Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 510.64

О ЛИНЕЙНОЙ ЛОГИКЕ ЗНАНИЯ И ВРЕМЕНИ С ИНТРАНЗИТИВНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

В. Ф. Юн

Аннотация. В [1] введена линейная полимодальная логика знания и времени с интранзитивным отношением времени как множество формул, общезначимых в фреймах специального вида. В [2] введено исчисление AS_{LTK_r}, связанное с классом таких фреймов. В данной работе найдена формула линейной логики знания и времени с интранзитивным отношением времени, которая не выводится в исчислении AS_{LTK_r}.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: полимодальная логика, фреймы Крипке, аксиоматизация, полнота.

Введение

В статье исследуется полимодальная линейная логика знания и времени с интранзитивным отношением времени. Более точно, в [1] рассмотрены LTK_r-фреймы $\left\langle \bigcup\limits_{n\in J} C^n, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k \right\rangle$ с R_T-сгустками состояний C^n, интранзитивным на сгустках, праволинейным и рефлексивным R_T, и определена полимодальная логика LTK_r как множество формул, истинных во всех LTK_r-фреймах.

В [2] продолжено исследование логики LTK_r и был рассмотрен вопрос ее аксиоматизации. Авторами найдено исчисление AS_{LTK_r}, корректное относительно класса всех LTK_r-фреймов. Кроме того, в [2] доказана полнота найденного исчисления относительно класса фреймов, связанных с LTK_r-фреймами.

В данной работе найдена формула, не выводимая в исчислении AS_{LTK_r} и общезначимая во всех LTK_r-фреймах. Таким образом, доказано отсутствие полноты AS_{LTK_r} относительно класса всех LTK_r-фреймов.

1. Исчисление AS_{LTK_r} и теорема о корректности

Рассмотрим модальный язык с модальными операторами $\Box_T$, $\Box_\sim$, $\Box_1, \dots,$ $\Box_k$. Более точно, рассмотрим язык, состоящий из счетного множества пропозициональных переменных P, стандартных логических связок и модальных операторов $\Box_T$, $\Box_\sim$, $\Box_1, \dots, \Box_k$. Формулы определяются, как обычно [3].

Будем рассматривать фреймы $\langle W, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k\rangle$ и модели вида $\langle W,$ $R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k, V\rangle$, где W — непустое множество, $R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k$ — бинарные отношения на множестве W, V — означивание переменных, т. е. отображение $V : P \to \mathbb{P}(W)$. Означивание V можно расширить стандартным образом

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ–860.2014.1).

[3] на множество формул рассматриваемого языка. В частности, для любого $x \in W$ имеем $x \models_V p \iff x \in V(p)$ для любой переменной $p \in P$ и

$x \models_V \Box_T A \iff \forall y(xR_T y \Longrightarrow y \models_V A)$,

$x \models_V \Box_\sim A \iff \forall y(xR_\sim y \Longrightarrow y \models_V A)$,

$x \models_V \Box_i A \iff \forall y(xR_i y \Longrightarrow y \models_V A)$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Формула A *истинна в модели* $M = \langle W, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k, V\rangle$, если $x \models_V A$ для любого $x \in W$. Говорим, что формула A *общезначима в фрейме*, если она истинна в любой модели, основанной на этом фрейме.

Определение 1. Фрейм $\langle W, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k\rangle$ называется *LTK_r-фреймом* [2], если выполняются следующие свойства:

(a) $W = \bigcup\limits_{n\in J} C^n$, где $C^n \neq \varnothing$, $J = \{1, \dots, L\}$, $L \in \mathbb{N}$ или $J = \mathbb{N}$;

(b) $xR_T y \iff \exists n \in J((x \in C^n$ и $y \in C^n)$ или $(x \in C^n$ и $y \in C^{n+1}))$;

(c) $xR_\sim y \iff \exists n \in J(x \in C^n$ и $y \in C^n)$;

(d) R_i — некоторое отношение эквивалентности внутри любого C^n, т. е. такое, что из $xR_i y$ следует $x \in C^n$ и $y \in C^n$ для некоторого $n \in J$.

