Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 519.48

ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ С АССОЦИАТИВНО–КОММУТАТИВНЫМ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ ОГРАНИЧЕННОГО ИНДЕКСА

О. В. Шашков

Аннотация. Доказано, что объединение конечнобазируемых многообразий алгебр с ассоциативно-коммутативным пересечением ограниченного индекса обладает конечным базисом тождеств.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: многообразие алгебр, объединение многообразий, конечная базируемость системы тождеств.

Объединение конечнобазируемых многообразий алгебр, вообще говоря, не обладает конечным базисом тождеств [1], поэтому представляет интерес задача нахождения условий, гарантирующих конечную базируемость объединения многообразий алгебр. Там же в [1] Г. В. Дорофеев доказал, что объединение шпехтовых многообразий шпехтово, а значит, является конечнобазируемым многообразием алгебр. Автор в [2] доказал, что объединение конечнобазируемых многообразий с нильпотентным пересечением обладает конечным базисом тождеств.

Эта статья — продолжение статьи [2], и основным ее результатом является

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *— конечнобазируемые многообразия алгебр. Допустим, что* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ *— ассоциативно-коммутативное индекса* $n \geq 3$ *многообразие алгебр. Тогда* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ *— конечнобазируемое многообразие алгебр.*

Мы называем многообразие алгебр $\mathfrak{A}$ *ассоциативно-коммутативным индекса* n, если для любых двух нормированных полилинейных одночленов u и v степени $n \geq 3$ идеал тождеств многообразия алгебр $\mathfrak{A}$ содержит двучлен $u - v$. Неформально это означает, что слова длины n ассоциативно-коммутативны.

Проблема Шпехта получила решение в работе А. Р. Кемера [3]. Вслед за этим появились аналоги теоремы Кемера для конечнопорожденных йордановых, лиевых и альтернативных алгебр [4–6]. В [7] доказана шпехтовость некоторых неассоциативных многообразий, порожденных простыми конечномерными алгебрами, в частности, алгеброй $C_7^{(-)}$ — простой семимерной нелиевой алгеброй Мальцева.

Здесь уместно отметить и не менее известные контрпримеры в характеристике $p > 0$ [8–10], которые были получены сначала при $p = 2$, а затем и для любого простого $p > 2$.

В 70-е гг. были выписаны тождества объединения некоторых конкретных многообразий алгебр [1, 11–13].

В разд. 4 работы из основной теоремы выводится следствие.

Теорема 2. *Пусть ℓ — решетка многообразий алгебр, порожденная тремя произвольными конечнобазируемыми многообразиями алгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{A}$ — многообразие правоальтернативных алгебр, $\mathfrak{B}$ — многообразие коммутативных алгебр, $\mathfrak{C}$ — многообразие антикоммутативных алгебр. Тогда решетка ℓ содержит только конечнобазируемые многообразия алгебр.*

Отметим среди открытых вопросов следующие.

1. Будет ли конечнобазируемым многообразием алгебр объединение двух конечнобазируемых многообразий со шпехтовым пересечением, в частности, с ассоциативным пересечением; с пересечением, порожденным алгеброй $\mathbf{M}_2(F)$?

2. Будет ли конечнобазируемым объединение произвольного конечнобазируемого многообразия со шпехтовым многообразием, в частности, с многообразием ассоциативных алгебр?

3. Будет ли конечнобазируемым объединение конечнобазируемых многообразий алгебр с ассоциативным пересечением, удовлетворяющим стандартному тождеству $\mathrm{st}_3 = \sum\limits_{\sigma\in\mathbf{S}_3}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}$?

1. Основные определения и предварительные результаты

Термин *алгебра* означает линейную алгебру над полем Φ нулевой характеристики. Необходимые понятия и обозначения, связанные с многообразиями алгебр (тождества, многообразия алгебр, T-идеала $T(\mathfrak{A})$, свободной алгебры $\mathfrak{A}[X]$ многообразия $\mathfrak{A}$), можно найти в [14], $\Phi[X]$ — свободная неассоциативная алгебра над полем Φ от счетного множества порождающих X. Везде далее рассматриваются только полилинейные многочлены.

Объединением многообразий алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называется наименьшее относительно включения многообразие алгебр, содержащее как многообразие $\mathfrak{A}$, так и многообразие $\mathfrak{B}$. Обозначается объединение многообразий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ через $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$. Понятно, что тождествами многообразия $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ являются те и только те многочлены, которые будут тождествами многообразий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одновременно, т. е. $T(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = T(\mathfrak{A}) \cap T(\mathfrak{B})$.

Для того чтобы упорядочить изучение следования одних тождеств из других, введем в рассмотрение набор функций, достаточных для построения любого T-идеала.

