Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 517.958

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ С ФРЕНЕЛЕВСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

И. В. Прохоров, А. А. Сущенко

Аннотация. Исследована корректность задачи Коши для нестационарного уравнения переноса излучения в трехмерной ограниченной области с френелевскими условиями сопряжения на границах раздела сред. Доказано существование единственной сильно непрерывной полугруппы разрешающих операторов, получены условия стабилизации нестационарного решения.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.415

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнения, нестационарные уравнения, задача Коши, френелевские условия сопряжения, теорема Хилле — Иосиды.

1. Введение

Вопросы существования, единственности и гладкости решений краевых задач для стационарных и нестационарных линейных уравнений переноса излучения с традиционными условиями сопряжения на границах раздела сред типа непрерывной склейки в основном были решены во второй половине прошлого века [1–6]. Исключения составляют, пожалуй, лишь некоторые задачи со специальным интегралом столкновений, описывающим комптоновское рассеяние. Результаты этих исследований были опубликованы сравнительно недавно [7, 8].

Теория краевых задач для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границах раздела сред еще не завершена и в настоящее время достаточно интенсивно развивается [9–16]. Обобщенные условия сопряжения позволяют описывать различные физические эффекты на границах раздела, не учтенные в самом уравнении. В частности, френелевские условия сопряжения моделируют зеркальное отражение и преломление по закону Снеллиуса потока излучения на поверхности раздела двух сред.

В настоящей работе продолжены исследования [12, 13], посвященные изучению краевых задач для нестационарного уравнения переноса. В [12, 13] доказана разрешимость уравнения излучения в среде с плоскопараллельной симметрией и с оператором сопряжения достаточно общего вида. При этом благодаря специфической геометрии области основной результат получен без ограничения типа «сжатия» на оператор сопряжения.

В общем случае существует пример неединственности решения задачи для стационарного уравнения переноса излучения в чисто поглощающей трехмерной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14–11–00079).

области с нестрого сжимающим оператором сопряжения [10], что в значительной мере обуславливает неединственность соответствующего решения нестационарного уравнения. Однако для широко известных операторов сопряжения, к которым, несомненно, можно отнести френелевский оператор, единственность стационарного решения имеет место при традиционных ограничениях на коэффициенты уравнения. С учетом последнего обстоятельства в данной работе показывается корректность задачи Коши для нестационарного уравнения переноса с френелевскими условиями сопряжения. Доказательство основного утверждения строится на сведении исходной начально-краевой задачи к абстрактной задаче Коши для эволюционного уравнения и применении теоремы Хилле — Иосиды [17].

Предметом исследования данной работы является интегродифференциальное уравнение переноса [2]

$$\left(\frac{1}{v(r)}\frac{\partial}{\partial t}+\omega\cdot\nabla_r+\sigma(r)\right)I(r,\omega,t)=\sigma(r)\Lambda(r)\int\limits_{\Omega}p(r,\omega\cdot\omega')I(r,\omega',t)\,d\omega',\qquad(1)$$

описывающее нестационарный процесс распространения излучения в $\mathbb{R}^3$. Функция $I(r,\omega,t)$ интерпретируется как плотность потока частиц в момент времени $t\in[0,+\infty)$ в точке $r\in\mathbb{R}^3$, движущихся со скоростью v в направлении единичного вектора $\omega\in\Omega=\{\omega\in\mathbb{R}^3:|\omega|=1\}$. Функции σ и p имеют смысл сечения взаимодействия и индикатрисы рассеяния. Неотрицательная величина Λ характеризует тип среды: при $\Lambda\le 1$ среда неразмножающая, в противном случае — размножающая.

Процесс переноса излучения происходит в некоторой многокомпонентной системе G, состоящей из объединения конечного числа ограниченных и попарно не пересекающихся подобластей $G_1,G_2,\dots,G_m$, причем замыкание $\overline{G}$ является выпуклым множеством в $\mathbb{R}^3$.

В каждой из подобластей G_i функции $v(r)$, $\Lambda(r)$, $\sigma(r)$, $p(r,\omega\cdot\omega')$ не зависят от переменной r и принимают значения $v(r)=v_i>0$, $\sigma(r)=\sigma_i>0$, $\Lambda(r)=\Lambda_i\ge 0$, $p(r,\omega\cdot\omega')=p_i(\omega\cdot\omega')\ge 0$, где $p_i(\omega\cdot\omega')\in L_1([-1,1])$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int\limits_{\Omega}p_i(\omega\cdot\omega')\,d\omega'=1.$$

Пусть границы $\partial G_i=\overline{G}_i\setminus G_i$ областей G_i — гладкие поверхности класса C^1. Поверхность $\partial\overline{G}$ будем называть *внешней границей* множества G, а $\gamma=\partial G\setminus\partial\overline{G}$ — *внутренней границей* множества G. Для определенности, говоря о единичном векторе $n(z)$ нормали к поверхности $\partial\overline{G}$ в точке z, будем иметь в виду внешнюю нормаль. Если z является точкой контакта двух смежных областей G_i и G_j, $1\le i<j\le m$, то нормаль $n(z)$ выбирается внешней к поверхности с бо́льшим индексом, т. е. к ∂G_j.