Напомним, что подмножество C_{R_T} ($C_{R_\sim}$) множества W называется *C_{R_T}-сгустком* (*$C_{R_\sim}$-сгустком*), если $\forall w \forall z \in C_{R_T}(wR_T z \& zR_T w)$ и $\forall z \in W \forall w \in C_{R_T}((wR_T z \& zR_T w) \Longrightarrow z \in C_{R_T})$ ($\forall w \forall z \in C_{R_\sim}(wR_\sim z \& zR_\sim w)$ и $\forall z \in W \forall w \in C_{R_\sim}((wR_\sim z \& zR_\sim w) \Longrightarrow z \in C_{R_\sim})$ соответственно).

Таким образом, каждое множество C^n является R_T-сгустком (и $R_\sim$-сгустком), т. е. для $x \in C^n$ имеем $C^n = \{y \mid xR_T y$ и $yR_T x\}$.

Рассмотрим исчисление AS_{LTK_r}, введенное в [2].

Аксиомы AS_{LTK_r}. *Тавтологии классической пропозициональной логики;*

$L_{\Box_T} : \Box_T(\Box_T A \longrightarrow B) \vee \Box_T(\Box_T B \longrightarrow A)$;

$K_{\Box_\xi} : \Box_\xi(A \longrightarrow B) \longrightarrow (\Box_\xi A \longrightarrow \Box_\xi B)$, $\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$;

$T_{\Box_\xi} : \Box_\xi A \longrightarrow A$, $\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$;

$4_{\Box_\xi} : \Box_\xi A \longrightarrow \Box_\xi \Box_\xi A$, $\xi \in \{\sim, 1, \dots, k\}$;

$5_{\Box_\xi} : \neg\Box_\xi A \longrightarrow \Box_\xi \neg\Box_\xi A$, $\xi \in \{\sim, 1, \dots, k\}$;

$M.1 : \Box_T A \longrightarrow \Box_\sim A$;

$M.2 : \Box_\sim A \longrightarrow \Box_i A$, $1 \leq i \leq k$;

$AL : (\Box_\sim A \& \Box_\sim B \& \Diamond_T(\neg A \& \Box_\sim B)) \longrightarrow \Box_T B$.

Правила вывода. MP : $\dfrac{A, A \longrightarrow B}{B}$, Nec : $\dfrac{A}{\Box_T A}$.

Здесь и далее $\Diamond_\xi$ — сокращение для $\neg\Box_\xi\neg$ ($\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$).

Введем класс фреймов, содержащий класс LTK_r-фреймов, и докажем, что исчисление AS_{LTK_r} корректно относительно этого класса.

Определение 2. Фрейм $\langle W, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k\rangle$ будем называть *$\widetilde{LTK_r}$-фреймом*, если он удовлетворяет условиям:

$\mathrm{PL}_{\Box_T}$: если $xR_T y$ и $xR_T z$, то $yR_T z$ или $zR_T y$;

$\mathrm{PT}_{\Box_\xi}$: отношения $R_T, R_\sim, R_i$ $(1 \leq i \leq k)$ рефлексивны;

$\mathrm{P4}_{\Box_\xi}$: отношения $R_\sim, R_i$ $(1 \leq i \leq k)$ транзитивны;

$\mathrm{P5}_{\Box_\xi}$: отношения $R_\sim, R_i$ $(1 \leq i \leq k)$ симметричны;

PM. 1 : если $xR_\sim y$, то $xR_T y$;

PM. 2 : если $xR_i y$, то $xR_\sim y$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$;

PAL : если $xR_T yR_T z$ и x, y, z принадлежат различным $R_\sim$-сгусткам, то неверно, что $xR_T z$.

Модель, основанную на $\widetilde{LTK_r}$-фрейме, будем называть *$\widetilde{LTK_r}$-моделью.*

Теорема 1. *Для любой формулы A верно: если A выводима в AS_{LTK_r}, то A общезначима в любом $\widetilde{LTK_r}$-фрейме.*

Доказательство. Достаточно доказать, что аксиомы исчисления AS_{LTK_r} общезначимы в любом $\widetilde{LTK_r}$-фрейме.