Полилинейный многочлен $f = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ от начального набора порождающих $x_1, x_2, \dots, x_N$ называем *правильным.*

Пусть $f = f(x_1, \dots, x_N)$ — правильный одночлен. Тогда определим три функции λ, ρ и $\eta(i)$:

1) $f^\lambda := x_1 f(x_2, \dots, x_{N+1})$;

2) $f^\rho := f x_{N+1}$;

3) $f^{\eta(i)} := f(x_1, x_2, \dots, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{N+1})$ для любого $1 \le i \le N$.

Кроме того, стандартным образом определяем действие перестановки на одночлен как перестановку соответствующих порождающих:

$$f^\sigma := f(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, \dots, x_{N\sigma}),$$

где $\sigma \in \mathrm{Sym}(N)$.

Множеством *правильных одночленов от F* мы называем множество, порожденное из системы тождеств F последовательным действием функций λ, ρ и $\eta(\cdot)$. *Множеством одночленов от F* мы называем множество, полученное из множества правильных одночленов от F переименованием переменных. Обозначаем это множество через $\mathrm{Mon}(F)$.

Везде далее предполагаем, что «тождество» означает правильный многочлен.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — многообразия алгебр, $F \subseteq T(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$. Для каждого тождества $f \in F$ выберем по одному тождеству $f^\tau \in T(\mathfrak{A})$, принимающему то же значение на элементах свободной алгебры $\mathfrak{B}[X]$. Функция τ называется *подъемом тождества* многообразия $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ до тождества многообразия $\mathfrak{A}$. Существование подъема очевидно, поскольку $T(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}) = T(\mathfrak{A}) + T(\mathfrak{B})$.

Систему тождеств $F \subseteq T(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$ назовем *регулярной* ранга m, если F линейно порождает любое с точностью до замены индексов тождество из T-идеала $T(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$ степени $\geq m$ и содержит $\mathrm{Mon}(F_m)$, где F_m — все многочлены системы F степени m.

Если F — регулярная система тождеств из T-идеала $T(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$, то множество всех тождеств $\sum\limits_i \alpha_i\big(f_i^\tau\big)^{\xi_i} \in T(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$ для $f_i \in F$, построенных для нулевых комбинаций $\sum\limits_i \alpha_i f_i^{\xi_i} = 0$, назовем системой *нуль-тождеств* относительно F. Здесь под ξ_i понимается некоторое произведение функций λ, ρ и $\eta(i)$, заканчивающееся перестановкой σ.

В [2, теорема 3.1] доказано достаточное условие конечной базируемости объединения многообразий алгебр.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — конечнобазируемые многообразия алгебр, F — регулярная система тождеств многообразия $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ с подъемом F^τ такая, что система нуль-тождеств T_0 относительно F конечнобазируема. Тогда $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ обладает конечным базисом тождеств.*

2. Ассоциативно-коммутативные многообразия конечного индекса

Понятно, что многообразие Nilp^n нильпотентных индекса n алгебр является ассоциативно-коммутативным многообразием индекса n.

Тождество $u - v$ для двух нормированных одночленов u и v называется *двучленным.*

Предложение 1. *Многообразие ассоциативных алгебр, удовлетворяющее некоторому полилинейному двучленному тождеству, не оставляющему первый и последний образующие на месте, ассоциативно-коммутативно ограниченного индекса.*

Доказательство. В. Н. Латышев [15] показал, что если в ассоциативной алгебре выполнено двучленное тождество, переставляющее первый образующий, то в ней будет выполнено тождество $y_1y_2x_1x_2\dots x_n - y_2y_1x_1x_2\dots x_n$. Понятно, что имеется и симметричное тождество $x_1x_2\dots x_ny_1y_2 - x_1x_2\dots x_ny_2y_1$. Отсюда следует, что любое полилинейное двучленное тождество степени $2n+1$ выполнено в такой алгебре. $\square$

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — многообразие правоальтернативных алгебр, $\mathfrak{B}$ — многообразие строго эластичных алгебр. Тогда многообразие $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ ассоциативно-коммутативно индекса* 4.

Доказательство. Для коммутатора, йорданова произведения и ассоциатора используем стандартные обозначения: $[a,b] = ab - ba$, $a\circ b = ab + ba$ и $(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$.

Вначале напомним, что многообразие строго эластичных алгебр определяется тождеством $(ab)c - c(ba) = 0$. Заметим, кстати, что всякая коммутативная и всякая антикоммутативная алгебра строго эластична. Более того, объединение многообразий всех коммутативных и всех антикоммутативных алгебр является в точности многообразием всех строго эластичных алгебр [1].