Обозначим $X=G\times\Omega$, $\Gamma^{\pm}_{\text{ext}}=\partial\overline{G}\times\Omega_{\pm}(z)$, $\Omega_{\pm}(z)=\{\omega\in\Omega:\operatorname{sgn}(n(z)\cdot\omega)=\pm1\}$, $\Gamma^{\pm}=\Gamma^{\pm}_{\text{ext}}\cup(\gamma\times\Omega)$ и присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия:

$$I|_{t=0}=I_0\quad\text{на } X,\qquad(2)$$

$$I^-=\mathscr{B}I^+\quad\text{на } \Gamma^-\times[0,+\infty).\qquad(3)$$

В (2) функция $I_0(z,\omega)\ge 0$ характеризует состояние процесса в начальный момент времени $t=0$, в условии (3) функции $I^{\pm}$ являются предельными граничными значениями функции I, $I^{\pm}(z,\omega,t)=\lim\limits_{\epsilon\to-0}I(z\pm\epsilon\omega,\omega,t)$, и оператор сопряжения $\mathscr{B}$ описывает френелевское отражение и преломление потока излучения на границе раздела сред [10]:

$$(\mathscr{B}I^+)(z,\omega,t) = R(z,\omega)I^+(z,\omega_{\mathrm{re}},t) + T(z,\omega)I^+(z,\omega_{\mathrm{tr}},t). \tag{4}$$

Здесь

$$\omega_{\mathrm{re}} = \omega - 2\nu n, \quad \omega_{\mathrm{tr}} = \psi(z,\nu)n + \tilde{\kappa}(z,\nu)(\omega - \nu n), \quad \nu = \omega \cdot n(z), \tag{5}$$

$$\tilde{\kappa}(z,\nu) = \begin{cases} \kappa_i/\kappa_j, & \text{если } z \in \partial G_i \cap \partial G_j,\ 0 < \nu(z) \le 1, \\ \kappa_j/\kappa_i, & \text{если } z \in \partial G_i \cap \partial G_j,\ -1 \le \nu(z) < 0, \\ \kappa_j, & \text{если } z \in \partial \overline{G} \cap \partial G_j,\ -1 \le \nu(z) < 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\psi(z,\nu) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\nu)\sqrt{1-\tilde{\kappa}^2(z,\nu)(1-\nu^2)}, & \text{если } 1-\tilde{\kappa}^2(z,\nu)(1-\nu^2) \ge 0, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{7}$$

$$R(z,\nu) = \frac{1}{2}\big(R_{\|}^2(z,\nu) + R_{\perp}^2(z,\nu)\big), \quad T(z,\nu) = \begin{cases} 1 - R(z,\nu), & z \in \gamma, \\ 0, & z \in \partial\overline{G}, \end{cases} \tag{8}$$

где константы κ_i обозначают показатели преломления сред G_i и

$$R_{\|}(z,\nu) = \frac{\tilde{\kappa}(z,\nu)\psi(z,\nu) - \nu}{\tilde{\kappa}(z,\nu)\psi(z,\nu) + \nu}, \quad R_{\perp}(z,\nu) = \frac{\psi(\nu) - \tilde{\kappa}(\nu)\nu}{\psi(z,\nu) + \tilde{\kappa}(z,\nu)\nu}. \tag{9}$$

В силу обозначений (6), (8) для точек $z \in \partial\overline{G}$ оператор сопряжения $\mathscr{B}$ на поверхности $\partial\overline{G}$ описывает френелевское отражение на границе раздела среды с вакуумом.

Далее, где это не вызывает недоразумений, будем опускать зависимость функций ψ, $\tilde{\kappa}$, R, T от переменной z.

2. Функциональные пространства

Обозначим через Π_ω ортогональную проекцию множества G на плоскость, перпендикулярную направлению ω и проходящую через фиксированную точку в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\Pi_{\xi,\omega}$, где $\xi \in \Pi_\omega$, $\omega \in \Omega$, есть пересечение прямой $\{\xi + \tau\omega,\ -\infty < \tau < +\infty\}$ и множества G. Относительно множества ∂G будем дополнительно предполагать выполнимость условия обобщенной выпуклости, а именно: любая прямая, имеющая общую точку с G, пересекает ∂G в конечном числе точек [5]. Согласно этому условию одномерное открытое множество $\Pi_{\xi,\omega}$ является объединением конечного числа интервалов

$$\begin{gathered} \Pi_{\xi,\omega}^i = \{\xi + \tau\omega,\ d_i(\xi,\omega) < \tau < d_{i+1}(\xi,\omega)\}, \quad i = 1,\dots,q(\xi,\omega), \\ -\infty < d_1(\xi,\omega) < d_2(\xi,\omega) < \dots < d_{q+1}(\xi,\omega) < +\infty, \\ q(\xi,\omega) \le \bar{q} = \sup_{(\xi,\omega)\in\Pi_\omega\times\Omega} q(\xi,\omega) < \infty, \quad \Pi_{\xi,\omega} = \bigcup_{i=1}^{q(\xi,\omega)} \Pi_{\xi,\omega}^i. \end{gathered} \tag{10}$$

Преобразование $r = \xi + \tau\omega$ множества G в $\Pi_\omega \times \Pi_{\xi,\omega}$ взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо по всем аргументам с якобианом, равным единице, следовательно, преобразование $r = \xi + \tau\omega'$, $\omega = \omega'$ переводит функции, измеримые на $G \times \Omega$, в функции, измеримые на $\Pi_\omega \times \Pi_{\xi,\omega} \times \Omega$ [1].