Докажем общезначимость аксиомы $L_{\Box_T}$. Предположим, что формула

$$\Box_T(\Box_T A \longrightarrow B) \vee \Box_T(\Box_T B \longrightarrow A)$$

не общезначима. Тогда она опровергается в некоторой $\widetilde{LTK_r}$-модели $\langle W, R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_k, V\rangle$, т. е. $x \not\models_V \Box_T(\Box_T A \longrightarrow B) \vee \Box_T(\Box_T B \longrightarrow A)$ для некоторого $x \in W$. Тогда $x \models_V \Diamond_T(\Box_T A \& \neg B) \& \Diamond_T(\Box_T B \& \neg A)$. Следовательно, существует $y \in W$ такой, что xR_Ty и $y \models_V \Box_T A \& \neg B$, и существует $z \in W$ такой, что xR_Tz и $z \models_V \Box_T B \& \neg A$.

Так как xR_Ty и xR_Tz, по свойству $\mathrm{PL}_{\Box_T}$ имеем yR_Tz или zR_Ty. Если yR_Tz, то $z \models_V A$, поскольку $y \models_V \Box_T A$. Это противоречит тому, что $z \models_V \neg A$. Случай, когда zR_Ty, доказывается аналогично.

Общезначимость формул $T_{\Box_\xi}$, $4_{\Box_\xi}$, $5_{\Box_\xi}$, $M.1$, $M.2$ легко следует из соответствующих свойств $\widetilde{LTK_r}$-фреймов.

Докажем общезначимость во всех $\widetilde{LTK_r}$-фреймах формулы AL. Пусть $\langle W, R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_k\rangle$ — произвольный $\widetilde{LTK_r}$-фрейм, $V : P \to \mathbb{P}(W)$ — означивание, $x \in W$ и $x \models_V \Box_\sim A \& \Box_\sim B \& \Diamond_T(\neg A \& \Box_\sim B)$. Докажем, что $x \models_V \Box_T B$.

Предположим, что это неверно, т. е. $x \not\models_V \Box_T B$. Тогда существует $u \in W$ такой, что xR_Tu и $u \not\models_V B$.

Так как $x \models_V \Box_\sim A \& \Box_\sim B \& \Diamond_T(\neg A \& \Box_\sim B)$, верно

(1) $\forall y \in W(xR_\sim y \Longrightarrow y \models_V A \& B)$,

(2) $\exists z(xR_Tz$ и $z \models_V \neg A$ и $\forall v(zR_\sim v \Longrightarrow v \models_V B))$.

Поскольку $z \models_V \neg A$, из (1) получаем, что верно $\neg(xR_\sim z)$. В силу того, что $u \not\models_V B$, из (1) получаем, что $\neg(xR_\sim u)$. Кроме того, из п. (2) следует, что выполняется $\neg(zR_\sim u)$. Таким образом, x, z, u принадлежат различным $R_\sim$-сгусткам.

Так как xR_Tz и xR_Tu, по свойству $\mathrm{PL}_{\Box_T}$ имеем zR_Tu или uR_Tz. Если zR_Tu, то для x, z, u, принадлежащих различным $R_\sim$-сгусткам, верно xR_TzR_Tu и xR_Tu. Это противоречит свойству PAL.

Если uR_Tz, то для x, z, u, принадлежащих различным $R_\sim$-сгусткам, верно xR_TuR_Tz и xR_Tz. Получили противоречие со свойством PAL.

Таким образом, предположение $x \not\models_V \Box_T B$ неверно, и общезначимость формулы AL доказана. $\Box$

2. Контрпример

В этом разделе докажем отсутствие полноты исчисления AS_{LTK_r} относительно класса LTK_r-фреймов.

Теорема 2. *Существует формула A_0 такая, что A_0 общезначима во всех LTK_r-фреймах, и она не выводится в AS_{LTK_r}.*

Доказательство. Рассмотрим формулу $\Diamond_T\Diamond_\sim p \longrightarrow \Diamond_T p$. Докажем сначала, что она общезначима во всех LTK_r-фреймах.