1. Кроме того, ясно, что правоальтернативная строго эластичная алгебра альтернативна. Строгая эластичность означает справедливость свойств

$$[a, b] \circ c = 0, \quad [a \circ b, c] = 0.$$

Из этих тождеств, кстати, следует, что

$$[[a, b], c] = 2[a, b]c = 2[ab, c].$$

2. Докажем, что итерированный коммутатор $[x, y, z, t] := [[[x, y], z], t]$ кососимметричен по первым трем аргументам.

В самом деле, $2[x^2 y, z] = [[x^2, y], z] = 0$, и отсюда $[(xy)x, z] = -[x(xy), z] = -[x^2 y, z] = 0$.

3. Из тождества (см. [14])

$$2(a, b, c) = (a, c, b)^+ + [[a, b], c],$$

где $(x, y, z)^+ := (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z)$ — йорданов ассоциатор, при $a = [x, y]$, $b = c = z$ следует, что $[x, y, z, z] = 0$. Таким образом, коммутатор $[x, y, z, t]$ кососимметричен по всем аргументам.

4. Из тождества Сейгла [16]

$$[[[x, y], z], t] + [[[y, z], t], x] + [[[z, t], x], y] + [[[t, x], y], z] = [[x, z], [y, t]]$$

и кососимметричности итерированных коммутаторов следует, что $[[x, y], [z, t]] = 0$. Отсюда по п. 1 $[[x, y], zt] = [x, y](zt) = 0$.

5. Имеем

$$([x, y], z, t) = ([x, y]z)t = \frac{1}{4}[x, y, z, t],$$

$$[(x, y, z), t] = [(xy)z - x(yz), t] = \frac{1}{4}([x, y, z, t] + [y, z, x, t]).$$

6. В силу тождества (см. [14])

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b + 3(a, b, c)$$

заключаем, что

$$\begin{aligned} 3[x, y, z, t] = 12([x, y], z, t) &= 4[[x, y]z, t] - 4[x, y][z, t] - 4[[x, y], t]z \\ &= 2[x, y, z, t] - 2[x, y, t, z] = 4[x, y, z, t]. \end{aligned}$$

Таким образом, $[x, y, z, t] = 0$, а значит, и $([x, y], z, t) = [(x, y, z), t] = 0$.

7. Снова из тождества п. 6, пользуясь тождествами п. 1, получаем соотношения

$$(a \circ b, c, d) = 0, \quad (a, b, c) \circ d = 0.$$

Отсюда заключаем, что $(xy, z, t) = (x, y, z)t = 0$, таким образом, все слова длины 4 ассоциативны.

8. Наконец, $\frac{1}{4}[x, y, z, t] = [x, y]zt = [xyz, t] = 0$. Поскольку перестановки (12) и (1234) порождают симметрическую группу $\mathbf{S}_4$, это означает, что все слова длины 4 ассоциативно-коммутативны. $\square$

Лемма 1. *Ассоциативно-коммутативное конечного индекса многообразие алгебр, удовлетворяющее полилинейному тождеству с ненулевой суммой коэффициентов, нильпотентно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативно-коммутативное конечного индекса n многообразие алгебр, f — полилинейное тождество степени n из системы тождеств многообразия $\mathfrak{A}$ с ненулевой суммой коэффициентов. Перепишем его в виде $f = \sum\limits_i \alpha_i u_i$, где $\alpha_i \in \Phi$, u_i — нормированные одночлены из $\Phi[X]$.

Из определения ассоциативно-коммутативных многообразий конечного индекса следует, что идеал тождеств $T(\mathfrak{A})$ содержит двучлены $x_1x_2\dots x_n - u_i$, где $x_1x_2\dots x_n$ — правонормированный в смысле расстановки скобок одночлен.

Домножив каждое из этих тождеств на α_i и сложив их, получим, что $\big(\sum\limits_i \alpha_i\big)x_1x_2\dots x_n - f \in T(\mathfrak{A})$, но и f лежит в $T(\mathfrak{A})$, поэтому $x_1x_2\dots x_n \in T(\mathfrak{A})$.