Очевидно, что

$$\Gamma_{\mathrm{ext}}^- = \{\xi + d_1(\xi,\omega)\omega,\ \xi \in \Pi_\omega\} \times \Omega,$$

$$\Gamma^+_{\text{ext}} = \{\xi + d_{q+1}(\xi,\omega)\omega,\ \xi \in \Pi_\omega\} \times \Omega,$$

$$\Gamma^- = \{\xi + d_i(\xi,\omega)\omega,\ \xi \in \Pi_\omega,\ i = \overline{1, q(\xi,\omega)}\} \times \Omega,$$

$$\Gamma^+ = \{\xi + d_{i+1}(\xi,\omega)\omega,\ \xi \in \Pi_\omega,\ i = \overline{1, q(\xi,\omega)}\} \times \Omega.$$

Будем говорить, что функция Φ *принадлежит* $L_\infty(\Gamma^-)$, если она ограничена почти всюду на Γ^-_γ и

$$\sum_{i=1}^{q(\xi,\omega)} \Phi(\xi + t_i(\xi,\omega)\omega, \omega) \in L_\infty(\Pi_\omega \times \Omega),$$

и Φ *принадлежит* $L_\infty(\Gamma^+)$, если

$$\sum_{i=1}^{q(\xi,\omega)} \Phi(\xi + t_{i+1}(\xi,\omega)\omega, \omega) \in L_\infty(\Pi_\omega \times \Omega).$$

В дальнейшем оператор $\omega \cdot \nabla_r f$ понимается как производная в точке $(r,\omega) = (\xi + \tau\omega, \omega) = (\xi, \tau, \omega)$ в направлении ω:

$$\omega \cdot \nabla_r f = \frac{\partial}{\partial \tau} f(r + \tau\omega, \omega)\bigg|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} f(\xi + \tau\omega, \omega).$$

Введем в рассмотрение пространство функций $W^1_\infty = \{f \in L_\infty(X) : \omega \cdot \nabla_r f \in L_\infty(X)\}$, где через $L_\infty(X)$ обозначено пространство функций, измеримых и ограниченных почти всюду на X, с нормой $\|f\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X}|f(x)|$. В [10, 15] показано, что для любой функции $f \in W^1_\infty$ ее предельные значения $f^\pm$ на $\Gamma^\pm$ принадлежат $L_\infty(\Gamma^\pm)$. Определим оператор $\mathscr{S} : L_\infty(X) \to L_\infty(X)$ соотношением

$$\mathscr{S} f = \sigma(r)\Lambda(r) \int\limits_\Omega p(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega')\, d\omega',$$

а соотношением

$$\mathscr{A} f = -v(r)(\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega) + \sigma(r) f(r,\omega) - (\mathscr{S} f)(r,\omega))$$

— оператор $\mathscr{A}$, действующий в банаховом пространстве $L_\infty(X)$, с областью определения $D(\mathscr{A}) = \left\{f \in W^1_\infty : f^- = \mathscr{B} f^+ \text{ на } \Gamma^-\right\}$.

3. Постановка задачи Коши. Формулировка основного результата

Решением начально-краевой задачи (1)–(3) будем называть вектор-функцию $I(t)$, удовлетворяющую следующим условиям: значения $I(t)$ при всех $t \in [0, +\infty)$ принадлежат $D(\mathscr{A})$; в каждой точке t существует сильная производная функции $I(t)$, принадлежащая пространству $C([0,+\infty); L_\infty(X))$; справедливы соотношения

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \mathscr{A} I(t), \tag{11}$$

$$I(0) = I_0, \tag{12}$$

где $I_0 \in D(\mathscr{A})$.

Теорема 1. *Решение $I(t)$ задачи Коши (11), (12) существует, единственно и при выполнении неравенства $\overline{\Lambda} < -\lambda_+/\lambda_-$, где $\overline{\Lambda} = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \Lambda_i$, $\lambda_- = -\min\limits_{i=\overline{1,m}} v_i\sigma_i$, $\lambda_+ = \max\limits_{i=\overline{1,m}} v_i\sigma_i$, стабилизируется к нулю при $t \to \infty$.*

Согласно утверждению теоремы Хилле — Иосиды [17] для корректности задачи (11), (12) достаточно показать, что резольвента $\mathscr{R}_\lambda = (\lambda\mathscr{I} - \mathscr{A})^{-1}$ оператора $\mathscr{A}$ существует для всех вещественных λ, больших некоторого β, и ее норма ограничена числом $1/(\lambda - \beta)$. В этом случае теорема гарантирует существование единственной сильно непрерывной полугруппы $\mathscr{U}(t)$ разрешающих операторов, порожденной инфинитезимальным генератором $\mathscr{A}$ и удовлетворяющей условиям $\mathscr{U}(0) = \mathscr{I}$ и $\|\mathscr{U}(t)\| \le C\exp(\beta t)$. При этом решение задачи (11), (12) может быть найдено по следующей формуле [17]:

$$I(t) = \mathscr{U}(t)I_0 = \lim_{\epsilon\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha-i\epsilon}^{\alpha+i\epsilon} e^{-\zeta t}(\zeta\mathscr{I} - \mathscr{A})^{-1} I_0\, d\zeta, \quad \alpha > \beta,\ t > 0.$$

Таким образом, если покажем, что резольвента $\mathscr{R}_\lambda$ обладает указанными выше свойствами и порядок роста полугруппы β меньше нуля при $\Lambda < -\lambda_+/\lambda_-$, то теорема 1 будет доказана.

