|$ и $|G|$, то группа G обладает разрешимой подгруппой, у которой индекс и высота Фиттинга ограничены сверху в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$.*

Замечание 1.7. После того, как данная статья была подготовлена к публикации, автору стала известна неопубликованная рукопись Брайана Хартли, которая содержит результат теоремы 1.4; автор вместе с А. Боровиком и П. Шумяцким опубликовал эту рукопись как [33] на веб-сайте университета Манчестера.

2. Предварительные сведения

Индуцированные автоморфизмы инвариантных секций обозначаются теми же буквами. Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2.1. *Если φ — автоморфизм конечной группы G, а N — нормальная φ-инвариантная подгруппа, то $|C_{G/N}(\varphi)| \leq |C_G(\varphi)|$.*

Следующая лемма является также хорошо известным следствием рассмотрения жордановой формы линейного преобразования порядка p^k в характеристике p.

Лемма 2.2. *Если элементарная абелева p-группа P допускает автоморфизм φ порядка p^k такой, что $|C_P(\varphi)| = p^m$, то ранг группы P ограничен в терминах p^k и m.*

Мы используем следующее следствие теорем типа Холла — Хигмэна из работы Хартли [34].

Теорема 2.3 (Холл, Хигмэн, Хартли). *Пусть P — силовская p-подгруппа p-разрешимой группы G. Если R — нормальная подгруппа группы P и ступень разрешимости группы R равна d, то $R \leq O_{p',p,p',\dots,p',p}(G)$, где p встречается в правой части d раз, если $p > 3$, $2d$ раз, если $p = 3$, и $3d$ раз, если $p = 2$.*

Доказательство. Уточняя некоторые теоремы Холла — Хигмэна [29], Хартли [34] доказал, что если A — абелева нормальная подгруппа силовской p-подгруппы из G, то

$$A \leq O_{p',p}(G), \text{ если } p > 3, \quad A \leq O_{3',3,3',3}(G), \text{ если } p = 3,$$

$$A \leq O_{2',2,2',2,2'2}(G), \text{ если } p = 2.$$

Результат следует из этих включений для $A = R^{(d-1)}$ несложной индукцией по ступени разрешимости d. $\square$

Теперь напомним некоторые определения и обозначения из теории представлений. Если V — kG-модуль для поля k и группы G, используем правую операторную запись vg для $v \in V$ и $g \in G$. Мы используем централизаторные обозначения для неподвижных точек типа $C_V(g) = \{v \in V \mid vg = v\}$. Также используем коммутаторные обозначения $[v, g] = -v + vg$ для $v \in V$ и $g \in G$. Коммутаторные подпространства определяются соответственно: если $B \leq G$, то $[V, B]$ натянуто на все коммутаторы $[v, b]$, где $v \in V$ и $b \in B$. Подпространство $[V, B]$ совпадает со взаимным коммутантом $[V, B]$ в естественном полупрямом произведении VG, когда V рассматривается как аддитивная группа, на которой действует G. В частности, $[V, B]$ является B-инвариантным и потому может рассматриваться как kB-подмодуль.

Для группы G и поля k свободный kG-модуль ранга n — это прямая сумма n копий групповой алгебры kG, каждая из которых рассматривается как векторное пространство над k размерности $|G|$ с базисом $\{b_g \mid g \in G\}$, помеченным элементами группы G, на котором G действует в регулярном подстановочном представлении: $b_g h = b_{gh}$. Другими словами, свободный kG-модуль $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ — это прямая сумма подпространств, регулярно переставляемых группой G так, что $V_g h = V_{gh}$.

Следующая лемма известна в литературе (см., например, [22, лемма 4.5]), но мы приводим ее доказательство для полноты изложения.

Лемма 2.4. *Предположим, что на абелевой p-группе M действует циклическая группа $\langle\varphi\rangle$ порядка p^n и V — $kM\langle\varphi\rangle$-модуль для поля k характеристики q, отличной от p. Если подгруппа $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ действует нетривиально на V, то подпространство $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ является свободным $k\langle\varphi\rangle$-модулем.*

Здесь, конечно, $\varphi^{p^{n-1}} = \varphi$, если $n = 1$.