Осталось заметить, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет всем полилинейным тождествам $x_1x_2\dots x_n - u$, где u — произвольные полилинейные одночлены от $x_1x_2\dots x_n$. Таким образом, $\mathfrak{A}$ удовлетворяет всем полилинейным одночленным тождествам, значит, $\mathfrak{A}$ — нильпотентное индекса n многообразие алгебр. $\square$

Из леммы 1 вытекает

Следствие 1 [17]. *Пусть $\mathfrak{A}$ — многообразие ассоциативных алгебр. Допустим, что $\mathfrak{B}$ — конечнобазируемое многообразие, идеал тождеств которого содержит полилинейный многочлен с ненулевой суммой коэффициентов. Тогда объединение многообразий $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ имеет конечный базис тождеств.*

3. Доказательство основной теоремы

Из леммы 1 следует, что всякое ассоциативно-коммутативное конечного индекса многообразие алгебр либо нильпотентно, либо определяется полилинейными тождествами с нулевой суммой коэффициентов. Исходя из этого, для доказательства основной теоремы достаточно доказать следующее

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — конечнобазируемые многообразия алгебр. Допустим, что $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ — ассоциативно-коммутативное ограниченного индекса многообразие алгебр, определяемое системой полилинейных тождеств с нулевой суммой коэффициентов. Тогда $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ — конечнобазируемое многообразие алгебр.*

Итак, пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — конечнобазируемые многообразия алгебр и $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ — ассоциативно-коммутативное многообразие алгебр конечного индекса $n \geq 3$, определяемое полилинейной системой тождеств с нулевой суммой коэффициентов.

Выберем число m, не меньшее индекса n и степени определяющих тождеств каждого из многообразий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Пусть V_N — множество всех полилинейных нормированных одночленов от первых N порождающих. Определим множество W_N как разность $V_N - V_N$, т. е. это множество всех полилинейных нормированных двучленов вида $u - v$, где $u, v \in V_N$.

Обозначим $W = \bigcup\limits_{i \geq m} W_i$. Покажем, что W — регулярная в многообразии $\mathfrak{C}$ система тождеств ранга m.

В самом деле, во-первых, $\mathrm{Mon}(W_m) \subseteq W$, во-вторых, всякое полилинейное тождество степени $N \geq m$ многообразия $\mathfrak{C}$ линейно выражается через двучлены из W. Докажем последнее утверждение.

Пусть $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i u_i$ — полилинейное тождество многообразия $\mathfrak{C}$, а u_i — одночлены. Всякое такое тождество может быть переписано в виде

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i = \alpha_1(u_1-u_2)+(\alpha_1+\alpha_2)(u_2-u_3)$$
$$+\dots+(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{k-1})(u_{k-1}-u_k)+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_k.$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i=0$, последнее слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i u_k$ равно нулю, а каждое из предшествующих пропорционально тождеству из W.

Введем новые обозначения, которые помогут упростить изложение материала о подъеме множества W.

В каждом полилинейном одночлене $u\in V_N$ найдется хотя бы одно произведение порождающих. Пусть это, например, x_ix_j. Договоримся такой одночлен записывать как $u=u_1^{\eta(ij)}$, понимая, что u_1 — одночлен, полученный из одночлена u изъятием порождающего x_j, а $\eta(ij)$ — функция, действующая на одночлен u_1 и обратная такому изъятию.

Например, в таких обозначениях можно писать, что

$$(x_1x_2)(x_3x_4)=x_1(x_3x_4)^{\eta(12)}=x_1x_3^{\eta(34)\eta(12)}=x_1^{\eta(13)\eta(34)\eta(12)}.$$

Сформулируем в виде леммы следующее очевидное утверждение, которое понадобится в дальнейшем.

Лемма 2. *Если $\eta(ij)$ и $\eta(kl)$ — две функции такие, что $i,j\notin\{k,l\}$, то они перестановочны между собой.*

Доказательство предложения 3, а значит, и основной теоремы, будет проведено на основании теоремы 3. Для этого докажем, что при соответствующем выборе подъема τ система нуль-тождеств T_0, относительно регулярной системы W конечнобазируема.

Определим подходящий подъем следующим образом.

Пусть на W_m уже определен некоторый произвольный подъем τ. Продолжим его на двучлены большей степени системы W по следующему рекуррентному правилу.

Для каждого двучлена $w=u-v\in W$ степени $N>m$ всегда можно выбрать одночлены $u_1,v_1\in V_{N-1}$ и функции $\eta_1=\eta(ij)$, $\eta_2=\eta(kl)$ так, что $u=u_1^{\eta_1}$ и $v=v_1^{\eta_2}$. Выберем еще два произвольных одночлена u_2 и v_2 так, чтобы были определены одночлены $u_2^{\eta_1\eta_3}$ и $v_2^{\eta_2\eta_3}$, где $\eta_3=\eta(pq)$ и $p,q\notin\{i,j,k,l\}$. Тогда подъем w^τ двучлена w можно определить как сумму следствий из подъемов двучленов меньшей степени:

$$(u-v)^\tau := \big(u_1-u_2^{\eta_3}\big)^{\tau\eta_1}+\big(u_2^{\eta_1}-v_2^{\eta_2}\big)^{\tau\eta_3}+\big(v_2^{\eta_3}-v_1\big)^{\tau\eta_2}.$$

Понятно, что определение подъема τ таким образом зависит от выбора индексов i,j,k,l,p,q и двучленов u_2,v_2. Чтобы подчеркнуть способ выбора, будем обозначать $w^\tau=\tau(w;i,j,k,l;p,q;u_2,v_2)$.