4. Вспомогательные утверждения

Так как $R + T \le 1$, оператор сопряжения $\mathscr{B} : L_\infty(\Gamma^+) \to L_\infty(\Gamma^-)$, описывающий френелевское отражение и преломления на границе среды G, ограничен и $\|\mathscr{B}\| \le 1$. В этом разделе докажем свойство оператора $\mathscr{B}$, которое понадобится при доказательстве единственности решения вспомогательной задачи.

Лемма 1. *Функция $\mathscr{B}|\Phi|$ при почти всех $z \in \gamma$ удовлетворяет соотношению*

$$\int\limits_{\Omega} \mathscr{B}|\Phi|(z,\omega)|n(z)\cdot\omega|\, d\omega = \int\limits_{\Omega} \left(R(-n(z)\cdot\omega) + \frac{T(-n(z)\cdot\omega)}{\tilde\kappa^2(n(z)\cdot\omega)} \right) |\Phi(z,\omega)||n(z)\cdot\omega|\, d\omega \tag{13}$$

и при почти всех $z \in \partial\overline{G}$ — соотношению

$$\int\limits_{\Omega_-(z)} \mathscr{B}|\Phi|(z,\omega)|n(z)\cdot\omega|\, d\omega = \int\limits_{\Omega_-(z)} R(-n(z)\cdot\omega)|\Phi(z,\omega)||n(z)\cdot\omega|\, d\omega, \tag{14}$$

где ψ, $\tilde\kappa$, R, T определены в (6)–(9).

Доказательство. Так как $\mathscr{B} : L_\infty(\Gamma^+) \to L_\infty(\Gamma^-)$ [10], в силу теоремы Фубини для $\Phi \in L_\infty(\Gamma^+)$ почти всюду на ∂G существуют интегралы в левых частях (13), (14).

Докажем соотношение (13). Введем в интеграле правой части (13) новые переменные ν и φ по формулам

$$\begin{cases} \nu = n(z)\omega, & -1 < \nu < 1, \\ \varphi = \operatorname{arctg}(\omega_2/\omega_1), & 0 \le \varphi < 2\pi, \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_1 = \cos(\varphi)\sqrt{1-\nu^2}, \\ \omega_2 = \sin(\varphi)\sqrt{1-\nu^2}, \\ \omega_3 = \nu. \end{cases} \tag{15}$$

Так как все векторы ω, $\omega_{\rm re}$, $\omega_{\rm tr}$ лежат в одной плоскости и

$$\nu_{\rm re} = n\cdot\omega_{\rm re} = -n\cdot\omega = -\nu, \quad \nu_{\rm tr} = n\cdot\omega_{\rm tr} = \psi(\nu),$$

то

$$\int\limits_{\Omega} \mathscr{B}|\Phi(z,\omega)||n(z)\cdot\omega|\,d\omega = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} R(\nu)|\Phi(z,\omega(-\nu,\varphi))||\nu|\,d\nu d\varphi + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} T(\nu)|\Phi(z,\omega(\psi(\nu),\varphi))||\nu|\,d\nu d\varphi. \quad (16)$$

Во втором интеграле правой части соотношения (16) сделаем замену переменных $\nu' = \psi(\nu)$. Найдем производную функции $\psi(\nu)$:

$$\psi'(\nu) = \frac{\operatorname{sgn}(\nu)\cdot\nu\cdot\tilde{\kappa}^2(\nu)}{\sqrt{1-\tilde{\kappa}^2(\nu)(1-\nu^2)}} = \frac{\nu\cdot\tilde{\kappa}^2(\nu)}{\psi(\nu)} = \frac{\nu\cdot\tilde{\kappa}^2(\nu)}{\nu'}. \quad (17)$$

Так как знаки функций $\nu' = \psi(\nu)$ и ν совпадают ($\operatorname{sgn}(\nu') = \operatorname{sgn}(\nu)$), то $\tilde{\kappa}(\nu') = \tilde{\kappa}(\nu)$, поэтому из (17) находим

$$|\nu|\,d\nu = \frac{|\nu|\cdot\nu'\,d\nu'}{\nu\cdot\tilde{\kappa}^2(\nu)} = \frac{\operatorname{sgn}(\nu)\cdot\nu'\,d\nu'}{\tilde{\kappa}^2(\nu)} = \frac{\operatorname{sgn}(\nu')\cdot\nu'\,d\nu'}{\tilde{\kappa}^2(\nu')} = \frac{|\nu'|\,d\nu'}{\tilde{\kappa}^2(\nu')}. \quad (18)$$

