Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 517.984

ДЗЕТА–ИНВАРИАНТЫ СТЕКЛОВСКОГО СПЕКТРА ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Е. Г. Малькович, В. А. Шарафутдинов

Аннотация. Классическая обратная задача определения гладкой односвязной плоской области по ее стекловскому спектру [1] эквивалентна задаче восстановления, с точностью до конформной эквивалентности, положительной функции $a \in C^\infty(\mathbb{S})$ на единичной окружности $\mathbb{S} = \{e^{i\theta}\}$ по спектру оператора $a\Lambda_e$, где $\Lambda_e = (-d^2/d\theta^2)^{1/2}$. Вводятся $2k$-формы $Z_k(a)$ $(k = 1, 2, \dots)$ от коэффициентов Фурье функции a, которые называются *дзета-инвариантами.* Эти инварианты однозначно определяются собственными числами оператора $a\Lambda_e$. Изучаются некоторые свойства форм $Z_k(a)$, в частности, их инвариантность относительно действия конформной группы. Ряд открытых вопросов о дзета-инвариантах поставлен в конце статьи.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.411

Ключевые слова: стекловский спектр, оператор Дирихле — Неймана, дзета-функция, обратные спектральные задачи.

1. Введение. Три формы обратной задачи для стекловского спектра

Пусть $\mathbb{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ — единичный круг и $\mathbb{S} = \partial D = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ — единичная окружность. Определим псевдодифференциальный оператор первого порядка

$$\Lambda_e = \sqrt{-d^2/d\theta^2} : C^\infty(\mathbb{S}) \to C^\infty(\mathbb{S}). \tag{1.1}$$

Эквивалентное определение этого оператора состоит в задании его значений на элементах тригонометрического базиса: $\Lambda_e e^{in\theta} = |n|\, e^{in\theta}$. По причине, объясненной чуть ниже, Λ_e называется *оператором Дирихле — Неймана евклидовой метрики* e (сокращенно ДН-*оператором*). Спектр этого оператора таков:

$$\mathrm{Sp}(\Lambda_e) = \{0, 1, 1, 2, 2, \dots\},$$

где каждое собственное число повторяется столько раз, какова его кратность.

Для положительной функции $a \in C^\infty(\mathbb{S})$ оператор $a\Lambda_e$ также имеет дискретный неотрицательный спектр

$$\mathrm{Sp}(a\Lambda_e) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots\},$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке государственной программы Российской Федерации по поддержке исследований (контракт 14.B25.31.0029). Работа была начата вторым автором во время его пребывания в институте Миттаг-Леффлера (Швеция) в течение января — марта 2013 г. в рамках программы «Обратные задачи». Второй автор выражает благодарность институту за финансовую поддержку и гостеприимство. Второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 15–01–05929).

который будет называться *стекловским спектром* оператора $a\Lambda_e$. В настоящей статье обсуждается вопрос: в какой степени функция $0 < a \in C^\infty(\mathbb{S})$ определяется стекловским спектром $\mathrm{Sp}(a\Lambda_e)$? Эта задача обладает естественной калибровочной группой, состоящей из всех конформных и антиконформных преобразований круга $\mathbb{D}$. Приведем соответствующее определение.

Производная $d\varphi/d\theta \in C^\infty(\mathbb{S})$ гладкого отображения $\varphi : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ определяется равенством $\varphi^*(d\theta) = (d\varphi/d\theta)\, d\theta$.

Определение 1.1. Говорят, что две функции $a, b \in C^\infty(\mathbb{S})$ *конформно эквивалентны*, если существует такое конформное или антиконформное преобразование $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, что

$$b = a \circ \varphi |d\varphi/d\theta|^{-1}, \quad \text{где } \varphi = \Phi|_{\mathbb{S}}. \tag{1.2}$$

Если функции a и b не обращаются в нуль, то уравнение (1.2) может быть также записано в виде

$$d\theta/b(\theta) = \pm\varphi^*(d\theta/a(\theta)).$$

Замечание. Подчеркнем следующее отличие приведенного определения от соответствующего определения из [2, § 3]: две положительные функции a и b конформно эквивалентны в смысле нашего определения тогда и только тогда, когда функции $1/a$ и $1/b$ являются e-конформно эквивалентными в смысле [2]. Это отличие возникло из нашего желания упростить обозначение $a^{-1}\Lambda_e$ до $a\Lambda_e$. Формально говоря, оператор $a\Lambda_e$ определен для произвольной (комплекснозначной) функции $a \in C^\infty(\mathbb{S})$, и некоторые из наших результатов справедливы в этой общности, но спектр $\mathrm{Sp}(a\Lambda_e)$ будет обсуждаться только в случае положительной функции a.

Нетрудно доказать, что $\mathrm{Sp}(a\Lambda_e) = \mathrm{Sp}(b\Lambda_e)$ для конформно эквивалентных положительных функций $a, b \in C^\infty(\mathbb{S})$ (см. [2]). Вопрос о справедливости обратного утверждения остается открытым.

Гипотеза 1.2. *Для двух положительных функций $a, b \in C^\infty(\mathbb{S})$ равенство*

$$\mathrm{Sp}(a\Lambda_e) = \mathrm{Sp}(b\Lambda_e) \tag{1.3}$$

справедливо тогда и только тогда, когда эти функции конформно эквивалентны.

По правде сказать, мы настроены довольно пессимистично по отношению к справедливости этой гипотезы в общем случае. Однако эта задача имеет много разновидностей, достойных исследования, даже если ответ на поставленный вопрос отрицателен в общем случае. Например, вопрос может быть поставлен так: как много положительных функций $a \in C^\infty(\mathbb{S})$ удовлетворяют (1.3) для данной функции $0 < b \in C^\infty(\mathbb{S})$? Мы склоняемся к мнению, что для «почти всех» b такая функция a единственна с точностью до конформной эквивалентности.

Поставленная задача имеет две другие эквивалентные формы, которые вкратце здесь обсудим (см. подробнее в [2]).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область, ограниченная гладкой замкнутой кривой $\partial\Omega$. *Стекловский спектр* $\mathrm{Sp}(\Omega)$ такой области состоит из тех $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых краевая задача

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \partial u/\partial\nu|_{\partial\Omega} = -\lambda u|_{\partial\Omega}$$

имеет нетривиальное решение. Здесь ν — единичный вектор внешней нормали к краю. Известно, что спектр $\mathrm{Sp}(\Omega)$ дискретен и неотрицателен. Классическая обратная задача состоит в следующем: в какой степени односвязная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ определяется своим стекловским спектром? Здесь естественная гипотеза звучит так.

Гипотеза 1.3. *Гладкая односвязная ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ определяется своим стекловским спектром однозначно с точностью до изометрии плоскости $\mathbb{R}^2$, снабженной стандартной евклидовой метрикой e.*

Гипотезы 1.2 и 1.3 эквивалентны, если многолистные области включены в рассмотрение (см. детали в [2]). Соответствие между двумя видами стекловского спектра устанавливается следующим образом: если $\Phi : \mathbb{D} \to \Omega$ — конформное отображение, то $\mathrm{Sp}(\Omega) = \mathrm{Sp}(a\Lambda_e)$, где $1/a = |\Phi'|_{\mathbb{S}}|$.

Если g — риманова метрика на круге $\mathbb{D}$, то через Δ_g обозначаем оператор Лапласа — Бельтрами этой метрики. ДН-оператор такой метрики определяется следующим образом:

$$\Lambda_g : C^\infty(\mathbb{S}) \to C^\infty(\mathbb{S}), \quad \Lambda_g(f) = -\partial u/\partial \nu|_{\mathbb{S}},$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к $\mathbb{S}$ относительно метрики g, а u — решение задачи Дирихле

$$\Delta_g u = 0 \text{ в } \mathbb{D}, \quad u|_{\mathbb{S}} = f.$$

Это совпадает с (1.1) в случае евклидовой метрики. Опять спектр $\mathrm{Sp}(\Lambda_g)$ дискретен и неотрицателен. Снова ставим обратную задачу: в какой мере риманова метрика g на круге $\mathbb{D}$ определяется спектром $\mathrm{Sp}(\Lambda_g)$? Здесь естественная гипотеза звучит следующим образом.

Гипотеза 1.4. *Риманова метрика на единичном круге определяется своим стекловским спектром однозначно с точностью до конформной эквивалентности. Точнее, если g и g' — две метрики на $\mathbb{D}$, то равенство $\mathrm{Sp}(\Lambda_g) = \mathrm{Sp}(\Lambda_{g'})$ справедливо тогда и только тогда, когда существуют такой диффеоморфизм $\Psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ и такая функция $0 < \rho \in C^\infty(D)$, что $\rho|_{\mathbb{S}} = 1$ и $g' = \rho\Psi^* g$.*

Гипотезы 1.2 и 1.4 эквивалентны, как доказано в [2]. Первая версия обратной задачи выглядит, возможно, проще с аналитической точки зрения, поскольку в ней речь идет об отыскании одной функции действительного аргумента. С другой стороны, две последние формы обратной задачи выглядят более естественно с геометрической точки зрения. Разумеется, любой прогресс в одной из этих постановок повлечет соответствующие результаты для двух других.

2. Дзета-инварианты

Наша основная конструкция является фактически обобщением некоторых аргументов Эдварда [1, теорема 2]. Напомним, что $\mathbb{S} = \{e^{i\theta}\}$ — единичная окружность. Для функции $a \in C^\infty(\mathbb{S})$ через $\hat{a}_n$ обозначим ее коэффициенты Фурье, т. е.

$$a(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{a}_n e^{in\theta}.$$

Для каждого целого $k \geq 1$ определим

$$Z_k(a) = \sum_{j_1+\dots+j_{2k}=0} N_{j_1\dots j_{2k}} \hat{a}_{j_1}\hat{a}_{j_2}\dots\hat{a}_{j_{2k}}, \tag{2.1}$$

где при $j_1 + \dots + j_{2k} = 0$

$$N_{j_1 \dots j_{2k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big[|n(n+j_1)(n+j_1+j_2)\dots(n+j_1+\dots+j_{2k-1})| \\ - n(n+j_1)(n+j_1+j_2)\dots(n+j_1+\dots+j_{2k-1})\big]. \quad (2.2)$$

Величины $Z_k(a)$ ($k = 1, 2, \dots$) будут называться *дзета-инвариантами* функции a (или оператора $a\Lambda_e$). Заметим, что лишь конечное число слагаемых отлично от нуля в правой части равенства (2.2), поскольку произведение

$$f(n) = n(n+j_1)(n+j_1+j_2)\dots(n+j_1+\dots+j_{2k-1}) \quad (2.3)$$

является многочленом степени $2k$ по n, который принимает положительные значения при достаточно больших $|n|$.

Ряд (2.1) абсолютно сходится, так как коэффициенты Фурье $\hat{a}_n$ быстро убывают. Соответствующие оценки приведем в конце настоящего раздела.