Доказательство. Ясно, что подпространство $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ $M\langle\varphi\rangle$-инвариантно, так что оно является $kM\langle\varphi\rangle$-модулем. Расширим основное поле до его алгебраического замыкания $\bar{k}$ и обозначим через $W = V \otimes_k \bar{k}$ получившийся $\bar{k}M\langle\varphi\rangle$-модуль. Тогда $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ есть $\bar{k}M\langle\varphi\rangle$-модуль, полученный из $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ расширением поля.

Так как характеристика q основного поля взаимно проста с $|M\langle\varphi\rangle|$, по теореме Машке
$$W = C_W([M, \varphi^{p^{n-1}}]) \oplus [W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$$
является вполне приводимым $\bar{k}M\langle\varphi\rangle$-модулем. Пусть U — неприводимый $\bar{k}M\langle\varphi\rangle$-подмодуль модуля $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$, на котором $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ действует нетривиально.

По теореме Клиффорда $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ разлагается на однородные $\bar{k}M$-подмодули U_i (компоненты Веддерберна). Группа $\langle\varphi\rangle$ транзитивно переставляет подмодули U_i. Если ядро этого подстановочного действия было бы нетривиально, то $\varphi^{p^{n-1}}$ стабилизировал бы все U_i. Но абелева группа M действует скалярными преобразованиями на каждой однородной компоненте U_i. Отсюда следует, что группа $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ действовала бы тривиально на каждой U_i и потому на U вопреки нашему предположению. Итак, U — свободный $\bar{k}\langle\varphi\rangle$-модуль.

Поскольку $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ — прямая сумма таких U, то $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ также является свободным $\bar{k}\langle\varphi\rangle$-модулем. Тогда $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ — свободный $k\langle\varphi\rangle$-модуль. Действительно, по теореме Дойринга — Нётер [35, теорема 29.7] два представления над меньшим полем эквивалентны, если они эквивалентны над бо̀льшим полем. Быть свободным $\bar{k}\langle\varphi\rangle$-модулем или свободным $k\langle\varphi\rangle$-модулем означает иметь базис как векторного пространства над соответствующим полем, элементы которого переставляются преобразованием φ так, что все орбиты регулярны. В таком базисе $\langle\varphi\rangle$ представляется соответствующими подстановочными матрицами, которые все определены над k. $\square$

3. Автоморфизм порядка p^n

Сначала отдельно сформулируем следующее предложение, которое будет также использовано в § 4 в иной ситуации.

Предложение 3.1. *Предположим, что циклическая группа $\langle\varphi\rangle$ порядка p^n действует автоморфизмами на конечной p-группе P и V — точный $\mathbb{F}_q P\langle\varphi\rangle$-модуль, где $\mathbb{F}_q$ — простое поле порядка $q \neq p$. Тогда ступень разрешимости группы $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ ограничена в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n.*

Доказательство. Пусть M — максимальная абелева нормальная подгруппа полупрямого произведения $P\langle\varphi\rangle$. Если $[M, \varphi^{p^{n-1}}] \neq 1$, то по лемме 2.4 $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ является свободным $\mathbb{F}_q\langle\varphi\rangle$-модулем. Очевидно, что в свободном $\mathbb{F}_q\langle\varphi\rangle$-модуле неподвижные точки преобразования φ — это в точности «диагональные» элементы. Отсюда следует, что порядок $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ равен

$$|C_{[V,[M,\varphi^{p^{n-1}}]]}(\varphi)|^{|\varphi|} = |C_{[V,[M,\varphi^{p^{n-1}}]]}(\varphi)|^{p^n}$$

и потому ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n. Группа $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ точно действует на V, поэтому по теореме Машке она также действует точно на $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$. Значит, порядок $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n. Это, конечно, верно, если $[M, \varphi^{p^{n-1}}] = 1$.

Отсюда следует, что индекс $|M : C_M(\varphi^{p^{n-1}})|$ ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n, так как этот индекс равен числу различных коммутаторов $[m, \varphi^{p^{n-1}}]$ при $m \in M$.