Итак, зафиксируем для каждого двучлена $w\in W$ степени $N>m$ по одному подъему $\tau(w;i,j,k,l;p,q;u_2,v_2)$. Этим и будет определен подъем W^τ системы W.

Будем говорить, что два тождества f и g степени N *сравнимы по модулю нуль-тождеств меньших степеней*, и писать $f \equiv_{N-1} g$, если их разность следует из нуль-тождеств степени $N-1$.

Покажем, что по модулю нуль-тождеств меньших степеней определение подъема $w^\tau = \tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2)$ не зависит от выбора p, q и u_2, v_2. Считаем, что степень двучлена w равна N.

Лемма 3. $\tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2) \equiv_{N-1} \tau(w; i, j, k, l; p', q'; u_3, v_3)$.

Доказательство. Обозначим

$$t_1 = \tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2), \quad t_2 = \tau(w; i, j, k, l; p', q'; u_3, v_3)$$

и $\eta_4 = \eta(p'q')$, тогда

$$t_1 = \left(u_1 - u_2^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_1} + \left(u_2^{\eta_1} - v_2^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_3} + \left(v_2^{\eta_3} - v_1\right)^{\tau\eta_2},$$
$$t_2 = \left(u_1 - u_3^{\eta_4}\right)^{\tau\eta_1} + \left(u_3^{\eta_1} - v_3^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_4} + \left(v_3^{\eta_4} - v_1\right)^{\tau\eta_2}.$$

Понятно, что $t_1 - t_2$ является нуль-тождеством. Покажем, что при достаточно большом N оно следует из нуль-тождеств меньших степеней. Во-первых, ясно, что

$$t_1 - t_2 \equiv_{N-1} \left(u_3^{\eta_4} - u_2^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_1} + \left(v_2^{\eta_3} - v_3^{\eta_4}\right)^{\tau\eta_2} + \left(u_2^{\eta_1} - v_2^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_3} - \left(u_3^{\eta_1} - v_3^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_4}.$$

Выберем такие одночлены u_4, v_4, u_5, v_5, чтобы одночлены $u_4^{\eta_1\eta_3\eta_4}$, $v_4^{\eta_2\eta_3\eta_4}$, $u_5^{\eta_1\eta_2\eta_3}$, $v_5^{\eta_1\eta_2\eta_4}$ были правильными. Тогда

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &\equiv_{N-1} \left(u_3 - u_4^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_1\eta_4} + \left(u_4^{\eta_4} - u_2\right)^{\tau\eta_1\eta_3} \\ &+ \left(v_2 - v_4^{\eta_4}\right)^{\tau\eta_2\eta_3} + \left(v_4^{\eta_3} - v_3\right)^{\tau\eta_2\eta_4} + \left(u_2 - u_5^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_1\eta_3} + \left(u_5^{\eta_1} - v_2\right)^{\tau\eta_2\eta_3} \\ &- \left(u_3 - v_5^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_1\eta_4} - \left(v_5^{\eta_1} - v_3\right)^{\tau\eta_2\eta_4} \equiv_{N-1} \left(v_5^{\eta_2} - u_4^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_1\eta_4} + \left(u_4^{\eta_4} - u_5^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_1\eta_3} \\ &+ \left(u_5^{\eta_1} - v_4^{\eta_4}\right)^{\tau\eta_2\eta_3} + \left(v_4^{\eta_3} - v_5^{\eta_1}\right)^{\tau\eta_2\eta_4} \\ &\equiv_{N-1} \left(v_5^{\eta_4} - u_5^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_1\eta_2} + \left(u_5^{\eta_3} - v_5^{\eta_4}\right)^{\tau\eta_1\eta_2} \equiv_{N-1} 0. \quad \square \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, при котором в двучлене $w = u - v$ одночлен u содержит несколько произведений порождающих, т. е. $u = u_1^{\eta_1} = u_3^{\eta_4} = u_4^{\eta_1\eta_4}$, при этом $\eta_4 = \eta(i'j')$ и $i', j' \notin \{i, j\}$. В следующей лемме покажем, что в этом случае по модулю нуль-тождеств меньших степеней выбор подъема не зависит от выбора i, j.