Подчеркнем, что определение (2.1) имеет смысл для любой (комплексно-значной) функции $a \in C^\infty(\mathbb{S})$. Таким образом, величины $Z_k(a)$ явно выражаются через коэффициенты Фурье функции a, хотя и довольно замысловатым образом. С другой стороны, в случае положительной функции a дзета-инварианты однозначно определяются собственными числами оператора $a\Lambda_e$, как утверждает приводимая ниже теорема 2.1. Прежде чем формулировать эту теорему, обсудим некоторые вспомогательные понятия.

В оставшейся части этого раздела рассматриваем положительную функцию $a \in C^\infty(\mathbb{S})$, нормированную условием

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a(\theta)} = 1. \quad (2.4)$$

Пусть $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots\}$ — спектр оператора $a\Lambda_e$. *Дзета-функция* этого оператора определяется равенством

$$\zeta_a(s) = \mathrm{Tr}[(a\Lambda_e)^{-s}] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}. \quad (2.5)$$

Напомним [1], что спектры операторов $a\Lambda_e$ и Λ_e имеют одинаковую асимптотику. Отсюда вытекает сходимость ряда (2.5) в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 1$, а также возможность продолжения $\zeta_a(s)$ до мероморфной на $\mathbb{C}$ функции с единственным простым полюсом в точке $s = 1$. Более того, разность $\zeta_a(s) - 2\zeta_R(s)$ является целой функцией, где $\zeta_R(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ — классическая дзета-функция Римана.

Теорема 2.1. *Для любой функции $0 < a \in C^\infty(\mathbb{S})$, удовлетворяющей (2.4), и для любого $k \ge 1$*

$$Z_k(a) = \zeta_a(-2k).$$

Для доказательства теоремы понадобится

Лемма 2.2. *Введем оператор $D_\theta = -i\frac{d}{d\theta} : C^\infty(\mathbb{S}) \to C^\infty(\mathbb{S})$ на единичной окружности $\mathbb{S} = \{e^{i\theta}\}$. Для произвольной функции $0 < a \in C^\infty(\mathbb{S})$, удовлетворяющей (2.4), операторы aD_θ и D_θ сплетаемы, т. е. существует такой* *диффеоморфизм* $\varphi : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, *что* $aD_\theta = \varphi^* \circ D_\theta \circ \varphi^{*-1}$, *где* $\varphi^* u = u \circ \varphi$ *для* $u \in C^\infty(\mathbb{S})$.

Доказательство. Определим диффеоморфизм $\varphi : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ равенством

$$\varphi(e^{i\theta}) = \exp\left[i\int\limits_0^\theta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right].$$

Тогда $\frac{d\varphi}{d\theta} = a^{-1}(\theta)$.

Для любой функции $u \in C^\infty(\mathbb{S})$

$$\begin{aligned}(D_\theta \circ \varphi^*)u = D_\theta(u \circ \varphi) = (D_\theta u) \circ \varphi \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} &= a^{-1}(D_\theta u) \circ \varphi \\ &= a^{-1}\varphi^*(D_\theta u) = a^{-1}(\varphi^* \circ D_\theta)(u).\end{aligned}$$

Таким образом, $a(D_\theta \circ \varphi^*) = \varphi^* \circ D_\theta$. Это может быть переписано в виде $(aD_\theta) \circ \varphi^* = \varphi^* \circ D_\theta$, или $aD_\theta = \varphi^* \circ D_\theta \circ \varphi^{*-1}$. $\square$

Согласно лемме операторы $(aD_\theta)^2$ и $D_\theta^2 = \Lambda_e^2$ сплетаемы и, следовательно,

$$\mathrm{Tr}[(aD_\theta)^{2s}] = \mathrm{Tr}\left[\Lambda_e^{2s}\right] \quad (\mathrm{Re}\, s < -1).$$

В дальнейшем будем пользоваться лишь этим соотношением.

Доказательство теоремы 2.1. Напомним, что классическая дзета-функция Римана имеет нули в четных отрицательных целых точках: $\zeta_R(-2k) = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$. Поэтому

$$\zeta_a(-2k) = \zeta_a(-2k) - 2\zeta_R(-2k) = \mathrm{Tr}\left[(a\Lambda_e)^{2k} - D_\theta^{2k}\right].$$

Отсюда с помощью леммы 2.2 заключаем, что

$$\zeta_a(-2k) = \mathrm{Tr}[(a\Lambda_e)^{2k} - (aD_\theta)^{2k}]. \tag{2.6}$$

Найдем правую часть формулы (2.6) посредством вычисления значений операторов $(a\Lambda_e)^{2k}$ и $(aD_\theta)^{2k}$ на элементах тригонометрического базиса $e^{in\theta}$.

Индукцией по k докажем справедливость формулы

$$\begin{aligned}(a\Lambda_e)^{2k}e^{in\theta} = \sum_{r_1,\dots,r_k}\ \sum_{j_1+j_2=r_1-n}\ \sum_{j_3+j_4=r_2-r_1} \cdots \sum_{j_{2k-1}+j_{2k}=r_k-r_{k-1}} |nr_1\dots r_{k-1}| \\ \times |(n+j_1)(r_1+j_3)(r_2+j_5)\dots(r_{k-1}+j_{2k-1})|\hat{a}_{j_1}\hat{a}_{j_2}\dots\hat{a}_{j_{2k}}e^{ir_k\theta}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Начнем с очевидного равенства $(a\Lambda_e)e^{in\theta} = |n|a\,e^{in\theta}$. Применяя к этому равенству оператор $a\Lambda_e$, получаем

$$\begin{aligned}(a\Lambda_e)^2 e^{in\theta} &= |n|a\Lambda_e(ae^{in\theta}) = |n|a\Lambda_e\Big(\sum_{j_1}\hat{a}_{j_1}e^{i(n+j_1)\theta}\Big) \\ &= |n|a\sum_{j_1}\hat{a}_{j_1}|n+j_1|e^{i(n+j_1)\theta} = \sum_{j_2}\hat{a}_{j_2}e^{ij_2\theta}\sum_{j_1}\hat{a}_{j_1}|n(n+j_1)|e^{i(n+j_1)\theta} \\ &= \sum_r\Big(\sum_{j_1+j_2=r-n}|n(n+j_1)|\hat{a}_{j_1}\hat{a}_{j_2}\Big)e^{ir\theta}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Это совпадает с (2.7) при $k = 1$.

Проведем индукционный шаг, для чего применим оператор $(a\Lambda_e)^2$ к равенству (2.7):

$$(a\Lambda_e)^{2(k+1)}e^{in\theta}=\sum_{r_1,\dots,r_k}\sum_{j_1+j_2=r_1-n}\sum_{j_3+j_4=r_2-r_1}\dots\sum_{j_{2k-1}+j_{2k}=r_k-r_{k-1}}|nr_1\dots r_{k-1}|$$
$$\times|(n+j_1)(r_1+j_3)\dots(r_{k-1}+j_{2k-1})|\hat a_{j_1}\dots\hat a_{j_{2k}}(a\Lambda_e)^2e^{ir_k\theta}.$$

Используя (2.8), получим

$$(a\Lambda_e)^{2(k+1)}e^{in\theta}=\sum_{r_1,\dots,r_k}\sum_{j_1+j_2=r_1-n}\sum_{j_3+j_4=r_2-r_1}\dots\sum_{j_{2k-1}+j_{2k}=r_k-r_{k-1}}|nr_1\dots r_{k-1}|$$
$$\times|(n+j_1)(r_1+j_3)\dots(r_{k-1}+j_{2k-1})|\hat a_{j_1}\dots\hat a_{j_{2k}}$$
$$\times\sum_{r_{k+1}}\sum_{j_{2k+1}+j_{2k+2}=r_{k+1}-r_k}|r_k(r_k+j_{2k+1})|\hat a_{j_{2k+1}}\hat a_{j_{2k+2}}e^{ir_{k+1}\theta}.$$

После изменения порядка суммирования это дает (2.7) при $k:=k+1$. Таким образом, формула (2.7) доказана.

Формула

$$(aD_\theta)^{2k}e^{in\theta}=\sum_{r_1,\dots,r_k}\sum_{j_1+j_2=r_1-n}\sum_{j_3+j_4=r_2-r_1}\dots\sum_{j_{2k-1}+j_{2k}=r_k-r_{k-1}}nr_1\dots r_{k-1}$$
$$\times(n+j_1)(r_1+j_3)(r_2+j_5)\dots(r_{k-1}+j_{2k-1})\hat a_{j_1}\dots\hat a_{j_{2k}}e^{ir_k\theta}\tag{2.9}$$

доказывается путем повторения рассуждений, использованных при доказательстве формулы (2.7). Фактически нет нужды в таком повторении, достаточно лишь сравнить равенства

$$(a\Lambda_e)e^{in\theta}=|n|ae^{in\theta},\quad(aD_\theta)e^{in\theta}=nae^{in\theta},$$

из которых видно, что все формулы для $a\Lambda_e$ становятся справедливыми также и для aD_θ, если в них стереть знаки модуля.

Вычитая (2.9) из (2.7), получаем

$$[(a\Lambda_e)^{2k}-(aD_\theta)^{2k}]e^{in\theta}=\sum_{r_1,\dots,r_k}\sum_{j_1+j_2=r_1-n}\sum_{j_3+j_4=r_2-r_1}$$
$$\dots\sum_{j_{2k-1}+j_{2k}=r_k-r_{k-1}}N(n;r_1,\dots,r_{k-1};j_1,j_3,\dots,j_{2k-1})\hat a_{j_1}\dots\hat a_{j_{2k}}e^{ir_k\theta},\tag{2.10}$$

где использовано временное обозначение

$$N(n;r_1,\dots,r_{k-1};j_1,j_3,\dots,j_{2k-1})=|nr_1\dots r_{k-1}(n+j_1)(r_1+j_3)\dots(r_{k-1}+j_{2k-1})|$$
$$-nr_1\dots r_{k-1}(n+j_1)(r_1+j_3)\dots(r_{k-1}+j_{2k-1}).$$

Для вычисления следа оператора $(a\Lambda_e)^{2k}-(aD_\theta)^{2k}$ надо выделить коэффициент при $e^{in\theta}$ в правой части равенства (2.10), т. е. положить $r_k=n$, а затем выполнить суммирование по n:

$$\mathrm{Tr}[(a\Lambda_e)^{2k}-(aD_\theta)^{2k}]$$
$$=\sum_n\sum_{r_1,\dots,r_{k-1}}\sum_{j_1+j_2=r_1-n}\sum_{j_3+j_4=r_2-r_1}$$
$$\dots\sum_{j_{2k-3}+j_{2k-2}=r_{k-1}-r_{k-2}}\sum_{j_{2k-1}+j_{2k}=n-r_{k-1}}N(n;r_1,\dots,r_{k-1};j_1,j_3,\dots,j_{2k-1})$$
$$\times\hat a_{j_1}\dots\hat a_{j_{2k}}.\tag{2.11}$$

Теперь поменяем порядок суммирования в (2.11) так, чтобы суммирование по n стало самым внутренним (возможность изменения порядка суммирования легко обосновать). Для этого, зафиксировав значение n, полагаем

$$\begin{gathered}
r_1 = j_1 + j_2 + n = n + j_1 + j_2,\\
r_2 = j_3 + j_4 + r_1 = n + j_1 + j_2 + j_3 + j_4,\\
\dots\dots\dots\dots\\
r_{k-1} = j_{2k-3} + j_{2k-2} + r_{k-2} = n + j_1 + j_2 + \dots + j_{2k-2}.
\end{gathered}$$