Рассмотрим центральный ряд группы $P\langle\varphi\rangle$, соединяющий 1 и M. Так как $|M : C_M(\varphi^{p^{n-1}})|$ ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n, количество факторов этого ряда, не накрываемых подгруппой $C_M(\varphi^{p^{n-1}})$, ограничено в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n. Поэтому имеется нормальный ряд ограниченной длины, соединяющий 1 и M, каждый фактор которого либо централен в $P\langle\varphi\rangle$, либо накрывается подгруппой $C_M(\varphi^{p^{n-1}})$. Очевидно, что тогда $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на каждом факторе этого ряда, а значит, $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ также действует тривиально на этих факторах. По теореме Калужнина группа автоморфизмов, индуцированная действием $[P, \varphi^{p^{a-1}}]$ на M, нильпотентна ограниченной ступени. Поскольку M содержит свой централизатор в $P\langle\varphi\rangle$, получаем, что $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ разрешима ограниченной ступени, так как по доказанному $\gamma_s([P, \varphi^{p^{n-1}}]) \leq M \cap [P, \varphi^{p^{n-1}}]$ для некоторого числа s, ограниченного в терминах $|C_V(\varphi)|$ и p^n. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Напомним, что G — конечная p-разрешимая группа, допускающая автоморфизм φ порядка p^n, имеющий не более m неподвижных точек в каждой φ-инвариантной элементарной абелевой p'-секции группы G. Нужно ограничить p-длину группы G в терминах p^n и m. Всюду далее в этом параграфе, говоря для краткости, что некоторый параметр просто «ограничен», будем иметь в виду, что этот параметр ограничен сверху в терминах p^n и m.

Воспользуемся индукцией по n. Удобно рассмотреть случай $n = 0$ в качестве базы индукции, когда $|\varphi| = p^0 = 1$, т. е. φ действует тривиально на G. Тогда условие означает, что каждая элементарная абелева p'-секция группы G имеет ограниченный порядок. Покажем, что ступень нильпотентности силовской p-подгруппы P группы $\widehat{G} = G/O_p(G)$ ограничена. Действительно, так как порядок P взаимно прост с $|O_{p'}(\widehat{G})|$, для каждого простого числа q, делящего $|O_{p'}(\widehat{G})|$, найдется P-инвариантная силовская q-подгруппа Q группы $O_{p'}(\widehat{G})$. Фактор-группа $P/C_P(Q)$ действует точно на фактор-группе по подгруппе Фраттини $Q/\Phi(Q)$, порядок которой не выше m по предположению. Отсюда следует, что $P/C_P(Q)$ имеет ограниченный порядок, а потому и ограниченную ступень нильпотентности. Так как P действует точно на $O_{p'}(\widehat{G})$, имеем $\bigcap C_P(Q_i) = 1$, где Q_i пробегают все P-инвариантные силовские подгруппы группы $O_{p'}(\widehat{G})$. Значит, P является подпрямым произведением групп ограниченной ступени нильпотентности и потому сама имеет ограниченную ступень нильпотентности. Теперь получаем, что p-длина группы $\widehat{G} = G/O_p(G)$ ограничена по теореме Холла — Хигмэна [29]. В результате p-длина группы G ограничена.

Далее предполагаем, что $n \geq 1$.

Положим $\widehat{G} = G/O_p(G)$. Рассмотрим силовскую p-подгруппу полупрямого произведения $\widehat{G}\langle\varphi\rangle$, содержащую $\langle\varphi\rangle$, и пусть P — ее пересечение с $\widehat{G}$, так что P — φ-инвариантная силовская p-подгруппа группы $\widehat{G}$. Так как порядок p-группы $P\langle\varphi\rangle$ взаимно прост с $|O_{p'}(\widehat{G})|$, для каждого простого числа q, делящего $|O_{p'}(\widehat{G})|$, найдется $P\langle\varphi\rangle$-инвариантная силовская q-подгруппа Q группы $O_{p'}(\widehat{G})$.

Фактор-группа $\overline{P} = P/C_P(Q)$ действует точно на фактор-группе по подгруппе Фраттини $V = Q/\Phi(Q)$, которую будем рассматривать как $\mathbb{F}_q P\langle\varphi\rangle$-модуль. По условию $|C_V(\varphi)| \leq m$, значит, в силу предложения 3.1 ступень разрешимости подгруппы $[\bar{P}, \varphi^{p^{n-1}}]$ ограничена. Другими словами, $[P, \varphi^{p^{n-1}}]^{(s)} \leq C_P(Q)$ для некоторого ограниченного числа s. Поскольку P действует точно на $O_{p'}(\widehat{G})$, имеем $\bigcap C_P(Q_i) = 1$, где Q_i пробегает все $P\langle\varphi\rangle$-инвариантные силовские подгруппы группы $O_{p'}(\widehat{G})$. Отсюда $[P, \varphi^{p^{n-1}}]^{(s)} = 1$.