Лемма 4. *Если* $u = u_1^{\eta_1} = u_3^{\eta_4} = u_4^{\eta_1\eta_4}$, *то*

$$\tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2) \equiv_{N-1} \tau(w; i', j', k, l; p', q'; u_2', v_2').$$

Доказательство. Обозначим

$$t_1 = \tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2), \quad t_2 = \tau(w; i', j', k, l; p', q'; u_2', v_2').$$

По лемме 3 для некоторых u_5, v_5 и $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ имеем

$$t_1 \equiv_{N-1} \left(u_4^{\eta_4} - u_5^{\eta_3\eta_4}\right)^{\tau\eta_1} + \left(u_5^{\eta_1\eta_4} - v_5^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_3} + \left(v_5^{\eta_3} - v_1\right)^{\tau\eta_2},$$
$$t_2 \equiv_{N-1} \left(u_4^{\eta_1} - u_5^{\eta_3\eta_1}\right)^{\tau\eta_4} + \left(u_5^{\eta_1\eta_4} - v_5^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_3} + \left(v_5^{\eta_3} - v_1\right)^{\tau\eta_2},$$

тогда

$$t_1 - t_2 \equiv_{N-1} \left(u_4 - u_5^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_1\eta_4} - \left(u_4 - u_5^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_1\eta_4} = 0. \quad \square$$

Очевидно, что эту лемму можно применять не только к первому слагаемому поднимаемого двучлена, но и ко второму.

Лемма 5. *По модулю нуль-тождеств меньших степеней подъем*

$$w^\tau = \tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2)$$

не зависит от выбора всех параметров подъема $i, j, k, l; p, q; u_2, v_2$.

Доказательство непосредственно следует из лемм 3, 4. $\square$

В следующих трех леммах будет доказано, что всякая функция η, представляющая собой произведение функций $\lambda, \rho, \eta(i)$, заканчивающееся, быть может, перестановкой σ, коммутирует по модулю нуль-тождеств степени $N-1$ с подъемом τ.

Лемма 6. $w^{\rho\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\rho}, w^{\lambda\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\lambda}$.

Доказательство. Заметим вначале, что в этой лемме степень двучлена w^ρ равна N.

По лемме 5

$$w^{\rho\tau} \equiv_{N-1} \left(u_1^\rho - u_2^{\eta_3\rho}\right)^{\tau\eta_1} + \left(u_2^{\eta_1\rho} - v_2^{\eta_2\rho}\right)^{\tau\eta_3} + \left(v_2^{\eta_3\rho} - v_1^\rho\right)^{\tau\eta_2},$$

тогда

$$w^{\rho\tau} \equiv_{N-1} \left(u_1 - u_2^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_1\rho} + \left(u_2^{\eta_1} - v_2^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_3\rho} + \left(v_2^{\eta_3} - v_1\right)^{\tau\eta_2\rho} \equiv_{N-1} w^{\tau\rho}. \quad \square$$

Лемма 7. *Для любой перестановки* σ *выполнено* $w^{\sigma\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\sigma}$.

Несложно заметить, что эта лемма следует из простой переформулировки леммы 5.

Лемма 8. $w^{\eta(p)\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\eta(p)}$.

Доказательство. Заметим, что $\eta(p) = \eta(ij)\sigma = \eta_4\sigma$, где σ — некоторая подходящая перестановка. Учитывая предыдущую лемму, достаточно доказать, что $w^{\eta_4\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\eta_4}$.

По лемме 5

$$w^{\eta_4\tau} \equiv_{N-1} \left(u_1^{\eta_4} - u_2^{\eta_3\eta_4}\right)^{\tau\eta_1} + \left(u_2^{\eta_1\eta_4} - v_2^{\eta_2\eta_4}\right)^{\tau\eta_3} + \left(v_2^{\eta_3\eta_4} - v_1^{\eta_4}\right)^{\tau\eta_2},$$

тогда

$$w^{\eta_4\tau} \equiv_{N-1} \left(u_1 - u_2^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_1\eta_4} + \left(u_2^{\eta_1} - v_2^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_3\eta_4} + \left(v_2^{\eta_3} - v_1\right)^{\tau\eta_2\eta_4} \equiv_{N-1} w^{\tau\eta_4}. \quad \square$$

Их лемм 6–8 следует

Лемма 9. *Пусть* η — *произведение функций* $\lambda, \rho, \eta(\cdot)$, *заканчивающееся перестановкой* σ. *Тогда* $w^{\eta\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\eta}$.

Лемма 10. $(w)^\tau \equiv_{N-1} -(-w)^\tau$.