В первом интеграле (16) сделаем замену $\nu' = -\nu$ и, возвращаясь как в первом, так и во втором интегралах к старому обозначению переменной ν, получаем

$$\int\limits_{\Omega} \mathscr{B}|\Phi(z,\omega)||n(z)\cdot\omega|\,d\omega = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} R(-\nu)|\Phi(z,\omega(\nu,\varphi))||\nu|\,d\nu d\varphi + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{T(\psi^{-1}(\nu))}{\tilde{\kappa}^2(\nu)}|\Phi(z,\omega(\nu,\varphi))||\nu|\,d\nu d\varphi. \quad (19)$$

Из (6)–(9) вытекают следующие соотношения:

$$\kappa(\nu) = 1/\kappa(-\nu), \quad \psi^{-1}(\nu) = -\psi(-\nu) \quad \text{при } 1-\kappa^2(\nu)(1-\nu^2) \geq 0,$$

$$R_{\|}(-\nu) = \frac{\tilde{\kappa}(-\nu)\psi(-\nu)+\nu}{\tilde{\kappa}(-\nu)\psi(-\nu)-\nu} = \frac{-\psi^{-1}(\nu)/\tilde{\kappa}(\nu)+\nu}{-\psi^{-1}(\nu)/\tilde{\kappa}(\nu)-\nu} = -\frac{\nu\tilde{\kappa}(\nu)-\psi^{-1}(\nu)}{\nu\tilde{\kappa}(\nu)+\psi^{-1}(\nu)} = -R_{\|}(\psi^{-1}(\nu)),$$

$$R_{\perp}(-\nu) = \frac{\psi(-\nu)-\tilde{\kappa}(-\nu)\nu}{\psi(-\nu)-\tilde{\kappa}(-\nu)\nu} = \frac{-\psi^{-1}(\nu)+\nu/\tilde{\kappa}(\nu)}{-\psi^{-1}(\nu)-\nu/\tilde{\kappa}(\nu)} = -\frac{\nu-\psi^{-1}(\nu)\tilde{\kappa}(\nu)}{\nu+\psi^{-1}(\nu)\tilde{\kappa}(\nu)} = -R_{\perp}(\psi^{-1}(\nu)).$$

Поскольку

$$R(-\nu) = 0.5\big\{R_{\|}^2(-\nu)+R_{\perp}^2(-\nu)\big\} = 0.5\big\{R_{\|}^2(\psi^{-1}(\nu))+R_{\perp}^2(\psi^{-1}(\nu))\big\} = R(\psi^{-1}(\nu)),$$

$$T(\psi^{-1}(\nu)) = 1-R(\psi^{-1}(\nu)) = 1-R(-\nu) = T(-\nu),$$

из (19) находим

$$\int\limits_{\Omega} \mathscr{B}|\Phi(z,\omega)||n(z)\cdot\omega|\,d\omega = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(R(-\nu)+\frac{T(-\nu)}{\tilde\kappa^2(\nu)}\right)|\Phi(z,\omega(\nu,\varphi))||\nu|\,d\nu d\varphi$$
$$= \int\limits_{\Omega}\left(R(-n(z)\cdot\omega)+\frac{T(-n(z)\cdot\omega)}{\tilde\kappa^2(n(z)\cdot\omega)}\right)|\Phi(z,\omega)||n(z)\cdot\omega|\,d\omega. \quad (20)$$

Согласно (8) для $z\in\partial\overline{G}$ коэффициент пропускания T равен 0, поэтому соотношение (14) очевидным образом вытекает из (13). $\square$

Определим операторы $\mathscr{L}: D(\mathscr{A})\to L_\infty(X)$, $\mathscr{L}_\lambda : D(\mathscr{A})\to L_\infty(X)$:

$$\mathscr{L}f=(\omega\cdot\nabla_r+\sigma(r))f(r,\omega),\quad \mathscr{L}_\lambda=\mathscr{L}+\frac{\lambda}{v}\mathscr{I}.$$

Очевидно, что $\mathscr{A}=-v(\mathscr{L}-\mathscr{S})$ и для резольвенты оператора $\mathscr{A}$ справедливы соотношения

$$\mathscr{R}_\lambda=(\lambda\mathscr{I}-\mathscr{A})^{-1}=(\lambda\mathscr{I}+v(\mathscr{L}-\mathscr{S}))^{-1}=\left(\mathscr{L}+\frac{\lambda}{v}\mathscr{I}-\mathscr{S}\right)^{-1}v^{-1}=(\mathscr{L}_\lambda-\mathscr{S})^{-1}v^{-1}. \quad (21)$$

Лемма 2. *При $\lambda>\lambda_-$ уравнение*

$$\mathscr{L}_\lambda f=\Phi \quad (22)$$

в пространстве D имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть функции f_1 и f_2 из D удовлетворяют уравнению (22) и $\kappa(r)=\kappa_i$, $r\in G_i$, — показатель преломления среды G. Тогда функция $f=(f_1-f_2)/\kappa^2$ удовлетворяет однородному уравнению $\mathscr{L}_\lambda f=0$ с граничными условиями вида

$$f^-(z,\omega)=R(z,\nu)f^+(z,\omega_{\mathrm{re}})+\tilde\kappa^2(z,\nu)T(z,\nu)f^+(z,\omega_{\mathrm{tr}}),\quad (z,\omega)\in\gamma\times\Omega, \quad (23)$$

$$f^-(z,\omega)=R(z,\nu)f^+(z,\omega_{\mathrm{re}}),\quad (z,\omega)\in\Gamma^-_{\mathrm{ext}},\quad \nu=n(z)\cdot\omega. \quad (24)$$