По теореме 2.3 Холла — Хигмэна — Хартли получаем, что нормальная подгруппа $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ силовской p-подгруппы P содержится в $H = O_{p',p,p',\dots,p',p}(\widehat{G})$, где p встречается ограниченное число раз.

Рассмотрим действие φ на фактор-группе $\widetilde{G} = \widehat{G}/H$. Так как $[P, \varphi^{p^{n-1}}] \leq H$, получаем, что $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на образе P, который является силовской p-подгруппой группы $\widetilde{G}$. В частности, $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на $O_{p',p}(\widetilde{G})/O_{p'}(\widetilde{G})$, и потому также тривиально действует $[\widetilde{G}, \varphi^{p^{n-1}}]$. Так как $O_{p',p}(\widetilde{G})/O_{p'}(\widetilde{G})$ содержит свой централизатор в $\widetilde{G}/O_{p'}(\widetilde{G})$, получаем, что $[\widetilde{G}, \varphi^{p^{n-1}}] \leq O_{p',p}(\widetilde{G})$. Другими словами, $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на фактор-группе $\widetilde{G}/O_{p',p}(\widetilde{G})$. Поэтому порядок автоморфизма, индуцированного φ на $\widetilde{G}/O_{p',p}(\widetilde{G})$, не превосходит p^{n-1}. По предположению индукции p-длина этой фактор-группы ограничена. Тогда p-длина группы $G/O_{p,p'}(G)$ ограничена, а потому и p-длина группы G ограничена, как и требовалось. $\square$

Доказательство следствия 1.3. Здесь G — конечная разрешимая группа, допускающая автоморфизм φ порядка p^n, имеющий не более m неподвижных точек в каждой φ-инвариантной элементарной абелевой p'-секции группы

G. По теореме 1.1 p-длина группы G ограничена. Остается получить оценку высоты Фиттинга каждого p'-фактора T верхнего p-ряда, состоящего из подгрупп $O_{p',p,p',p,\dots}$.

Такая оценка вытекает, например, из рангового аналога теоремы Хартли — Айзекса, доказанного в [36]. Более точно, теорема 5.1 из [36] утверждает, что если конечная разрешимая группа K допускает разрешимую группу автоморфизмов L копростого порядка, то K обладает нормальной подгруппой N высоты Фиттинга не более $4^{\alpha(L)}-1$, для которой (секционный) ранг фактор-группы K/N ограничен в терминах $|L|$ и ранга подгруппы $C_K(L)$. Здесь по определению ранг группы — это наименьшее число r такое, что каждая подгруппа может быть порождена r элементами.

Применим эту теорему к T и $\langle\varphi\rangle$. Известно, что ранг конечной группы ограничен в терминах рангов ее элементарных абелевых секций. Разумеется, каждая элементарная абелева секция группы $C_T(\varphi)$ является φ-инвариантной p'-секцией группы G и потому имеет ограниченный порядок по условию. Таким образом, в силу [36, теорема 5.1] получаем нормальную подгруппу T_1 группы T, для которой и высота Фиттинга группы T_1, и ранг группы T/T_1 ограничены. Наконец, также известно, что высота Фиттинга разрешимой конечной группы ограничена в терминах ее ранга. В результате высота Фиттинга группы T ограничена, как и высота Фиттинга группы G. $\square$

4. Автоморфизм порядка $p^a q^b$

Доказательство теоремы 1.4. Напомним, что G — конечная группа, допускающая автоморфизм φ порядка $p^a q^b$. По теореме Хартли [3] (основанной на классификации конечных простых групп) группа G обладает разрешимой подгруппой индекса, ограниченного в терминах $p^a q^b$ и $|C_G(\varphi)|$. Поэтому можно с самого начала считать, что G разрешима, так что нам нужно ограничить высоту Фиттинга группы G в терминах $p^a q^b$ и $|C_G(\varphi)|$. Всюду далее будем для краткости говорить, что некоторый параметр ограничен, имея в виду, что этот параметр ограничен сверху в терминах $p^a q^b$ и $|C_G(\varphi)|$. Будем использовать без особых ссылок тот факт, что число неподвижных точек автоморфизма φ в каждой φ-инвариантной секции группы G не превосходит $|C_G(\varphi)|$ в силу леммы 2.1.