Тогда (2.11) принимает вид

$$\operatorname{Tr}[(a\Lambda_e)^{2k} - (aD_\theta)^{2k}] = \sum_{j_1+\dots+j_{2k}=0} \sum_n \widetilde{N}(n; j_1, \dots, j_{2k-1}) \hat{a}_{j_1} \dots \hat{a}_{j_{2k}}, \tag{2.12}$$

где

$$\begin{aligned}
&\widetilde{N}(n; j_1, \dots, j_{2k-1})\\
&= N(n; n + j_1 + j_2, n + j_1 + j_2 + j_3 + j_4, \dots, n + j_1 + \dots + j_{2k-2}; j_1, j_3, \dots, j_{2k-1})\\
&\qquad = |n(n + j_1)(n + j_1 + j_2) \dots (n + j_1 + j_2 + \dots + j_{2k-1})|\\
&\qquad\qquad - n(n + j_1)(n + j_1 + j_2) \dots (n + j_1 + j_2 + \dots + j_{2k-1}).
\end{aligned}$$

Правая часть формулы (2.12) совпадает с правой частью равенства (2.1). Тем самым доказано, что

$$\operatorname{Tr}[(a\Lambda_e)^{2k} - (aD_\theta)^{2k}] = Z_k(a).$$

Вместе с (2.6) это дает утверждение теоремы. $\square$

Обсудим ряд (2.1) более детально. Коэффициенты ряда обладают следующей четностью:

$$N_{-j_1,\dots,-j_{2k}} = N_{j_1\dots j_{2k}} \quad (j_1 + \dots + j_{2k} = 0), \tag{2.13}$$

что доказывается путем замены $m = -n$ индекса суммирования в (2.2). Эти коэффициенты также не меняются при циклической перестановке всех индексов:

$$N_{j_1 j_2 \dots j_{2k}} = N_{j_2 j_3 \dots j_{2k} j_1} = \dots = N_{j_{2k} j_1 \dots j_{2k-1}} \quad (j_1 + \dots + j_{2k} = 0), \tag{2.14}$$

что доказывается путем изменения $m = n + j_1$ индекса суммирования в (2.2). Но вообще говоря, коэффициенты $N_{j_1\dots j_{2k}}$ не инвариантны относительно произвольной перестановки индексов.

Имеет смысл симметризовать коэффициенты $2k$-формы (2.1), т. е. переписать эту форму в виде

$$Z_k(a) = \sum_{j_1,\dots,j_{2k}=-\infty}^{\infty} Z_{j_1\dots j_{2k}} \hat{a}_{j_1} \dots \hat{a}_{j_{2k}}, \tag{2.15}$$

где

$$\begin{gathered}
Z_{j_1\dots j_{2k}} = 0 \quad \text{при } j_1 + \dots + j_{2k} \ne 0,\\
Z_{j_1\dots j_{2k}} = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\pi\in\Pi_{2k}} N_{j_{\pi(1)}\dots j_{\pi(2k)}} \quad \text{при } j_1 + \dots + j_{2k} = 0.
\end{gathered} \tag{2.16}$$

Здесь Π_{2k} — группа всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, 2k\}$. Коэффициенты $Z_{j_1\dots j_{2k}}$ симметричны, т. е. инвариантны относительно любой перестановки индексов $(j_1,\dots,j_{2k})$. Конечно, симметризация сохраняет свойство четности (2.13), т. е.

$$Z_{-j_1,\dots,-j_{2k}} = Z_{j_1\dots j_{2k}}. \tag{2.17}$$

Отсюда вытекает важное утверждение: все дзета-инварианты действительны для действительной функции a. В самом деле, применяя комплексное сопряжение к равенству (2.15) и учитывая действительность коэффициентов $Z_{j_1\dots j_{2k}}$, имеем

$$\overline{Z_k(a)} = Z_k(\bar a) = \sum_{j_1,\dots,j_{2k}=-\infty}^{\infty} Z_{j_1\dots j_{2k}}\overline{\hat a}_{j_1}\dots\overline{\hat a}_{j_{2k}}.$$

Коэффициенты Фурье действительной функции удовлетворяют $\overline{\hat a}_j = \hat a_{-j}$. Поэтому последняя формула приобретает вид

$$\overline{Z_k(a)} = \sum_{j_1,\dots,j_{2k}=-\infty}^{\infty} Z_{-j_1,\dots,-j_{2k}}\hat a_{j_1}\dots\hat a_{j_{2k}}.$$

Правая часть этой формулы совпадает с правой частью (2.15) в силу четности коэффициентов.

Формулу (2.16) можно немного упростить, используя свойство (2.14). Действительно, обозначим через Π_{2k-1} подгруппу в Π_{2k}, состоящую из всех перестановок, фиксирующих последний элемент, т. е.

$$\Pi_{2k-1} = \{\pi = (\pi(1),\dots,\pi(2k-1),2k)\} \subset \Pi_{2k}.$$

Пусть $\zeta = (2,3,\dots,2k,1)$ — циклическая перестановка. Представим Π_{2k} в виде объединения смежных классов

$$\Pi_{2k} = \bigcup_{\ell=0}^{2k-1} \zeta^\ell \Pi_{2k-1}$$

и разобьем множество всех слагаемых суммы (2.16) на $2k$ подмножеств, соответствующих этому представлению. Получившиеся таким образом частичные суммы совпадают между собой согласно (2.14), и формула (2.16) упрощается до следующей:

$$Z_{j_1\dots j_{2k}} = \frac{1}{(2k-1)!}\sum_{\pi\in\Pi_{2k-1}} N_{j_{\pi(1)}\dots j_{\pi(2k-1)}j_{2k}} \quad \text{при } j_1+\dots+j_{2k}=0. \tag{2.18}$$

Докажем абсолютную сходимость ряда (2.15). Для этого сначала установим справедливость следующей оценки для коэффициентов ряда:

$$0 \le Z_{j_1\dots j_{2k}} \le 2(2(|j_1|+\dots+|j_{2k}|))^{2k+1}. \tag{2.19}$$

Действительно, фиксируем $j = (j_1,\dots,j_{2k})$ и положим $|j| = |j_1|+\dots+|j_{2k}|$. Обозначим через x_- и x_+ соответственно минимальный и максимальный корни многочлена $f(n)$, определенного формулой (2.3). Они удовлетворяют неравенству $|x_\pm| \le |j|$. Слагаемое суммы (2.2) отлично от нуля лишь при $n \in (x_-,x_+)$, число таких слагаемых не превосходит $2|j|$, а значение каждого из них не больше, чем $2(|n|+|j|)^{2k} \le 2(2|j|)^{2k}$. Поэтому

$$N_{j_1\dots j_{2k}} \le 2(2|j|)^{2k}(2|j|) = 2(2|j|)^{2k+1}.$$

Это доказывает (2.19).

Коэффициенты Фурье гладкой функции a быстро убывают, т. е. удовлетворяют оценке $|\hat a_n| \le C_M(|n|+1)^{-M}$ для любого $M>0$. Вместе с (2.19) это влечет абсолютную сходимость ряда (2.15). Действительно,

$$|Z_{j_1\dots j_{2k}}\,\hat a_{j_1}\dots\hat a_{j_{2k}}| \le 2^{2k+2}C_M^{2k}(|j|+1)^{-M+2k+1}, \quad \text{где } |j| = |j_1|+\dots+|j_{2k}|.$$

Поэтому

$$\sum_{j_1+\dots+j_{2k}=0} |Z_{j_1\dots j_{2k}}\hat a_{j_1}\dots\hat a_{j_{2k}}| \le 2^{2k+2}C_M^{2k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+1)^{-M+2k+1}K(\ell),$$

где

$$K(\ell) = \sharp\{(j_1,\dots,j_{2k}) \mid j_1+\dots+j_{2k}=0,\ |j_1|+\dots+|j_{2k}|=\ell\} \le (2\ell+1)^{2k}.$$

Наконец,

$$\sum_{j_1+\dots+j_{2k}=0} |Z_{j_1\dots j_{2k}}\hat a_{j_1}\dots\hat a_{j_{2k}}| \le 2^{4k+2}C_M^{2k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+1)^{-M+4k+1}.$$

Ряд в правой части этого неравенства сходится при достаточно большом M.

Первый дзета-инвариант был фактически введен Эдвардом [1]. Воспроизведем здесь его вычисления. Согласно (2.1)–(2.2)

$$Z_1(a) = \sum_{j+\ell=0} Z_{j\ell}\hat a_j\hat a_\ell = \sum_j Z_{j,-j}\,\hat a_j\hat a_{-j}, \tag{2.20}$$

где

$$Z_{j,-j} = N_{j,-j} = \sum_n (|n(n+j)| - n(n+j)).$$

Очевидно,

$$|n(n+j)| - n(n+j) = \begin{cases} -2n(n+j), & \text{если } 0<n<-j,\\ -2n(n+j), & \text{если } -j<n<0,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Поэтому для положительного j

$$Z_{j,-j} = -2\sum_{n=-j}^{-1} n(n+j) = -2\sum_{n=-j}^{-1} n^2 - 2j\sum_{n=-j}^{-1} n = -2\sum_{n=1}^{j} n^2 + 2j\sum_{n=1}^{j} n = \frac13(j^3-j).$$

Мы воспользовались известными равенствами

$$\sum_{n=1}^{j} n = \frac12 j(j+1), \quad \sum_{n=1}^{j} n^2 = \frac16 j(j+1)(2j+1). \tag{2.21}$$

Аналогично $Z_{j,-j} = \frac13|j^3-j|$ для отрицательного j. Таким образом, для всех j

$$Z_{j,-j} = \frac13|j^3-j|. \tag{2.22}$$

Подставив эти значения в (2.20), получаем

$$Z_1(a) = \frac13\sum_{j=-\infty}^{\infty}|j^3-j|\hat a_j\hat a_{-j} = \frac23\sum_{n=2}^{\infty}(n^3-n)\hat a_n\hat a_{-n}. \tag{2.23}$$

Если для двух положительных функций $a, b \in C^\infty(\mathbb{S})$ операторы $a\Lambda_e$ и $b\Lambda_e$ изоспектральны, то по теореме 2.1

$$Z_k(a) = Z_k(b) \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{2.24}$$

В частности, (2.24) справедливо для конформно эквивалентных положительных функций a и b.

Проблема *полноты системы дзета-инвариантов* ставится следующим образом. Для данной функции $0 < b \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ требуется найти все $0 < a \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$Z_k(a) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{2.25}$$

где $b_k = Z_k(b)$. Отметим, что спектр оператора $a\Lambda_e$ не участвует в постановке этой проблемы и о нем можно не вспоминать при решении проблемы. Это чисто алгебраическая задача, поскольку левая часть уравнения (2.25) является $(2k)$-формой от коэффициентов Фурье функции a. Руководствуясь аналогией со спектральной геометрией, мы склонны полагать, что для функции $0 < b \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ «общего положения» множество решений системы (2.25) совпадает с семейством функций, конформно эквивалентных функции b. В то же время мы предполагаем существование «исключительных» примеров функций b, для которых множество решений системы (2.25) шире (хотя такие примеры пока не найдены). Дальнейшее содержание статьи ориентировано на решение этой проблемы, хотя мы пока далеки от окончательного решения.