Запишем решение уравнения $\mathscr{L}_\lambda f=0$, справедливое при почти всех $(\xi,\tau,\omega)\in\Pi_\omega\times\Pi_{\xi,\omega}\times\Omega$:

$$f(\xi+\tau\omega,\omega)=f^-(\xi+d_i(\xi,\omega)\omega,\omega)\exp\left(-\int\limits_{d_i(\xi,\omega)}^{\tau}(\sigma(\xi+\tau'\omega)+\lambda/v(\xi+\tau'\omega))\,d\tau'\right),$$

откуда вытекает, что при $\tau\in(d_i(\xi,\omega),d_{i+1}(\xi,\omega)]$ функция $f(\xi+\tau\omega,\omega)$ не меняет знака. Учитывая это обстоятельство и то, что $G=\Pi_\omega\times\Pi_{\xi,\omega}$, умножим уравнение $\mathscr{L}_\lambda f=0$ на функцию $\mathrm{sgn}(f(r,\omega))$ и проинтегрируем на множестве

$G \times \Omega$:

$$J = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{G} \{\operatorname{sgn}(f(r,\omega))\omega\cdot\nabla_r f(r,\omega) + (\sigma(r)+\lambda/v(r))\operatorname{sgn}(f(r,\omega))f(r,\omega)\}\,drd\omega$$

$$= \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Pi_\omega}\int\limits_{\Pi_{\xi,\omega}} \operatorname{sgn}(f(\xi+\tau\omega,\omega))\frac{\partial f(\xi+\tau\omega,\omega)}{\partial\tau}\,d\tau d\xi d\omega$$

$$+ \int\limits_{\Omega}\int\limits_{G}(\sigma(r)+\lambda/v(r))|f(r,\omega)|\,drd\omega = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Pi_\omega}\sum_{i=1}^{q(\xi,\omega)}\int\limits_{\Pi^i_{\xi,\omega}} \frac{\partial|f(\xi+\tau\omega,\omega)|}{\partial\tau}\,d\tau d\xi d\omega$$

$$+ \int\limits_{G}(\sigma(r)+\lambda/v(r))|f(r,\omega)|\,drd\omega$$

$$= \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Pi_\omega}\Bigg\{|f|^+(\xi+d_{q+1}(\xi,\omega)\omega,\omega) - |f|^-(\xi+d_1(\xi,\omega)\omega,\omega)$$

$$+ \sum_{i=2}^{q(\xi,\omega)}(|f|^+-|f|^-)(\xi+d_i(\xi,\omega)\omega,\omega)\Bigg\}\,d\xi d\omega + \int\limits_{\Omega}\int\limits_{G}(\sigma(r)+\lambda/v(r))|f(r,\omega)|\,drd\omega = 0. \tag{25}$$

Учитывая граничные условия (23), (24), из соотношения (25) по теореме о замене переменных в поверхностном интеграле ($d\xi = |n(z)\cdot\omega|\,ds_z$) получаем

$$J = \int\limits_{\partial\overline{G}}\int\limits_{\Omega_-(z)} \{|f(z,\omega)|^+ - R(\nu)|f(z,\omega_{\mathrm{re}})|^+\}|\nu|\,d\omega ds_z$$

$$+ \int\limits_{\gamma}\int\limits_{\Omega}\{|f(z,\omega)|^+ - |R(\nu)f^+(z,\omega_{\mathrm{re}}) + \tilde\kappa^2(\nu)T(\nu)f^+(z,\omega_{\mathrm{tr}})|\}|\nu|\,d\omega ds_z$$

$$+ \int\limits_{\Omega}\int\limits_{G}(\sigma(r)+\lambda/v(r))|f(r,\omega)|\,drd\omega = J_1+J_2+J_3, \quad \nu = n(z)\cdot\omega, \tag{26}$$

где через J_i, $i=1,2,3$, обозначены соответствующие слагаемые в соотношении (26). Так как $R,T \geq 0$, то

$$|f(z,\omega)|^+ - |R(\nu)f^+(z,\omega_{\mathrm{re}}) + \tilde\kappa^2(\nu)T(\nu)f^+(z,\omega_{\mathrm{tr}})|$$
$$\geq |f(z,\omega)|^+ - R(\nu)|f(z,\omega_{\mathrm{re}})|^+ - \tilde\kappa^2(\nu)T(\nu)|f(z,\omega_{\mathrm{tr}})|^+. \tag{27}$$

С учетом того, что $R,T \leq 1$, $R+T=1$, из леммы 1 вытекает следующие неравенства:

$$J_1 = \int\limits_{\partial\overline{G}}\int\limits_{\Omega_-(z)} \{|f(z,\omega)|^+ - R(\nu)|f(z,\omega_{\mathrm{re}})|^+\}|\nu|\,d\omega ds_z$$

$$= \int\limits_{\partial\overline{G}}\int\limits_{\Omega_-(z)} \{|f(z,\omega)|^+ - R(-\nu)|f(z,\omega)|^+\}|\nu|\,d\omega ds_z \geq 0, \quad \nu = n(z)\cdot\omega, \tag{28}$$

$$J_2 \geq \int\limits_{\gamma}\int\limits_{\Omega}\{|f(z,\omega)|^+ - R(\nu)|f(z,\omega_{\mathrm{re}})|^+ - \tilde\kappa^2(\nu)T(\nu)|f(z,\omega_{\mathrm{tr}})|^+\}|\nu|\,d\omega ds_z$$

$$= \int\limits_{\gamma}\int\limits_{\Omega}\{|f(z,\omega)|^+ - (R(-\nu)+T(-\nu)|f(z,\omega)|^+\}|\nu|\,d\omega ds_z = 0, \quad \nu = n(z)\cdot\omega. \tag{29}$$