Доказательство. Пусть

$$w^\tau = \left(u_1 - u_2^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_1} + \left(u_2^{\eta_1} - v_2^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_3} + \left(v_2^{\eta_3} - v_1\right)^{\tau\eta_2}.$$

Тогда по лемме 5

$$(-w)^\tau \equiv_{N-1} \left(v_1 - v_2^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_2} + \left(v_2^{\eta_2} - u_2^{\eta_1}\right)^{\tau\eta_3} + \left(u_2^{\eta_3} - u_1\right)^{\tau\eta_1},$$

а значит, $w^\tau + (-w)^\tau \equiv_{N-1} 0$. $\square$

Лемма 11. *Для любых трех одночленов* $u_1^{\eta_1}, u_2^{\eta_2}, u_3^{\eta_3}$

$$\left(u_1^{\eta_1} - u_2^{\eta_2}\right)^\tau + \left(u_2^{\eta_2} - u_3^{\eta_3}\right)^\tau \equiv_{N-1} \left(u_1^{\eta_1} - u_3^{\eta_3}\right)^\tau.$$

Доказательство. По лемме 5 для подходящих одночленов $v_1^{\eta_1\eta_4}$, $v_2^{\eta_2\eta_4}$, $v_3^{\eta_3\eta_4}$ имеем

$$t_1 = \left(u_1^{\eta_1} - u_2^{\eta_2}\right)^\tau \equiv_{N-1} \left(u_1 - v_1^{\eta_4}\right)^{\tau\eta_1} + \left(v_1^{\eta_1} - v_2^{\eta_2}\right)^{\tau\eta_4} + \left(v_2^{\eta_4} - u_2\right)^{\tau\eta_2},$$

$$t_2 = \left(u_2^{\eta_2} - u_3^{\eta_3}\right)^\tau \equiv_{N-1} \left(u_2 - v_2^{\eta_4}\right)^{\tau\eta_2} + \left(v_2^{\eta_2} - v_3^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_4} + \left(v_2^{\eta_4} - u_3\right)^{\tau\eta_3},$$

$$t_3 = \left(u_1^{\eta_1} - u_3^{\eta_3}\right)^\tau \equiv_{N-1} \left(u_1 - v_1^{\eta_4}\right)^{\tau\eta_1} + \left(v_1^{\eta_1} - v_3^{\eta_3}\right)^{\tau\eta_4} + \left(v_3^{\eta_4} - u_3\right)^{\tau\eta_3},$$

в таком случае очевидно, что $t_1 + t_2 - t_3 \equiv_{N-1} 0$. □

Из этой леммы сразу следует

Лемма 12. *Для любых одночленов* u_1, u_2, u_3 *и скаляров* $\alpha, \beta \in \Phi$

$$\alpha(u_1 - u_2)^\tau + \beta(u_1 - u_3)^\tau \equiv_{N-1} \alpha(u_3 - u_2)^\tau + (\alpha + \beta)(u_1 - u_3)^\tau.$$

Для завершения доказательства предложения 3 докажем

Предложение 4. *Система нуль-тождеств относительно построенного подъема* τ *системы двучленов* W *обладает конечным базисом.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (u_{i1} - u_{i2})^{\tau\eta_i}$ — некоторое нуль-тождество. По лемме 9 такое нуль-тождество сравнимо по модулю нуль-тождеств степени $N-1$ с тождеством $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \left(u_{i1}^{\eta_i} - u_{i2}^{\eta_i}\right)^\tau$.

Итак, осталось доказать, что все нуль-тождества вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (u_{i1} - u_{i2})^\tau$ следуют из нуль-тождеств меньших степеней.

Некоторый двучлен u_1 может встретиться в последнем тождестве несколько раз в различных поднимаемых двучленах, но индукция по леммам 12 и 10 позволяет свести по модулю нуль-тождеств меньших степеней количество таких встреч к одной, не увеличивая при этом общее число различных встречаемых одночленов.

Докажем, что если некоторый одночлен u_1 встретился в указанном тождестве $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (u_{i1} - u_{i2})^\tau$ лишь один раз, то коэффициент α при подъеме двучлена, содержащего одночлен u_1, равен нулю. В самом деле, так как $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (u_{i1} - u_{i2})^\tau$ — нуль-тождество, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (u_{i1} - u_{i2}) = 0$. Поскольку все неассоциативные одночлены образуют базис в алгебре $\Phi[X]$, в частности, линейно независимы, коэффициент при базисном элементе в нулевой линейной комбинации равен нулю.

Итак, удалось доказать, что по модулю нуль-тождеств меньших степеней каждое нуль-тождество достаточно большой степени сравнимо с нулем, т. е. следует из этих тождеств, а это означает, что система нуль-тождеств обладает конечным базисом. □

4. Решетки, порожденные некоторыми многообразиями

Г. В. Дорофеев [12] рассмотрел решетку многообразий, порожденную тремя многообразиями алгебр: всех коммутативных, всех ассоциативных и всех антикоммутативных. Им было доказано, что такая решетка в решетке всех многообразий алгебр изоморфна модулярной решетке с тремя образующими a, b и c и определяющим соотношением $abc = bc$. Более того, Г. В. Дорофеев показал, что эта решетка состоит из 22 элементов.