3. Конформная эквивалентность в терминах коэффициентов Фурье

Для $\rho \in (-1, 1)$ обозначим через Φ_ρ конформное преобразование единичного круга, определенное равенством

$$\Phi_\rho(z) = \frac{z - \rho}{1 - \rho z}. \tag{3.1}$$

Для функции $a \in C^\infty(\mathbb{S})$ пусть b — функция, конформно эквивалентная функции a посредством конформного преобразования Φ_ρ, т. е.

$$b = a \circ \varphi \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^{-1}, \quad \text{где } \varphi = \Phi_\rho|_{\mathbb{S}}. \tag{3.2}$$

Этот факт будем обозначать равенством $b = a\Phi_\rho$, обозначение получит свое объяснение в разд. 4. Как видно из (3.2), коэффициенты Фурье $\hat{b}_n$ функции b линейно зависят от коэффициентов Фурье $\hat{a}_n$ функции a, т. е.

$$\hat{b}_n = \sum_k \mu_{nk}(\rho)\hat{a}_k.$$

В этом разделе найдем (бесконечную) матрицу $M(\rho) = (\mu_{nk}(\rho))_{n,k=-\infty}^{\infty}$ и установим некоторые ее свойства.

Согласно определению коэффициентов Фурье

$$\hat{b}_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\theta} b(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\theta} a(\varphi(\theta))\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^{-1} d\theta,$$

или
$$\hat{b}_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\theta(\varphi)}a(\varphi)\left(\frac{d\theta}{d\varphi}(\varphi)\right)^2 d\varphi.$$
Сделаем замену переменной интегрирования в соответствии с формулами
$$z = e^{i\varphi}, \quad d\varphi = \frac{1}{i}z^{-1}\,dz, \quad e^{i\theta(\varphi)} = \frac{z+\rho}{1+\rho z}, \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1-\rho^2}{|1+\rho z|^2}.$$
Тогда
$$\hat{b}_n = (1-\rho^2)^2\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\left(\frac{1+\rho z}{z+\rho}\right)^n z^{-1}|1+\rho z|^{-4}a(z)\,dz.$$
Подставляя значение $a(z) = \sum_k \hat{a}_k z^k$, приходим к формуле
$$\hat{b}_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mu_{nk}\hat{a}_k, \tag{3.3}$$
где
$$\mu_{nk} = (1-\rho^2)^2\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\left(\frac{1+\rho z}{z+\rho}\right)^n z^{k-1}|1+\rho z|^{-4}\,dz. \tag{3.4}$$

Разложим последний множитель в подынтегральном выражении из (3.4) по степеням переменной z, принимая во внимание соотношение $|z|=1$:
$$|1+\rho z|^2 = (1+\rho z)(1+\rho z^{-1}) = \frac{1}{z}(1+\rho z)(z+\rho), \quad |1+\rho z|^{-4} = z^2(1+\rho z)^{-2}(z+\rho)^{-2}.$$
Подставляя это выражение в (3.4), получаем окончательную формулу
$$\mu_{nk} = \mu_{nk}(\rho) = (1-\rho^2)^2\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(1+\rho z)^{n-2}}{(z+\rho)^{n+2}}z^{k+1}\,dz. \tag{3.5}$$

Введем также постоянную матрицу $D = (d_{nk})_{n,k=-\infty}^{\infty}$, полагая
$$d_{nk} = (n-2)\delta_{n-1,k} - (n+2)\delta_{n+1,k} = \begin{cases} n-2, & \text{если } k = n-1,\\ -(n+2), & \text{если } k = n+1,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{3.6}$$

Предложение 3.1. *Матрица $M(\rho)$ выражается через D и $\rho \in (-1,1)$ равенством*
$$M(\rho) = e^{tD}, \quad \text{где } \tanh t = \rho. \tag{3.7}$$
Отображение $\rho \mapsto M(\rho)$ удовлетворяет
$$M(\rho)M(\rho') = M(\rho''), \quad \text{где } \rho'' = \frac{\rho+\rho'}{1+\rho\rho'}. \tag{3.8}$$
В частности, матрицы $M(\rho)$ и $M(\rho')$ перестановочны, а также $M(\rho)$ перестановочна с D.

Доказательство. Достаточно доказать (3.7); остальные утверждения следуют из этого равенства, которое, в свою очередь, эквивалентно дифференциальному уравнению $\frac{dM}{dt} = DM$. Считая переменные ρ и t связанными соотношением $\tanh t = \rho$, перепишем последнее уравнение в виде $(1-\rho^2)\frac{dM}{d\rho} = DM$, откуда с учетом (3.6) получаем
$$(1-\rho^2)\frac{d\mu_{nk}}{d\rho} - (n-2)\mu_{n-1,k} + (n+2)\mu_{n+1,k} = 0. \tag{3.9}$$

Таким образом, все сводится к доказательству равенства (3.9).

Дифференцируя (3.5), имеем

$$\frac{d\mu_{nk}}{d\rho}=\frac{(1-\rho^2)}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(1+\rho z)^{n-3}}{(z+\rho)^{n+3}}[-4\rho(1+\rho z)(z+\rho)\\ +(n-2)(1-\rho^2)z(z+\rho)-(n+2)(1-\rho^2)(1+\rho z)]z^{k+1}\,dz.$$

Подставив в левую часть формулы (3.9) выражение для производной $d\mu_{nk}/d\rho$ из последнего равенства и выражение для $\mu_{n\pm1,k}$ из (3.5), приходим к уравнению

$$(1-\rho^2)\frac{d\mu_{nk}}{d\rho}-(n-2)\mu_{n-1,k}+(n+2)\mu_{n+1,k}\\ =\frac{(1-\rho^2)^2}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(1+\rho z)^{n-3}}{(z+\rho)^{n+3}}f(n,\rho,z)z^{k+1}\,dz,$$

где

$$f(n,\rho,z)=-4\rho(1+\rho z)(z+\rho)+(n-2)(1-\rho^2)z(z+\rho)-(n+2)(1-\rho^2)(1+\rho z)\\ -(n-2)(z+\rho)^2+(n+2)(1+\rho z)^2.$$

Как легко убедиться, функция $f(n,\rho,z)$ тождественно равна нулю. $\square$

Интеграл (3.5) можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. Прежде всего подынтегральное выражение в (3.5) является голоморфной в единичном круге функцией при $n\le -2$ и $k\ge -1$. Поэтому

$$\mu_{nk}=0\quad\text{при } n\le -2,\ k\ge -1. \tag{3.10}$$

Меняя переменную интегрирования в (3.5) согласно равенству $z=1/\zeta$, имеем

$$\mu_{nk}=(1-\rho^2)^2\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{(1+\rho/\zeta)^{n-2}}{(1/\zeta+\rho)^{n+2}}\zeta^{-k-3}\,d\zeta\\ =(1-\rho^2)^2\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{(\zeta+\rho)^{n-2}}{(1+\rho\,\zeta)^{n+2}}\zeta^{-k+1}\,d\zeta\\ =(1-\rho^2)^2\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{(1+\rho\,\zeta)^{-n-2}}{(\zeta+\rho)^{-n+2}}\zeta^{-k+1}\,d\zeta=\mu_{-n,-k}.$$

Таким образом, доказано, что

$$\mu_{nk}=\mu_{-n,-k}. \tag{3.11}$$

Вместе с (3.10) это дает

$$\mu_{nk}=0\quad\text{при } n\ge 2,\ k\le 1. \tag{3.12}$$

В силу равенства (3.11) достаточно рассмотреть лишь случай $n\ge 0$.

Предполагая, что $k\ge -1$, из (3.5) получаем

$$\mu_{nk}=(1-\rho^2)^2\operatorname{Res}\left[\frac{(1+\rho z)^{n-2}}{(z+\rho)^{n+2}}z^{k+1}\right]_{z=-\rho}\quad(k\ge -1). \tag{3.13}$$

Для нахождения этого вычета нужно разложить функцию $\frac{(1+\rho z)^{n-2}}{(z+\rho)^{n+2}} z^{k+1}$ по степеням переменной $(z+\rho)$.

Прежде всего

$$z^{k+1} = \sum_{\ell=0}^{k+1} (-1)^{k-\ell+1} \binom{k+1}{\ell} \rho^{k-\ell+1} (z+\rho)^{\ell}. \tag{3.14}$$

Здесь и далее $\binom{r}{s} = \frac{r!}{s!(r-s)!}$ — биномиальные коэффициенты, которые предполагаются определенными для всех целых r и s с учетом соглашения

$$\binom{r}{s} = 0, \quad \text{если } r < 0 \text{ или } s < 0, \text{ или } s > r. \tag{3.15}$$

Далее, используя тождество $1 + \rho z = \rho(z+\rho) + (1-\rho^2)$, находим

$$(1+\rho z)^{n-2} = \sum_{p=0}^{n-2} \binom{n-2}{p} \rho^p (1-\rho^2)^{n-p-2} (z+\rho)^p. \tag{3.16}$$

Для $n \geq 2$ формулы (3.14) и (3.16) дают

$$\begin{aligned} \frac{(1+\rho z)^{n-2} z^{k+1}}{(z+\rho)^{n+2}} = \sum_{m=0}^{n+k-1} \Bigg(& \sum_{\ell+p=m} (-1)^{k-\ell+1} \\ & \times \binom{n-2}{p} \binom{k+1}{\ell} \rho^{k+p-\ell+1} (1-\rho^2)^{n-p-2} \Bigg) (z+\rho)^{m-n-2}. \end{aligned}$$

Согласно (3.13) надо найти коэффициент при $(z+\rho)^{-1}$ в правой части последней формулы, т. е. положить $m = n+1$. Таким образом,

$$\mu_{nk} = (1-\rho^2)^2 \sum_{\ell+p=n+1} (-1)^{k-\ell+1} \binom{n-2}{p} \binom{k+1}{\ell} \rho^{k+p-\ell+1} (1-\rho^2)^{n-p-2}.$$

Полагая здесь $p = n - \ell + 1$, приходим к окончательной формуле

$$\mu_{nk} = (-1)^{k+1} \frac{\rho^{n+k+2}}{1-\rho^2} \sum_{\ell} (-1)^{\ell} \binom{n-2}{\ell-3} \binom{k+1}{\ell} \rho^{-2\ell} (1-\rho^2)^{\ell} \quad (n \geq 2,\ k \geq -1). \tag{3.17}$$