Из (26), (27), (29) следует, что $J = J_1 + J_2 + J_3 \geq J_3$. Согласно (25) $J = 0$, следовательно, и $J_3 = 0$. При $\lambda > \lambda_-$ имеет место $\sigma(r) + \lambda/v(r) > 0$, поэтому из равенства $J_3 = 0$ получаем $f = 0$ почти всюду на $G \times \Omega$. Лемма доказана. $\square$

5. Доказательство основных утверждений

В этом разделе доказываются две леммы, из которых непосредственно вытекают утверждения теоремы 1.

Введем в рассмотрение операторы $\mathscr{P}_\lambda : L_\infty(\Gamma^-) \to L_\infty(X)$ и $\mathscr{E}_\lambda : L_\infty(X) \to W^1_\infty(X)$, определяемые формулами

$$(\mathscr{P}_\lambda \phi)(r, \omega) = \phi^-(r - d(r, -\omega)\omega, \omega) \exp(-(\sigma_i + \lambda/v_i) d(r, -\omega)),$$

$$(\mathscr{E}_\lambda \Phi)(r, \omega) = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-(\sigma_i + \lambda/v_i)\tau) \Phi(r - \tau\omega, \omega)\, d\tau,$$

где $d(r, \omega)$ — расстояние от точки $r \in G_i \subset G$ до границы области G_i в направлении вектора ω и $d(r, \omega) = \inf\limits_{\tau > 0} \{r + \tau'\omega \in G_i$ для любого $\tau' \in (0, \tau)\}$.

Принимая во внимание введенные обозначения, непосредственно можно проверить, что существование оператора $\mathscr{R}_\lambda$ в пространстве $D(A)$ эквивалентно однозначной разрешимости уравнения

$$f = \mathscr{P}_\lambda(\mathscr{B} f^+) + \mathscr{E}_\lambda(\mathscr{S} f + I_0/v). \tag{30}$$

Лемма 3. *При всех λ, удовлетворяющих условию $\lambda > \lambda_-$, решение уравнения*

$$f = \mathscr{P}_\lambda(\mathscr{B} f^+) + \mathscr{E}_\lambda \Phi \tag{31}$$

существует, единственно и справедлива оценка

$$\|f\| \leq \frac{\lambda_+}{\lambda - \lambda_-} \left\| \frac{\Phi}{\sigma} \right\|. \tag{32}$$

Доказательство. В силу эквивалентности задачи для уравнения (22) в классе $\mathscr{D}(A)$ решению интегрального уравнения (31) единственность решения (31) вытекает из леммы 2. Покажем существование решения.

Обозначим через $\Phi_\pm$ функции следующего вида:

$$\Phi_+(r, \omega) = \begin{cases} \Phi(r, \omega), & \text{если } \Phi(r, \omega) \geq 0, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$\Phi_-(r, \omega) = \begin{cases} \Phi(r, \omega), & \text{если } \Phi(r, \omega) \leq 0, \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases}$$

Положим $f_{0,\pm} = \mathscr{E}_\lambda \Phi_\pm$ и построим итерационный процесс

$$f_{\pm,n} = \mathscr{P}_\lambda(\mathscr{B} f^+_{\pm,n-1}) + f_{\pm,0} \quad n = 1, 2, \dots. \tag{33}$$

Так как операторы $\mathscr{P}_\lambda$, $\mathscr{E}_\lambda$, $\mathscr{B}$ неотрицательны, $f_{+,0}, f_{+,1}, \dots, f_{+,n}, \dots$ — монотонно возрастающая, а $f_{-,0}, f_{-,1}, \dots, f_{-,n}, \dots$ — монотонно убывающая последовательности функций. Покажем, что последовательность $\{f_{+,n}\}$ ограничена сверху, а последовательность $\{f_{-,n}\}$ — снизу.

Для функции f_0 оценка (32) вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\|f_{+,0}\| \le \max_{1\le i\le m}\left\| \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-(\sigma_i+\lambda/v_i)\tau)\Phi_+(r-\tau\omega,\omega)\,d\tau \right\|$$
$$\le \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi_+}{\sigma}\right\| \max_{1\le i\le m}\|(1-\exp(-(\sigma_i+\lambda/v_i)d(r,-\omega)))\| \le \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi_+}{\sigma}\right\|. \quad (34)$$