Нашей целью является доказательство того, что все элементы этой решетки конечнобазируемы. Кроме того, конечная базируемость сохраняется и для довольно широкого класса таких решеток с другими образующими, как это сформулировано в теореме 2.

Приступим к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Так как пересечение $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ многообразия $\mathfrak{B}$ коммутативных алгебр и многообразия $\mathfrak{C}$ антикоммутативных алгебр является нильпотентным индекса 2 многообразием, модулярная решетка ℓ удовлетворяет соотношению $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$.

Это означает, что решетка ℓ является гомоморфным образом решетки ℓ', рассмотренной Г. В. Дорофеевым. Но решетка ℓ' содержит лишь 22 различных многообразий алгебр. Им соответствуют следующие элементы решетки ℓ (может быть, не все различные): $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, $\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})$, $\mathfrak{C} \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} + \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cap (\mathfrak{A}+\mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})$, $\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}+\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$, $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cap (\mathfrak{A}+\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \cap (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$.

Так как всякая коммутативная и всякая антикоммутативная алгебра строго эластична, по предложению 2 заключаем, что многообразия $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ являются ассоциативно-коммутативными многообразиями конечного индекса. Нильпотентное многообразие $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ также является ассоциативно-коммутативным многообразием конечного индекса. Тогда конечная базируемость первых 21 многообразий в приведенном списке проверяется непосредственно по теореме 1 и очевидному соображению, что пересечение конечнобазируемых многообразий является конечнобазируемым многообразием алгебр.

Конечная базируемость последнего многообразия $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}$ следует из того, что многообразие $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ является конечнобазируемым (поскольку пересечение $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ нильпотентно) строго эластичным многообразием. Тогда по предложению 2 имеем, что $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$ — ассоциативно-коммутативное многообразие индекса 4, а по теореме 1 — что $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ является конечнобазируемым многообразием алгебр. $\square$

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность С. В. Пчелинцеву за помощь и руководство при создании этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дорофеев Г. В.* О некоторых свойствах объединения многообразий алгебр // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 1. С. 24–39.
2. *Шашков О. В.* Объединение многообразий с нильпотентным пересечением // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 2. С. 228–242.
3. *Кемер А. Р.* Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 5. С. 597–641.
4. *Вайс А. Я., Зельманов Е. И.* Теорема Кемера для конечнопорожденных йордановых алгебр / Алт. ун-т. Барнаул, 1988. Деп. в ВИНИТИ 29.02.88, № 1607–88.

5. *Ильтяков А. В.* Конечность базиса тождеств конечнопорожденной альтернативной PI-алгебры над полем характеристики 0 // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 61–76.
6. *Ильтяков А. В.* Шпехтовость многообразий PI-представлений конечнопорожденных алгебр Ли над полем нулевой характеристики. Новосибирск, 1991. 52 с. (Препринт/Ин-т математики СО АН СССР; № 10).
7. *Ильтяков А. В.* Шпехтовость идеалов тождеств некоторых простых неассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 3. С. 327–351.
8. *Белов А. Я.* Контрпримеры к проблеме Шпехта // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 3. С. 13–24.
9. *Гришин А. В.* Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2 // Фунд. и прикл. математика. 1999. Т. 5. С. 101–118.
10. *Щиголев В. В.* Примеры бесконечно базируемых T-идеалов // Фунд. и прикл. математика. 1999. Т. 5. С. 307–312.
11. *Дорофеев Г. В.* О многообразиях обобщенно стандартных и обобщенно достижимых алгебр // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 2. С. 143–176.
12. *Дорофеев Г. В.* Объединение многообразий алгебр // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 3. С. 267–291.
13. *Дорофеев Г. В., Пчелинцев С. В.* О многообразиях стандартных и достижимых алгебр // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 5. С. 995–1001.
14. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
15. *Латышев В. Н.* О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, № 5. С. 1010–1037.
16. *Sagle A.* Malcev algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101, N 3. P. 426–458.
17. *Шашков О. В.* Конечная базируемость объединения некоторых многообразий алгебр // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 1. С. 134–137.

Статья поступила 2 апреля 2014 г.

Шашков Олег Владимирович
Московский гос. областной гуманитарный институт,
ул. Зеленая, 22, Орехово-Зуево 142611 Московской обл.
o.v.shashkov@gmail.com