Воспользуемся индукцией по $a+b$. В качестве базы индукции рассмотрим случай, когда либо $a=0$, либо $b=0$. Тогда $|\varphi|$ — степень простого числа и по теореме Хартли — Турау [22] группа G обладает подгруппой ограниченного индекса, у которой высота Фиттинга не превосходит $\alpha(\varphi)$. (В сущности, для нашей «слабой» оценки было бы достаточно более простого рассуждения: если, скажем, $|\varphi| = p^a$, то ранг фактор-группы группы $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G)$ по ее подгруппе Фраттини ограничен по лемме 2.2, откуда следует ограничение на высоту Фиттинга группы $G/O_{p'}(G)$, а высота Фиттинга группы $O_{p'}(G)$ ограничена в терминах a по теореме Томпсона [16].) Более того, выполняется следующее предложение, которое, по-видимому, было отмечено Хартли, но могло остаться неопубликованным. Сформулируем это предложение в более общем виде, не предполагая, что автоморфизм имеет бипримарный порядок.

Предложение 4.1. *Если конечная разрешимая группа G допускает автоморфизм ψ такой, что имеется не более одного общего простого делителя чисел $|\psi|$ и $|G|$, то высота Фиттинга группы G ограничена сверху в терминах $|\psi|$ и $|C_G(\psi)|$.*

Доказательство. Если $(|\psi|, |G|) = 1$, то результат вытекает из более сильной теоремы Томпсона [16]. Пусть $\langle\psi\rangle = \langle\psi_r\rangle \times \langle\psi_{r'}\rangle$, где $\langle\psi_r\rangle$ — силовская r-подгруппа группы $\langle\psi\rangle$, а r — единственный общий простой делитель чисел $|G|$ и $|\psi|$. Централизатор $C_G(\psi_{r'})$ допускает автоморфизм ψ_r, у которого порядок есть степень простого числа, а централизатор $C_{C_G(\psi_{r'})}(\psi_r)$ равен $C_G(\psi)$. По теореме Хартли — Турау [22] высота Фиттинга группы $C_G(\psi_{r'})$ ограничена. Применим теорему Томпсона к автоморфизму $\psi_{r'}$ группы G копростого порядка и получим, что высота Фиттинга группы G ограничена как требуется. □

Вернемся к доказательству теоремы 1.4. Пусть $a \geq 1$ и $b \geq 1$. Пусть $\varphi_p = \varphi^{q^b}$ и $\varphi_q = \varphi^{p^a}$, так что $|\varphi_p| = p^a$ и $|\varphi_q| = q^b$, причем $\langle\varphi\rangle = \langle\varphi_p\rangle \times \langle\varphi_q\rangle$. Подгруппа $O_{q'}(G)$ допускает автоморфизм φ, порядок которого имеет не более одного общего простого делителя p с порядком $|O_{q'}(G)|$. По предложению 4.1 высота Фиттинга группы $O_{q'}(G)$ ограничена.

Поэтому можно считать, что $O_{q'}(G) = 1$. Тогда фактор-группа $\overline{G} = G/O_q(G)$ действует точно на фактор-группе по подгруппе Фраттини $V = O_q(G)/\Phi(O_q(G))$, которую будем считать $\mathbb{F}_q\overline{G}\langle\varphi\rangle$-модулем. Подпространство неподвижных точек $C_V(\varphi_p)$ имеет ограниченный порядок. Это вытекает из леммы 2.2, примененной к действию линейного преобразования φ_q порядка q^b на $C_V(\varphi_p)$, так как неподвижные точки преобразования φ_q в $C_V(\varphi_p)$ содержатся в подпространстве неподвижных точек $C_V(\varphi)$ ограниченного порядка.

Выберем силовскую p-подгруппу группы $\overline{G}\langle\varphi_p\rangle$, содержащую $\langle\varphi_p\rangle$, и пусть P — ее пересечение с $\overline{G}$, так что P — φ_p-инвариантная силовская p-подгруппа группы $\overline{G}$. В силу предложения 3.1 подгруппа $\big[P, \varphi_p^{p^{a-1}}\big]$ разрешима ограниченной ступени.