Суммирование в этом равенстве фактически выполняется в пределах

$$3 \leq \ell \leq \min(n+1, k+1). \tag{3.18}$$

Формулы (3.12) и (3.17) дают явные выражения для μ_{nk} при $n \geq 2$ и при всех k. Вместе с (3.11) это дает μ_{nk} при $|n| \geq 2$ и при всех k. Остается рассмотреть случаи $n = 0, \pm 1$. Представим результаты для этих случаев, не приводя доказательств, которые вполне аналогичны ранее приведенным:

$$\mu_{-1,k} = \frac{(-\rho)^{k+1}}{1-\rho^2} \quad \text{при } k \geq -1, \tag{3.19}$$

$$\mu_{0,k} = \mu_{0,-k} = \frac{(-\rho)^k}{1-\rho^2} \big((k+1) - (k-1)\rho^2\big) \quad \text{при } k \geq -1, \tag{3.20}$$

$$\mu_{1,k} = \frac{(-\rho)^{k-1}}{1-\rho^2} \left(\frac{k(k+1)}{2} - (k^2-1)\rho^2 + \frac{k(k-1)}{2} \rho^4 \right) \quad \text{при } k \geq -1. \tag{3.21}$$

В частности,

$$\mu_{n,-1} = \mu_{n,0} = \mu_{n,1} = 0 \quad \text{при } |n| \ge 2, \tag{3.22}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{-1,-1} & \mu_{-1,0} & \mu_{-1,1} \\ \mu_{0,-1} & \mu_{0,0} & \mu_{0,1} \\ \mu_{1,-1} & \mu_{1,0} & \mu_{1,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & \rho^2 \\ -2\rho & 1+\rho^2 & -2\rho \\ \rho^2 & -\rho & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Как легко видеть, $(1/2, 1, 1/2)^t$ есть собственный вектор матрицы (3.23), принадлежащий собственному числу $\frac{1-\rho}{1+\rho}$. Это означает, что при любом $\rho \in (0,1)$ функция $1+\cos\theta$ является собственной функцией оператора $a \mapsto a\Phi_\rho$, принадлежащей собственному числу $\frac{1-\rho}{1+\rho}$.

В разд. 4 нам понадобится оценка

$$|\mu_{n,k}(\rho)| \le C_k |n|^{|k|} |\rho|^{|n|/2} \quad \text{при } |n| \ge 2|k| \ge 2. \tag{3.24}$$

Она легко вытекает из (3.17). Действительно, предположим сначала, что $n \ge 2$ и $k \ge 0$. Из (3.17) заключаем, что

$$|\mu_{nk}| \le \sum_\ell \binom{n-2}{\ell-3}\binom{k+1}{\ell} |\rho|^{n+2k-2\ell+2}(1-\rho^2)^{\ell-1}.$$

Как отмечено ранее, суммирование здесь фактически ведется по ℓ, удовлетворяющим (3.18). Поэтому последний множитель в правой части ограничен сверху единицей и неравенство упрощается до следующего:

$$|\mu_{nk}| \le \sum_\ell \binom{n-2}{\ell-3}\binom{k+1}{\ell} |\rho|^{n+2k-2\ell+2}.$$

Предполагая, что $n \ge 2k \ge 0$, из (3.18) выводим неравенство $n+2k-2\ell+2 \ge n/2$, которое позволяет записать нашу оценку в виде

$$|\mu_{nk}| \le |\rho|^{n/2} \sum_\ell \binom{n-2}{\ell-3}\binom{k+1}{\ell}.$$

Наконец,

$$\binom{n-2}{\ell-3} = \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-\ell+2)}{(\ell-3)!} \le \frac{n^{\ell-2}}{(\ell-3)!} \le \frac{n^{k-1}}{(\ell-3)!}$$

и

$$|\mu_{nk}| \le n^{k-1}|\rho|^{n/2} \sum_{\ell=3}^{k+1} \frac{1}{(\ell-3)!}\binom{k+1}{\ell} = C_k n^{k-1} |\rho|^{n/2}.$$

Это доказывает (3.24) в случае $n \ge 2$ и $k \ge 0$. В случае $n \ge 2$ и $k \le 0$ оценка (3.24) выполняется тривиальным образом ввиду (3.12). Наконец, чтобы убедиться в справедливости (3.24) в случае отрицательного n, достаточно вспомнить свойство четности (3.11).

4. Дзета-инварианты и конформная группа

Обозначим через G группу всех конформных и антиконформных преобразований единичного круга $\mathbb{D}$ (она является группой Ли с двумя связными компонентами, компонента тождественного преобразования изоморфна $PSL(2,\mathbb{R})$). Ограничивая каждое преобразование $\Phi \in G$ на $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$, рассматриваем G как трехмерную группу Ли диффеоморфизмов единичной окружности $\mathbb{S}$. Следовательно, группа G действует справа на векторном пространстве $C^\infty(\mathbb{S})$ по правилу

$$a\Phi = a\circ\varphi\,|d\varphi/d\theta|^{-1} \quad \text{для } \Phi\in G,\ a\in C^\infty(\mathbb{S}),\ \text{где } \varphi=\Phi|_{\mathbb{S}}. \tag{4.1}$$

В этих обозначениях формула (2.24) означает, что

$$Z_k(a\Phi) = Z_k(a) \quad (\Phi\in G,\ k=1,2,\dots) \tag{4.2}$$

для любой положительной функции $a\in C^\infty(\mathbb{S})$.

Предложение 4.1. *Равенство* (4.2) *справедливо для любой функции* $a\in C^\infty(\mathbb{S})$.

Доказательство. Зафиксировав k и $\Phi\in G$, положим $Q(a)=Z_k(a\Phi)-Z_k(a)$. Согласно (2.1), (2.2) Q — $2k$-форма на $C^\infty(\mathbb{S})$. Докажем, что эта форма тождественно равна нулю. Рассматриваем $C^\infty(\mathbb{S})$ как топологическое векторное пространство с C^∞-топологией. Форма Z_k непрерывна, как показывают наши оценки, приведенные в конце разд. 2. Форма Q также непрерывна. Мы знаем, что $Q(a)=0$ для положительной функции a. Положительные функции образуют открытый выпуклый конус в пространстве $C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$ действительных функций. Если непрерывная форма обращается в нуль на открытом множестве, то она тождественно равна нулю. Таким образом, $Q(a)=0$ для любой действительной функции a.

Очевидно, произвольная $2k$-форма на $C^\infty(\mathbb{S})$ однозначно определяется своим ограничением на $C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$. Поэтому Q тождественно равна нулю. □

Покажем, что конформная инвариантность (4.2) эквивалентна некоторым линейным соотношениям между коэффициентами $Z_{j_1\dots j_{2k}}$ формы (2.15).

Группа G порождена тремя подгруппами:

(1) группа поворотов $R_\alpha : z\mapsto e^{i\alpha}z$;

(2) группа, состоящая из двух элементов $\{I,J\}$, где I — тождественное преобразование и $J: z\mapsto \bar z$ — комплексное сопряжение;

(3) группа $T=\{\Phi_\rho \mid -1<\rho<1\}$, где Φ_ρ определяется формулой (3.1).

С точки зрения гиперболической геометрии Φ_ρ есть сдвиг гиперболической плоскости $\bigl(\operatorname{Int} D,\ ds^2=\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}\bigr)$ вдоль действительной прямой $(-1,1)$ на расстояние t такое, что $\rho=\tanh t$. Это означает, что $\Phi_\rho(x)\in(-1,1)$ для $x\in(-1,1)$ и $\operatorname{dist}(x,\Phi_\rho(x))=t$, где dist — гиперболическое расстояние. Сдвиг Φ_ρ имеет две неподвижные точки ±1 на бесконечно удаленной окружности $\mathbb{S}$.

Для первых двух подгрупп ситуация очевидна: инварианты $Z_k(a)$ не меняются, если функция a преобразуется посредством поворота или комплексного сопряжения. Действительно, в этих случаях множитель $|d\varphi/d\theta|$ в правой части формулы (4.1) тождественно равен единице и (4.2) совпадает с одним из равенств:

$$Z_k(a\circ R_\alpha)=Z_k(a),\quad Z_k(a\circ J)=Z_k(a). \tag{4.3}$$

Коэффициенты Фурье функции $a\circ R_\alpha$ выражаются через коэффициенты Фурье функции a равенствами

$$(\widehat{a\circ R_\alpha})_j = e^{i\alpha j}\hat a_j.$$

Отсюда

$$(\widehat{a\circ R_\alpha})_{j_1}\dots(\widehat{a\circ R_\alpha})_{j_{2k}} = e^{i\alpha(j_1+\dots+j_{2k})}\,\hat a_{j_1}\dots\hat a_{j_{2k}} = \hat a_{j_1}\dots\hat a_{j_{2k}},$$

если $j_1+\dots+j_{2k}=0$, значит, все слагаемые в (2.1) не меняются, когда функция a заменяется на $a\circ R_\alpha$. Аналогично $(\widehat{a\circ J})_j=\hat a_{-j}$, и второе из равенств (4.3) эквивалентно свойству четности (2.17).

Остается рассмотреть сдвиг Φ_ρ, определенный формулой (3.1). Для $a\in C^\infty(\mathbb{S})$ пусть $b=a\Phi_\rho$. Согласно (3.3) коэффициенты Фурье функций a и b связаны соотношением

$$\hat b_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mu_{nk}(\rho)\hat a_k.$$

Подставляя это выражение в формулу

$$Z_k(b)=\sum_{j_1,\dots,j_{2k}=-\infty}^{\infty}Z_{j_1\dots j_{2k}}\,\hat b_{j_1}\dots\hat b_{j_{2k}},$$

получаем

$$Z_k(b)=\sum_{\ell_1,\dots,\ell_{2k}=-\infty}^{\infty}\Bigg(\sum_{j_1,\dots,j_{2k}=-\infty}^{\infty}Z_{j_1\dots j_{2k}}\mu_{j_1\ell_1}(\rho)\dots\mu_{j_{2k}\ell_{2k}}(\rho)\Bigg)\hat a_{\ell_1}\dots\hat a_{\ell_{2k}}.$$

Поскольку функция a произвольна, равенство $Z_k(a)$=$Z_k(b)$ эквивалентно утверждению

$$\sum_{j_1,\dots,j_{2k}=-\infty}^{\infty}Z_{j_1\dots j_{2k}}\mu_{j_1\ell_1}(\rho)\dots\mu_{j_{2k}\ell_{2k}}(\rho)=Z_{\ell_1\dots\ell_{2k}}. \tag{4.4}$$

Это равенство должно выполняться для любого $k=1,2,\dots$, любых целых индексов $(\ell_1,\dots,\ell_{2k})$ и любого $\rho\in(-1,1)$.