Предложение 1. *Формула $\Diamond_T\Diamond_\sim p \longrightarrow \Diamond_T p$ общезначима в любом LTK_r-фрейме.*

Доказательство. Пусть $\langle W, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k\rangle$ — произвольный LTK_r-фрейм, V — означивание, $x \in W$ и $x \models_V \Diamond_T\Diamond_\sim p$. Докажем, что $x \models_V \Diamond_T p$.

Из $x \models_V \Diamond_T\Diamond_\sim p$ следует, что существуют $y, z \in W$ такие, что xR_Ty, $yR_\sim z$ и $z \models_V p$.

Так как xR_Ty, то $\exists n \in J((x \in C^n$ и $y \in C^n)$ или $(x \in C^n$ и $y \in C^{n+1}))$. Если $x \in C^n$ и $y \in C^n$ для некоторого $n \in J$, то $z \in C^n$, так как $yR_\sim z$. Следовательно, xR_Tz. Если $x \in C^n$ и $y \in C^{n+1}$ для некоторого $n \in J$, то $z \in C^{n+1}$, поскольку $yR_\sim z$. Стало быть, и в этом случае верно xR_Tz. Таким образом, найдется $z \in W$ такой, что xR_Tz и $z \models_V p$. Следовательно, $x \models_V \Diamond_T p$, и предложение доказано. $\square$

Для краткости обозначим формулу $\Diamond_T\Diamond_\sim p \longrightarrow \Diamond_T p$ через A_0. Покажем, что формула A_0 не выводима в исчислении AS_{LTK_r}. Для этого сначала докажем, что A_0 не общезначима во всех $\widetilde{LTK_r}$-фреймах.

Предложение 2. *Формула A_0 опровергается в некоторой $\widetilde{LTK_r}$-модели.*

Доказательство. Рассмотрим фрейм $\mathbb{F} = \langle W, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k\rangle$, где
(a) $W = C^0 \cup C^1$, где $C^0 = \{x\}$, $C^1 = \{y, z\}$ и $C^0 \cap C^1 = \varnothing$;
(b) $uR_Tw \iff [(u = x$ и $w = y)$ или $\exists n \in \{0, 1\}(u \in C^n$ и $w \in C^n)]$;
(c) $uR_\sim w \iff \exists n \in \{0, 1\}(u \in C^n$ и $w \in C^n)$;
(d) $R_i = R_\sim$, $1 \le i \le k$.

Нетрудно заметить, что данный фрейм является $\widetilde{LTK_r}$-фреймом. Пусть означивание $V : P \to \mathbb{P}(W)$ переменных в нем таково, что $V(p) = \{z\}$. Тогда

$$x \not\models_V p, \quad y \not\models_V p, \quad z \models_V p.$$

Тем самым $y \models_V \Diamond_\sim p$, следовательно, $x \models_V \Diamond_T\Diamond_\sim p$. Кроме того, верно $x_V \models \Box_T\neg p$. Таким образом, $x \models_V \Diamond_T\Diamond_\sim p \& \Box_T\neg p$, т. е. формула A_0 опровергается в $\widetilde{LTK_r}$-модели $\langle \mathbb{F}, V\rangle$. $\square$

Из теоремы 1 и предложения 2 получаем

Предложение 3. *Формула A_0 не выводима в исчислении AS_{LTK_r}.*

Из предложения 3 и общезначимости формулы A_0 в всех LTK_r-фреймах сразу следует, что исчисление AS_{LTK_r} не является полным относительно класса LTK_r-фреймов. $\square$

Автор выражает огромную признательность и благодарность Л. Л. Максимовой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lukyanchuk A.* Decidability of multi-modal logic LTK of linear time and knowledge // J. Sib. Federal Univ. 2013. V. 6, N 2. P. 220–226.
2. *Лукьянчук А. Н., Римацкий В. В.* Аксиоматизация линейной логики знания и времени LTK_r с интранзитивным отношением времени // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1304–1314.

3. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal logic. Oxford: Clarendon Press, 1997. (Oxford Logic Guides; Book 35).

Статья поступила 9 декабря 2014 г.

Юн Вета Федоровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
veta_v@mail.ru