Отсюда по теореме 2.3 Холла — Хигмэна — Хартли следует, что нормальная подгруппа $\big[P, \varphi_p^{p^{a-1}}\big]$ силовской p-подгруппы P содержится в $H = O_{p',p,p',\dots,p',p}(\overline{G})$, где p встречается ограниченное число раз.

Рассмотрим действие автоморфизма φ на фактор-группе $\widetilde{G} = \overline{G}/H$. Так как $\big[P, \varphi_p^{p^{a-1}}\big] \leq H$, получаем, что $\varphi_p^{p^{a-1}}$ действует тривиально на образе подгруппы P, который является силовской p-подгруппой группы $\widetilde{G}$. В частности, $\varphi_p^{p^{a-1}}$ действует тривиально на $O_{p',p}(\widetilde{G})/O_{p'}(\widetilde{G})$, и потому также тривиально действует $\big[\widetilde{G}, \varphi_p^{p^{a-1}}\big]$. Так как $O_{p',p}(\widetilde{G})/O_{p'}(\widetilde{G})$ содержит свой централизатор в $\widetilde{G}/O_{p'}(\widetilde{G})$, получаем, что $[\widetilde{G}, \varphi_p^{p^{a-1}}] \leq O_{p',p}(\widetilde{G})$. Другими словами, $\varphi_p^{p^{a-1}}$ действует тривиально на фактор-группе $\widetilde{G}/O_{p',p}(\widetilde{G})$. Поэтому порядок автоморфизма, индуцированного φ на $\widetilde{G}/O_{p',p}(\widetilde{G})$, делит $p^{a-1}q^b$. По индукции высота Фиттинга этой фактор-группы ограничена.

Остается получить оценку высоты Фиттинга каждого из φ-инвариантных нормальных p'-факторов, которые появляются в ограниченном количестве в верхнем p-ряду групп H и $O_{p',p}(\widetilde{G})$. Такая оценка следует из предложения 4.1. □

Доказательство следствия 1.5. Это следствие для локально конечных групп вытекает из теоремы 1.4 в силу стандартных рассуждений об обратном пределе. □

Доказательство следствия 1.6. Здесь конечная группа G допускает автоморфизм φ такой, что имеется не более двух общих простых делителей чисел $|\varphi|$ и $|G|$. Снова по теореме Хартли [3] можно с самого начала считать, что группа G разрешима. Если $(|\varphi|, |G|)$ равно 1 или степени простого числа, то результат вытекает из предложения 4.1. Пусть $\langle\varphi\rangle = \langle\varphi_{pq}\rangle \times \langle\psi\rangle$, где $\langle\varphi_{pq}\rangle$