Убедимся в абсолютной сходимости ряда из левой части формулы (4.4). Фиксируем значения индексов $(\ell_1,\dots,\ell_{2k})$, положим $\ell=|\ell_1|+\dots+|\ell_{2k}|$ и оценим сверху модуль левой части формулы (4.4) выражением

$$\sum_{j_1,\dots,j_{2k}=\ell-1}^{\ell+1}Z_{j_1\dots j_{2k}}|\mu_{j_1\ell_1}(\rho)\dots\mu_{j_{2k}\ell_{2k}}(\rho)| \\ +\sum_{j=\ell+2}^{\infty}\ \sum_{|j_1|+\dots+|j_{2k}|=j}Z_{j_1\dots j_{2k}}|\mu_{j_1\ell_1}(\rho)\dots\mu_{j_{2k}\ell_{2k}}(\rho)|.$$

Первая сумма конечна. Проверим сходимость второго ряда. Для этого, предполагая, что $|j_1|+\dots+|j_{2k}|=j$, $|j_\alpha|\ge\ell+2$ $(1\le\alpha\le 2k)$, пользуемся оценками (2.19) и (3.24), чтобы получить неравенство

$$|Z_{j_1\dots j_{2k}}\mu_{j_1\ell_1}(\rho)\dots\mu_{j_{2k}\ell_{2k}}(\rho)| \\ \le C_kj^{2k+1}C_{\ell_1}|j_1|^{|\ell_1|}|\rho|^{|j_1|/2}\dots C_{\ell_{2k}}|j_{2k}|^{|\ell_{2k}|}|\rho|^{|j_{2k}|/2}\le C_{k,\ell_1\dots\ell_{2k}}|\rho|^{j/2+2k+1}.$$

Отсюда

$$\sum_{j=\ell+2}^{\infty}\ \sum_{|j_1|+\dots+|j_{2k}|=j}Z_{j_1\dots j_{2k}}|\mu_{j_1\ell_1}(\rho)\dots\mu_{j_{2k}\ell_{2k}}(\rho)| \\ \le C_{k,\ell_1\dots\ell_{2k}}\sum_{j=\ell+2}^{\infty}(j+1)^{4k+1}|\rho|^{j/2+2k+1}.$$

Ряд в правой части сходится при $|\rho|<1$.

Уравнение (4.4) тривиальным образом выполняется при $\rho = 0$, поскольку $M(0) = I$. Дифференцируем уравнение (4.4) по ρ. Возможность почленного дифференцирования легко обосновать посредством тех же оценок, которые были использованы в предыдущем абзаце. В результате получаем следующее уравнение, эквивалентное (4.4):

$$\sum_{j_1,\dots,j_{2k}=-\infty}^{\infty} Z_{j_1\dots j_{2k}} \sum_{\alpha=1}^{2k} \mu_{j_1\ell_1}\dots\mu_{j_{\alpha-1}\ell_{\alpha-1}} \frac{d\mu_{j_\alpha\ell_\alpha}}{d\rho} \mu_{j_{\alpha+1}\ell_{\alpha+1}}\dots\mu_{j_{2k}\ell_{2k}} = 0.$$

Согласно предложению 3.1

$$\frac{d\mu_{j_\alpha\ell_\alpha}}{d\rho} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} d_{j_\alpha p}\,\mu_{p\ell_\alpha},$$

где матрица $D = (d_{nk})$ определена формулой (3.6). Подставим полученное выражение в предыдущее уравнение:

$$\sum_{j_1,\dots,j_{2k}=-\infty}^{\infty} Z_{j_1\dots j_{2k}} \sum_{\alpha=1}^{2k} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mu_{j_1\ell_1}\dots\mu_{j_{\alpha-1}\ell_{\alpha-1}} d_{j_\alpha p}\mu_{p\ell_\alpha}\mu_{j_{\alpha+1}\ell_{\alpha+1}}\dots\mu_{j_{2k}\ell_{2k}} = 0.$$

После перестановки индексов суммирования j_α и p это может быть записано в виде (перестановку порядка суммирования легко обосновать)

$$\sum_{j_1,\dots,j_{2k}=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\alpha=1}^{2k} \sum_{p=-\infty}^{\infty} d_{pj_\alpha} Z_{j_1\dots j_{\alpha-1}pj_{\alpha+1}\dots j_{2k}}\right) \mu_{j_1\ell_1}\dots\mu_{j_{2k}\ell_{2k}} = 0.$$

Поскольку индексы $(\ell_1,\dots,\ell_{2k})$ произвольны, а матрица $M = (\mu_{j\ell})$ невырожденна, это эквивалентно уравнению

$$\sum_{\alpha=1}^{2k} \sum_{p} d_{pj_\alpha} Z_{j_1\dots j_{\alpha-1}pj_{\alpha+1}\dots j_{2k}} = 0.$$

Подставляя сюда значение (3.6) для d_{pj_α}, приходим к окончательному уравнению

$$\sum_{\alpha=1}^{2k}((j_\alpha-1)Z_{j_1\dots j_{\alpha-1},j_\alpha+1,j_{\alpha+1}\dots j_{2k}} - (j_\alpha+1)Z_{j_1\dots j_{\alpha-1},j_\alpha-1,j_{\alpha+1}\dots j_{2k}}) = 0, \quad (4.5)$$

которое должно выполняться для произвольных индексов $(j_1,\dots,j_{2k})$. Обратно, уравнение (4.5) вместе с (2.17) влечет справедливость (4.2) для любой функции a.

Уравнение (4.5) можно упростить, упрощение связано с алгеброй Ли группы G.

Напомним, что мы рассматриваем G как группу диффеоморфизмов единичной окружности $\mathbb{S} = \{e^{i\theta}\}$. Следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G является трехмерным пространством векторных полей на $\mathbb{S}$. Легко видеть, что три векторных поля

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad X_1 = \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad X_2 = \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

образуют базис алгебры $\mathfrak{g}$. Произведение Ли выражается в этом базисе формулами

$$[X_0, X_1] = -X_2, \quad [X_0, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_2] = X_0. \quad (4.6)$$

Группа G действует на $C^\infty(\mathbb{S})$ путем преобразования функции a в конформно эквивалентную ей функцию, как пояснено в начале этого раздела. Следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ также действует на $C^\infty(\mathbb{S})$: вектор $A \in \mathfrak{g}$ может рассматриваться в качестве линейного оператора $A : C^\infty(\mathbb{S}) \to C^\infty(\mathbb{S})$. Выразим это действие в терминах коэффициентов Фурье.

Начнем с подгруппы поворотов $R \subset G$. Поворот действует согласно формуле $(aR_\alpha)(\theta) = a(e^{i\alpha\theta})$, которая дает $(\widehat{aR_\alpha})_n = e^{in\alpha}\hat{a}_n$. Дифференцируя это равенство по α в точке $\alpha = 0$, получаем $\frac{d}{d\alpha}\big|_{\alpha=0}(\widehat{aR_\alpha})_n = in\hat{a}_n$. Тем самым находим первый элемент алгебры $\mathfrak{g}$:

$$(\widehat{Ca})_n = in\hat{a}_n. \tag{4.7}$$

Ранее мы уже нашли элемент алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующий одномерной подгруппе $T \subset G$. Это оператор $D : C^\infty(\mathbb{S}) \to C^\infty(\mathbb{S})$, участвующий в предложении 3.1. Согласно (3.6) этот оператор в терминах коэффициентов Фурье действует следующим образом:

$$(\widehat{Da})_n = (n-2)\hat{a}_{n-1} - (n+2)\hat{a}_{n+1}. \tag{4.8}$$

Чтобы дополнить (C, D) до базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}$, просто вычисляем коммутатор операторов (4.7) и (4.8):

$$E = [C, D], \quad (\widehat{Ea})_n = -i[(n-2)\hat{a}_{n-1} + (n+2)\hat{a}_{n+1}]. \tag{4.9}$$

Скобка Ли выражается в базисе (C, D, E) формулами

$$[C, D] = E, \quad [C, E] = -D, \quad [D, E] = -4C. \tag{4.10}$$

Формулы (4.6) и (4.10) эквивалентны, как видно из следующего правила замены базиса:

$$C = X_0, \quad D = 2X_2, \quad E = 2X_1.$$

Подчеркнем, что $\mathfrak{g}$ является действительной алгеброй Ли. В частности, операторы C, D, E преобразуют действительные функции снова в действительные функции. Пусть $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ — комплексификация алгебры $\mathfrak{g}$. Операторы

$$D_0 = -iC, \quad D_- = \frac{1}{2}(D + iE), \quad D_+ = \frac{1}{2}(-D + iE)$$

образуют базис алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. В терминах коэффициентов Фурье эти операторы определяются формулами

$$(\widehat{D_0 a})_n = n\hat{a}_n, \quad (\widehat{D_- a})_n = (n-2)\hat{a}_{n-1}, \quad (\widehat{D_+ a})_n = (n+2)\hat{a}_{n+1}. \tag{4.11}$$

Скобка Ли в этом базисе выражается равенствами

$$[D_0, D_-] = -D_-, \quad [D_0, D_+] = D_+, \quad [D_-, D_+] = 2D_0. \tag{4.12}$$

Уравнение (4.5) фактически было получено путем дифференцирования равенства

$$Z_k(a\Phi_\rho) = Z_k(a\, e^{tD}) = Z_k(a) \quad (\tanh t = \rho)$$

по t. Сделав то же по отношению к уравнению

$$Z_k(a\, e^{tE}) = Z_k(a),$$

получим

$$\sum_{\alpha=1}^{2k}((j_\alpha-1)Z_{j_1\dots j_{\alpha-1},j_\alpha+1,j_{\alpha+1}\dots j_{2k}}+(j_\alpha+1)Z_{j_1\dots j_{\alpha-1},j_\alpha-1,j_{\alpha+1}\dots j_{2k}})=0. \quad (4.13)$$

Беря сумму и разность уравнений (4.5) и (4.13), приходим к паре более простых уравнений:

$$\sum_{\alpha=1}^{2k}(j_\alpha-1)Z_{j_1\dots j_{\alpha-1},j_\alpha+1,j_{\alpha+1}\dots j_{2k}}=0, \quad (4.14)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2k}(j_\alpha+1)Z_{j_1\dots j_{\alpha-1},j_\alpha-1,j_{\alpha+1}\dots j_{2k}}=0. \quad (4.15)$$

Разумеется, уравнения (4.14) и (4.15) соответствуют операторам $D_+, D_- \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ так же, как уравнения (4.5) и (4.13) соответствуют операторам $D, E \in \mathfrak{g}$.

Заметим, что уравнения (4.14) и (4.15) эквиваленты друг другу, если принять во внимание условие четности (2.17). Действительно, сменив знаки индексов $(j_1,\dots,j_{2k})$ в (4.15) и воспользовавшись условием (2.17), получим (4.14). Поэтому можно исключить уравнение (4.15) из рассмотрения без потери информации. Наконец, уравнение (4.14) выполняется тривиальным образом при $j_1+\dots+j_{2k}\neq -1$, поскольку согласно определению из разд. 2 $Z_{j_1\dots j_{2k}}=0$ при $j_1+\dots+j_{2k}\neq 0$. Таким образом, соотношения (4.14), (4.15) сведены к уравнению

$$\sum_{\alpha=1}^{2k}(j_\alpha-1)Z_{j_1\dots j_{\alpha-1},j_\alpha+1,j_{\alpha+1},\dots j_{2k}}=0 \quad (j_1+\dots+j_{2k}=-1). \quad (4.16)$$

Замечание. Мы доказали, что уравнение (4.16) вместе с условием четности (2.17) эквивалентно конформной инвариантности (4.2) дзета-инвариантов $Z_k(a)$. Подчеркнем, что наше доказательство основано на использовании теоремы 2.1. Возникает вопрос: можно ли доказать (4.16), не привлекая стекловский спектр, т. е. на основе определения (2.2) и (2.16) коэффициентов $Z_{j_1\dots j_{2k}}$? Мы не смогли найти такое доказательство для произвольного k. Единственным исключением являются случаи $k=1,2$. В случае $k=1$ уравнение (4.16) легко следует из формулы Эдварда (2.22), а в случае $k=2$ уравнение (4.16) может быть выведено из явной формулы для коэффициентов $Z_{ijk\ell}$, содержащейся в приводимой ниже теореме 5.1.

5. Явная формула для коэффициентов второго дзета-инварианта

Формула Эдварда (2.22) показывает, что коэффициенты квадратичной формы $Z_1(a)=\sum\limits_i Z_{i,-i}\hat a_i\hat a_{-i}$ выражаются кусочно-полиномиальной функцией третьей степени от аргумента i:

$$Z_{i,-i}=\begin{cases}\frac13(i^3-i) & \text{при} \quad i\geq 0,\\ \frac13(-i^3+i) & \text{при} \quad i\leq 0.\end{cases}$$

Обратим также внимание на интересное обстоятельство: оба многочлена, участвующие в этой формуле, нечетны по i, в то время как сам коэффициент $Z_{i,-i}$ четен. Аналогичное утверждение о втором дзета-инварианте выглядит следующим образом.

Теорема 5.1. *Коэффициенты 4-формы*

$$Z_2(a) = \sum_{i,l,k,\ell} Z_{ijk\ell}\hat{a}_i\hat{a}_j\hat{a}_k\hat{a}_\ell$$

однозначно определяются следующими условиями:
(1) $Z_{ijk\ell} = 0$ *при* $i + j + k + \ell \neq 0$;
(2) $Z_{ijk\ell}$ *симметричен по индексам* (i, j, k, ℓ) *и четен:* $Z_{-i,-j,-k,-\ell} = Z_{i,j,k,\ell}$;
(3) $Z_{ijk,-i-j-k}$ *выражается через* (i, j, k) *формулой*

$$Z_{ijk,-i-j-k} = \begin{cases} P_1(i,j,k) & \text{при } i \geq 0,\ j \geq 0,\ k \geq 0; \\ P_2(i,j,k) & \text{при } i \leq 0,\ j \geq 0,\ k \geq 0,\ i+j \leq 0, \\ & \quad i+k \leq 0,\ i+j+k \geq 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

в которой P_1 *и* P_2 *— многочлены, определяемые равенствами*

$$P_1(i,j,k) = \frac{1}{15}\sigma_{(ijk)}(3i^5 + 15i^4j + 10i^3j^2 + 10i^3jk - 5i^3 - 25i^2j - 10ijk + 2i), \tag{5.2}$$

$$P_2(i,j,k) = \frac{1}{45}\sigma_{(jk)}(5i^5 + 25i^4j + 10i^3j^2 + 20i^3jk - 10i^2j^3 - 15ij^4 - 20ij^3k \\ - 4j^5 - 5j^4k + 10j^3k^2 - 5i^3 - 15i^2j + 5ij^2 - 5j^2k + 4j). \tag{5.3}$$

Здесь $\sigma_{(ijk)}$ $(\sigma_{(jk)})$ *означает симметрирование по аргументам* (i, j, k) *(по аргументам* (j, k)*).*

Подчеркнем, что P_1 и P_2 — многочлены пятой степени и эти многочлены нечетны, т. е. $P_r(-i, -j, -k) = -P_r(i, j, k)$ $(r = 1, 2)$. Кроме того, P_1 и P_2 обладают интересными свойствами положительности и делимости, поскольку $3Z_{ijk\ell}$ является неотрицательным четным целым числом при любых значениях аргументов (i, j, k, ℓ), как видно из (2.2) и (2.16). Похоже, то же верно для высших дзета-инвариантов: коэффициенты $Z_{j_1\dots j_{2k-1},-j_1-\dots-j_{2k-1}}$ $2k$-формы (2.15) выражаются кусочно-полиномиальной функцией аргументов $(j_1, \dots, j_{2k-1})$, представленной нечетными многочленами степени $2k + 1$. К сожалению, при $k > 2$ эти многочлены слишком громоздки, чтобы быть полезными.

Для доказательства теоремы 5.1 нужна

Лемма 5.2. *По модулю утверждений* (1) *и* (2) *теоремы* 5.1 *коэффициенты* $Z_{ijk\ell}$ *однозначно определяются*
значениями $Z_{ijk,-i-j-k}$ *для* $i \geq 0,\ j \geq 0,\ k \geq 0$ (случай 1);
значениями $Z_{ijk,-i-j-k}$ *для* $i \leq 0,\ j \geq 0,\ k \geq 0,\ i + j \leq 0,\ i + k \leq 0,\ i + j + k \geq 0$ (случай 2).

Доказательство. Рассмотрим множество всех упорядоченных четверок (i, j, k, ℓ) целых чисел, удовлетворяющих $i + j + k + \ell = 0$. Это множество является объединением следующих двух подмножеств:

(a) множество четверок (i, j, k, ℓ), три элемента которых имеют одинаковый знак (при условии, что 0 имеет оба знака);

(b) множество четверок (i, j, k, ℓ), два элемента которых неотрицательны, а два других неположительны.

Согласно утверждениям (1) и (2) теоремы 5.1 можем переставлять элементы в четверке и менять одновременно знаки всех элементов. В случае (a) пользуемся этой свободой, чтобы добиться выполнения неравенств $i \geq 0$, $j \geq 0$, $k \geq 0$. Это в точности случай 1 из формулировки леммы 5.2.

В случае (b) используем предоставленную свободу, чтобы добиться выполнения условий

$$i \le 0, \quad |i| = \max\{|i|, |j|, |k|, |\ell|\}. \tag{5.4}$$

Теперь два элемента тройки (j, k, ℓ) неотрицательны и один неположителен. Мы переставляем элементы этой тройки так, чтобы

$$j \ge 0, \quad k \ge 0, \quad \ell \le 0. \tag{5.5}$$

Простой арифметический анализ показывает, что объединение условий (5.4) и (5.5) эквивалентно системе

$$i \le 0,\ j \ge 0,\ k \ge 0,\ i+j \le 0,\ i+k \le 0,\ i+j+k \ge 0,\ \ell = -(i+j+k). \tag{5.6}$$

Это в точности случай 2 из формулировки леммы. $\square$

Доказательство теоремы 5.1. Подробное доказательство включает большое число рутинных, но весьма громоздких вычислений с многочленами (перемножение двух многочленов, приведение подобных). Мы выполняли эти вычисления на компьютере, используя пакет символьных вычислений MAPLE. Эти вычисления опущены в приводимом доказательстве.

Введем обозначение

$$\{x\} = |x| - x = \begin{cases} 0 & \text{для } x \ge 0, \\ -2x & \text{для } x < 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Фиксируем (i, j, k, ℓ), удовлетворяющие $i + j + k + \ell = 0$, и определим многочлен

$$f(n) = n(n+i)(n+i+j)(n+i+j+k). \tag{5.8}$$

Формула (2.2) может быть записана в виде

$$N_{ijk\ell} = \sum_n \{f(n)\}. \tag{5.9}$$

Корни многочлена f — элементы множества $\{0, -i, -i-j, -i-j-k\}$. Пусть (r_1, r_2, r_3, r_4) — последовательность этих корней, упорядоченная по возрастанию, т. е.

$$\{r_1, r_2, r_3, r_4\} = \{0, -i, -i-j, -i-j-k\}, \quad r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4.$$

Формулу (5.9) можно написать в виде

$$N_{ijk\ell} = -2 \sum_{n=r_1}^{r_2} f(n) - 2 \sum_{n=r_3}^{r_4} f(n). \tag{5.10}$$

Преобразуем (5.8) к виду

$$f(n) = n^4 + \alpha_1 n^3 + \alpha_2 n^2 + \alpha_3 n, \tag{5.11}$$

где

$$\alpha_1 = 3i + 2j + k, \quad \alpha_2 = 3i^2 + 4ij + 2ik + j^2 + jk, \quad \alpha_3 = i^3 + 2i^2 j + i^2 k + ij^2 + ijk. \tag{5.12}$$

Найдем первую сумму из правой части формулы (5.10). Сначала предположим, что $0 \le r_1 \le r_2$. В этом случае

$$\sum_{n=r_1}^{r_2} f(n) = \sum_{n=0}^{r_2} f(n) - \sum_{n=0}^{r_1} f(n).$$

При этом воспользовались равенством $f(r_1) = 0$. Подставим значение (5.11) в последнюю формулу:

$$\sum_{n=r_1}^{r_2} f(n) = \sum_{n=0}^{r_2} n^4 - \sum_{n=0}^{r_1} n^4 + \alpha_1 \left(\sum_{n=0}^{r_2} n^3 - \sum_{n=0}^{r_1} n^3 \right) + \alpha_2 \left(\sum_{n=0}^{r_2} n^2 - \sum_{n=0}^{r_1} n^2 \right) + \alpha_3 \left(\sum_{n=0}^{r_2} n - \sum_{n=0}^{r_1} n \right). \quad (5.13)$$

Используя (2.21) и аналогичные равенства [3, § 4.1.1]:

$$\sum_{n=0}^{r} n^3 = \frac{1}{4} r^2 (r+1)^2, \quad \sum_{n=0}^{r} n^4 = \frac{1}{30} r(r+1)(2r+1)(3r^2+3r-1),$$

из (5.13) получаем

$$\sum_{n=r_1}^{r_2} f(n) = \varphi(r_2) - \varphi(r_1), \quad (5.14)$$

где

$$\varphi(r) = r(r+1) \left[\frac{1}{30}(2r+1)(3r^2+3r-1) + \frac{\alpha_1}{4} r(r+1) + \frac{\alpha_2}{6}(2r+1) + \frac{\alpha_3}{2} \right] \quad (5.15)$$

— дискретная первообразная функции $f(n)$. Легко убедиться в справедливости (5.14) в двух других случаях, когда $r_1 \le 0 \le r_2$ или $r_1 \le r_2 \le 0$. Итак, формула (5.14) универсальна, т. е. справедлива при любых значениях корней $r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4$. Разумеется, аналогичная формула верна и для второй суммы из правой части формулы (5.10).

Подставим (5.14) и аналогичное выражение для второй суммы в (5.10)

$$N_{ijk\ell} = 2(\varphi(r_1) - \varphi(r_2) + \varphi(r_3) - \varphi(r_4)). \quad (5.16)$$

Далее симметризуем равенство (5.16) по переменным (i,j,k), чтобы получить соответствующую формулу для $Z_{ijk\ell}$ $(i+j+k+\ell=0)$. Для этого используем формулу (2.18), которую воспроизведем здесь в следующем виде:

$$3Z_{ijk\ell} = \frac{1}{2}(N_{ijk\ell} + N_{ikj\ell} + N_{jik\ell} + N_{jki\ell} + N_{kij\ell} + N_{kji\ell}) \quad (i+j+k+\ell=0). \quad (5.17)$$

Основная трудность связана со следующим обстоятельством: корни (r_1, r_2, r_3, r_4) должны быть выражены через индексы (i,j,k), а это выражение различно в разных случаях. В силу леммы 5.2 достаточно рассмотреть два случая, упомянутые в формулировке этой леммы.