— холлова $\{p, q\}$-подгруппа группы $\langle\varphi\rangle$, а p, q — единственные общие простые делители $|G|$ и $|\varphi|$. Централизатор $C_G(\psi)$ допускает автоморфизм φ_{pq} бипримарного порядка, централизатор которого $C_{C_G(\psi)}(\varphi_{pq})$ равен $C_G(\varphi)$. По теореме 1.4 высота Фиттинга группы $C_G(\psi)$ ограничена в терминах $|\varphi_{pq}|$ и $|C_G(\varphi)|$. Применим теорему Томпсона [16] к автоморфизму ψ группы G копростого порядка и получим, что высота Фиттинга группы G ограничена в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brauer R., Fowler K. A.* On groups of even order // Ann. Math. (2). 1955. V. 62. P. 565–583.
2. *Thompson J.* Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1959. V. 45. P. 578–581.
3. *Hartley B.* A general Brauer–Fowler theorem and centralizers in locally finite groups // Pacific J. Math. 1992. V. 152. P. 101–117.
4. *Higman G.* Groups and rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements // J. London Math. Soc. (2). 1957. V. 32, N 2. P. 321–334.
5. *Крекнин В. А.* Разрешимость алгебр Ли с регулярными автоморфизмами конечного периода // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. С. 467–469.
6. *Крекнин В. А., Кострикин А. И.* Алгебры Ли с регулярными автоморфизмами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. С. 249–251.
7. *Хухро Е. И.* Кольца Ли и группы, допускающие почти регулярный автоморфизм простого порядка // Мат. сб. 1990. Т. 181. С. 1207–1219.
8. *Kovács L. G.* Groups with regular automorphisms of order four // Math. Z. 1960/61. Bd 75. S. 277–294.
9. *Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И.* Конечные группы с почти регулярным автоморфизмом порядка четыре // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 5. С. 575–602.
10. *Alperin J. L.* Automorphisms of solvable groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 175–180.
11. *Хухро Е. И.* Конечные p-группы, допускающие автоморфизм порядка p с малым числом неподвижных точек // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 5. С. 652–657.
12. *Shalev A.* On almost fixed point free automorphisms // J. Algebra. 1993. V. 157. P. 271–282.
13. *Хухро Е. И.* Конечные p-группы, допускающие p-автоморфизмы с малым числом неподвижных точек // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 12. С. 5–64.
14. *Medvedev Yu.* p-Divided Lie rings and p-groups // J. London Math. Soc. (2). 1999. V. 59. P. 787–798.
15. *Jaikin-Zapirain A.* On almost regular automorphisms of finite p-groups // Adv. Math. 2000. V. 153. P. 391–402.
16. *Thompson J.* Automorphisms of solvable groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 259–267.
17. *Turull A.* Fitting height of groups and of fixed points // J. Algebra. 1984. V. 86. P. 555–566.
18. *Hartley B., Isaacs I. M.* On characters and fixed points of coprime operator groups // J. Algebra. 1990. V. 131. P. 342–358.
19. *Bell S. D., Hartley B.* A note on fixed-point-free actions of finite groups // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1990. V. 41, N 162. P. 127–130.
20. *Dade E. C.* Carter subgroups and Fitting heights of finite solvable groups // Illinois J. Math. 1969. V. 13. P. 449–514.
21. *Нерешенные задачи теории групп.* Коуровская тетрадь. 18-е изд. Новосибирск: Ин-т математики им. Соболева СО РАН, 2014. http://math.nsc.ru/ alglog/18kt.pdf.
22. *Hartley B., Turau V.* Finite soluble groups admitting an automorphism of prime power order with few fixed points // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1987. V. 102. P. 431–441.
23. *Rae A.* Sylow p-subgroups of finite p-soluble groups // J. London Math. Soc. (2). 1973. V. 71. P. 117–123.
24. *Hartley B., Rae A.* Finite p-groups acting on p-soluble groups // Bull. London Math. Soc. 1973. V. 5. P. 197–198.
25. *Kurzweil H.* Eine Verallgemeinerung von fixpunktfreien Automorphismen endlicher Gruppen // Arch. Math. (Basel). 1971. Bd 22. S. 136–145.
26. *Meixner T.* The Fitting length of solvable H_{p^n}-groups // Israel J. Math. 1985. V. 51, N 1–2. P. 68–78.

27. *Wilson J. S.* On the structure of compact torsion groups // Monatsh. Math. 1983. V. 96, N 1. P. 57–66.

28. *Khukhro E. I., Shumyatsky P.* Words and pronilpotent subgroups in profinite groups // Austral. Math. Soc. J. 2014. V. 97, N 3. P. 343–364.

29. *Hall P., Higman G.* The p-length of a p-soluble group and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. (3). 1956. V. 6. P. 1–42.

30. *Hoare A. H. M.* A note on 2-soluble groups // J. London Math. Soc. 1960. V. 35. P. 193–199.

31. *Berger T. R., Gross F.* 2-length and the derived length of a Sylow 2-subgroup // Proc. London Math. Soc. (3). 1977. V. 34. P. 520–534.

32. *Брюханова Е. Г.* Связь между 2-длиной и производной длиной силовской 2-подгруппы конечной разрешимой группы // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 2. С. 161–170.

33. *Hartley B.* Automorphisms of finite soluble groups. Preliminary version, MIMS EPrint: 2014.52. http://eprints.ma.man.ac.uk/2188/01/covered/MIMS_ep2014_52.pdf.

34. *Hartley B.* Some theorems of Hall–Higman type for small primes // Proc. London Math. Soc. (3). 1980. V. 41. P. 340–362.

35. *Curtis C. W., Reiner I.* Representation theory of finite groups and associative algebras. New York; London: Interscience, 1962.

36. *Khukhro E., Mazurov V.* Automorphisms with centralizers of small rank // Groups St. Andrews 2005. V. II. Selected papers of the conference, St. Andrews, UK, July 30–August 6, 2005. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. P. 564–585. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; V. 340).

Статья поступила 8 января 2015 г.

Хухро Евгений Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Университет Линкольна,
г. Линкольн, Великобритания
khukhro@yahoo.co.uk