Случай 1. Предположим, что $i \ge 0$, $j \ge 0$, $k \ge 0$. Тогда

$$r_1 = -i-j-k, \quad r_2 = -i-j, \quad r_3 = -i, \quad r_4 = 0. \quad (5.18)$$

Подставляя эти значения в (5.15), находим выражение для $\varphi(r_m)$ $(1 \le m \le 4)$ через (i,j,k). Затем подставляем найденные выражения для $\varphi(r_m)$ в формулу (5.16), чтобы получить формулу, выражающую $N_{ijk\ell}$ в качестве некоторого многочлена пятой степени от переменных (i,j,k). Наконец, симметризуем этот многочлен, т. е. подставляем его в формулу (5.17), соответствующим образом переставляя аргументы для каждого из шести слагаемых из правой части этой формулы. При этом важно заметить, что в случае 1 можно не заботиться о виде функций $r_1(i,j,k)$, $r_2(i,j,k)$, $r_3(i,j,k)$, $r_4(i,j,k)$ для разных слагаемых из правой части формулы (5.17); эти функции преобразуются посредством той же перестановки. Например, второе слагаемое $N_{ikj\ell}$ из правой части (5.17) получено из первого слагаемого транспозицией индексов (j,k). Для этого слагаемого $r_1=-i-j-k$, $r_2=-i-k$, $r_3=-i$, $r_4=0$. Эти формулы получаются из (5.18) посредством той же транспозиции. В итоге приходим к равенству $Z_{ijk,-i-j-k}=P_1(i,j,k)$, где многочлен P_1 определяется формулой (5.2).

Случай 2. Предположим, что $i\le 0$, $j\ge 0$, $k\ge 0$, $i+j\le 0$, $i+k\le 0$, $i+j+k\ge 0$. В этом случае корни (r_1,r_2,r_3,r_4) имеют различные выражения для разных слагаемых из правой части формулы (5.17), а именно

$$r_1=-i-j-k,\quad r_2=0,\quad r_3=-i-j,\quad r_4=-i\quad \text{для } N_{ijk\ell};$$

$$r_1=-j,\quad r_2=-i-j-k,\quad r_3=0,\quad r_4=-i-j\quad \text{для } N_{jik\ell};$$

$$r_1=-j-k,\quad r_2=-j,\quad r_3=-i-j-k,\quad r_4=0\quad \text{для } N_{jki\ell}.$$

Соответствующие формулы для остальных трех слагаемых получаются применением транспозиции индексов (j,k) к этим равенствам. Используя эти выражения, повторяем наши вычисления и приходим к равенству $Z_{ijk,-i-j-k}=P_2(i,j,k)$, где многочлен P_2 определяется формулой (5.3). $\square$

6. Некоторые открытые вопросы

Напомним проблему полноты системы дзета-инвариантов, сформулированную в конце разд. 2: для данной положительной функции $b\in C^\infty(\mathbb{S})$ требуется найти все положительные функции $a\in C^\infty(\mathbb{S})$, удовлетворяющие системе (2.25), где $b_k=Z_k(b)$. Предварительным условием решения проблемы полноты является положительный ответ на следующий вопрос о *независимости дзета-инвариантов*: являются ли формы $Z_k(a)$ $(k=1,2,\dots)$ независимыми друг от друга, т. е. содержит ли система (2.25) бесконечно много независимых условий на коэффициенты Фурье функции a? Мы полагаем, что ответ на этот вопрос положителен, но пока не смогли это доказать. Первый и второй дзета-инварианты независимы. Действительно, $Z_1(a)$ не зависит от $(\hat a_0,\hat a_{\pm1})$, как видно из (2.23). С другой стороны, 4-форма $Z_2(a)$ содержит слагаемые вида $\hat a_0^2\hat a_k a_{-k}$ с ненулевыми коэффициентами, в чем легко убедиться с помощью теоремы 5.1.

Легко видеть, что $Z_k(a)=0$ $(k=1,2,\dots)$ для любой функции a, принадлежащей трехмерному подпространству

$$L=\{a\in C^\infty(\mathbb{S})\mid a(\theta)=\hat a_0+\hat a_1e^{i\theta}+\hat a_{-1}e^{-i\theta}\}$$

пространства $C^\infty(\mathbb{S})$. Действительно, в силу (2.2) $N_{j_1\dots j_{2k}}=0$, если каждый из индексов $(j_1,\dots,j_{2k})$ равен нулю или ±1. Обратное утверждение верно при $k=1$ для действительных функций: если $Z_1(a)=0$ для действительной функции $a\in C^\infty(\mathbb{S})$, то $a\in L$. Это вытекает из формулы Эдварда (2.23), которая приобретает следующий вид в случае действительной функции a:

$$Z_1(a)=\frac{2}{3}\sum_{n=2}^{\infty}(n^3-n)|\hat a_n|^2. \tag{6.1}$$

Как устроено множество всех (действительных) функций $a\in C^\infty(\mathbb{S})$, удовлетворяющих $Z_k(a)=0$ при $k=2,3,\dots$, может ли оно сильно отличаться от L?

Как видно из (6.1), оценка

$$Z_1(a)=\frac{2}{3}\sum_{n\ge2}(n^3-n)|\hat a_n|^2\ge c_1\sum_{n\ge2}n^3|\hat a_n|^2$$

с некоторой универсальной постоянной $c_1>0$ справедлива для всех действительных функций $a\in C^\infty(\mathbb{S})$.

Проблема 6.1. *Верно ли, что оценка*

$$Z_k(a)\ge c_k\sum_{n\ge2}n^{2k+1}|\hat a_n|^{2k} \tag{6.2}$$

справедлива для любой действительной функции $a\in C^\infty(\mathbb{S})$ и для любого $k=2,3,\dots$, где коэффициент $c_k>0$ зависит лишь от k? В случае отрицательного ответа тот же вопрос может быть поставлен для положительных функций a.

Пока даже неравенство $Z_k(a)\ge0$ $(k=2,3,\dots)$ остается недоказанным для действительных a. Наряду с (6.1), некоторым «наивным» аргументом в пользу последнего неравенства может служить следующее наблюдение: согласно (2.5) $Z_k(a)=\zeta_a(-2k)=\mathrm{Tr}(B^2)$ для некоторого самосопряженного оператора B. Мы численно проверили неравенство $Z_2(a)\ge0$ для большого числа функций, которые выбирались путем более-менее случайного выбора коэффициентов Фурье, удовлетворяющих $\overline{\hat a}_n=\hat a_{-n}$ и $\hat a_n=0$ при $|n|>n_0$ для некоторого n_0. Неравенство оказалось справедливым во всех рассмотренных случаях.

Теоремы компактности следующего вида популярны в спектральной геометрии (см. [4] и цитированную там литературу): семейство римановых многообразий (удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям), лапласианы которых изоспектральны, является (пред)компактным в подходяще выбранной топологии. Обсудим одну из возможных теорем компактности для стекловского спектра. Разумеется, конформная эквивалентность должна быть принята во внимание ввиду некомпактности конформной группы.

Напомним, что гильбертово пространство $H^s(\mathbb{S})$ является пополнением пространства $C^\infty(\mathbb{S})$ по норме

$$\|a\|^2_{H^s(\mathbb{S})}=\sum_n(1+|n|^{2s})|\hat a_n|^2.$$

По нашему мнению, $\|a\|_{H^{3/2}(\mathbb{S})}$ является наиболее подходящей нормой при изучении компактности для стекловского спектра. Действительно, как видно из (6.1),

$$\|a\|^2_{H^{3/2}(\mathbb{S})}\sim|\hat a_0|^2+|\hat a_1|^2+Z_1(a)$$

для действительной функции a.

Рассмотрим последовательность положительных функций $a^\nu\in C^\infty(\mathbb{S})$ $(\nu=1,2,\dots)$, для которых стекловский спектр $\mathrm{Sp}(a^\nu\Lambda_e)$ не зависит от ν. Из (6.1) вытекает оценка

$$\left|\hat a^\nu_n\right|\le C|n|^{-3/2}\quad\text{при } |n|\ge2 \tag{6.3}$$

с некоторой постоянной C, не зависящей от ν. Поэтому последовательность $\left|\hat a^\nu_n\right|$ $(\nu=1,2,\dots)$ ограничена при любом $|n|\ge2$. Положительность функции a^ν влечет неравенство $\left|\hat a^\nu_1\right|\le\hat a^\nu_0$. Таким образом, единственным препятствием к ограниченности последовательности норм $\|a^\nu\|_{H^{3/2}(\mathbb{S})}$ $(\nu=1,2,\dots)$ является возможная неограниченность последовательности $\hat a^\nu_0$ $(\nu=1,2,\dots)$, которая действительно может быть неограниченной, как показывают простые примеры. Мы стараемся преодолеть это препятствие путем замены каждой функции a^ν некоторой конформно эквивалентной ей функцией. Таким образом мы приходим к следующей формулировке.

Гипотеза 6.2. *Пусть $a^\nu \in C^\infty(\mathbb{S})$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ — последовательность функций, равномерно ограниченных снизу некоторой положительной постоянной: $a^\nu(\theta) \geq c > 0$. Предположим, что стекловский спектр $\mathrm{Sp}(a^\nu \Lambda_e)$ не зависит от ν. Тогда найдется такая подпоследовательность a^{ν_k}, что каждая функция a^{ν_k} конформно эквивалентна некоторой функции $b^k \in C^\infty(\mathbb{S})$ и последовательность норм $\|b^k\|_{H^{3/2}(\mathbb{S})}$ ограничена. Значит, для любого $s < 3/2$ из последовательности b^k можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $H^s(\mathbb{S})$.*

Главная трудность нашего подхода к доказательству этой гипотезы связана с оценкой (6.3). Мы можем доказать гипотезу, если вместо (6.3) справедлива более сильная оценка

$$\left|\hat{a}_n^\nu\right| \leq C|n|^{-3/2-\varepsilon} \quad \text{при } |n| \geq 2 \quad (C \text{ не зависит от } \nu), \tag{6.4}$$

где $\varepsilon > 0$ может быть любым. Возможность получения оценок вида (6.4) тесно связана с проблемой 6.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Edward J.* An inverse spectral result for the Neumann operator on planar domains // J. Funct. Anal. 1993. V. 111, N 2. P. 312–322.
2. *Jollivet A., Sharafutdinov V.* On an inverse problem for the Steklov spectrum of a Riemannian surface // Contemp. Math. 2014. V. 615. P. 165–191.
3. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
4. *Brooks R., Perry P., Petersen P.* Compactness and finiteness theorems for isospectral manifolds // J. Reine Angew. Math. 1992. V. 426. P. 67–89.

Статья поступила 25 марта 2014 г.

Малькович Евгений Геннадьевич, Шарафутдинов Владимир Альтафович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
malkovich@math.nsc.ru, sharaf@math.nsc.ru