Предполагая, что для функции $f_{+,n-1}$ неравенство (32) выполнено, убедимся, что оно справедливо и для функции $f_{+,n}$. Действительно, из (33) получаем

$$f_{+,n}(r,\omega) \le \|\mathscr{P}_\lambda\|\mathscr{B}\|\|f^+_{+,n-1}\| + \mathscr{E}_\lambda\Phi_+\|$$
$$\le \max_{1\le i\le m}\left\|\exp(-(\sigma_i+\lambda/v_i)d(r,-\omega))\frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi_+}{\sigma}\right\|\right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi_+}{\sigma}\right\|(1-\exp(-(\sigma_i+\lambda/v_i)d(r,-\omega)))\right\| \le \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi_+}{\sigma}\right\|. \quad (35)$$

Тем самым при $\lambda > \lambda_-$ монотонная последовательность $f_{-,0}, f_{-,1}, \dots, f_{-,n}, \dots$ ограничена сверху, следовательно, имеет предел $f_+ = \lim\limits_{n\to\infty} f_{+,n}$ в пространстве $L_\infty(X)$. Аналогично показывается, что

$$f_{-,n}(r,\omega) \ge -\frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi_-}{\sigma}\right\|.$$

Поскольку соотношение (33) также справедливо для $f^+_{\pm,n}$, повторяя рассуждения, нетрудно убедиться в существовании предельных функций $f^+_\pm \in L_\infty(\Gamma^+)$.

Переходя к пределу в равенстве (33), выводим, что функции $f_\pm$ удовлетворяют уравнению (31) при $\Phi = \Phi_\pm$. Таким образом, доказаны существование решения f уравнения (31) и оценка (32). □

Из лемм 2, 3 вытекает, что обратный к оператору L_λ при $\lambda > \lambda_-$ существует и ограничен. Введем на линейном множестве $\mathscr{D}$ норму

$$\|f\|_{\mathscr{D}} = \left\|\frac{L_\lambda f}{\sigma}\right\|. \quad (36)$$

Так как $\sigma \ge \mathrm{const} > 0$, из неравенства (32) вытекает

$$\|f\| \le \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\|f\|_{\mathscr{D}}. \quad (37)$$

Значит, сходимость последовательности функций по норме D влечет за собой сходимость в пространствах $L_\infty(\Gamma^+)$ и $L_\infty(X)$. Отсюда следует, что множество $D \subset L_\infty(X)$ с нормой (36) образует банахово пространство функций.

Лемма 4. *Пусть λ удовлетворяет условию*

$$\lambda > \beta = \lambda_- + \lambda_+\overline{\Lambda}. \quad (38)$$

Тогда решение уравнения (30) *существует, единственно и справедлива оценка*

$$\|f\| \le \frac{\|I_0\|}{\lambda-\beta}. \quad (39)$$

Доказательство. Поскольку функция p неотрицательна и удовлетворяет условию нормировки и справедливо неравенство (37), для $\|\mathscr{S}f/\sigma\|$ получаем

$$\left\|\frac{\mathscr{S}f}{\sigma}\right\| = \left\|\frac{\Lambda(r)\sigma(r)}{\sigma(r)}\int\limits_{\Omega} p(r,\omega\cdot\omega')f(r,\omega')\,d\omega'\right\| \le \overline{\Lambda}\|f\| \le \frac{\overline{\Lambda}\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\|f\|_{\mathscr{D}}. \tag{40}$$

По построению $\mathscr{L}_\lambda(\mathscr{P}_\lambda\mathscr{B}+\mathscr{E}_\lambda\mathscr{S})f = \mathscr{S}f$, следовательно, из леммы 3 находим

$$\|(\mathscr{P}_\lambda\mathscr{B}+\mathscr{E}_\lambda\mathscr{S})f\|_{\mathscr{D}} = \left\|\frac{\mathscr{S}f}{\sigma}\right\| \le \frac{\overline{\Lambda}\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\|f\|_{\mathscr{D}}.$$

Из (38) и последнего неравенства вытекает, что

$$\|(\mathscr{P}_\lambda\mathscr{B}+\mathscr{E}_\lambda\mathscr{S})\| \le \frac{\overline{\Lambda}\lambda_+}{\lambda-\lambda_-} < 1.$$

Так как норма оператора $\mathscr{P}_\lambda\mathscr{B}+\mathscr{E}_\lambda\mathscr{S}$, действующего в банаховом пространстве $\mathscr{D}$, меньше единицы, уравнение (30) при выполнении условия (38) однозначно разрешимо и решение может быть найдено по формуле

$$f = (\mathscr{I} - (\mathscr{P}_\lambda\mathscr{B}+\mathscr{E}_\lambda\mathscr{S}))^{-1}\mathscr{E}_\lambda\frac{I_0}{v}.$$

Докажем неравенство (39). Поскольку $\left\|\mathscr{E}_\lambda\frac{I_0}{v}\right\| \le \frac{\|I_0\|}{\lambda-\lambda_-}$, то

$$\|f\| = \left\|(\mathscr{I} - (\mathscr{P}_\lambda\mathscr{B}+\mathscr{E}_\lambda\mathscr{S}))^{-1}\mathscr{E}_\lambda\frac{I_0}{v}\right\| \le \frac{1}{1-\|\mathscr{P}_\lambda\mathscr{B}+\mathscr{E}_\lambda\mathscr{S}\|}\frac{\|I_0\|}{\lambda-\lambda_-}$$
$$\le \frac{1}{1-\frac{\overline{\Lambda}\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}}\frac{\|I_0\|}{\lambda-\lambda_-} \le \frac{\|I_0\|}{\lambda-\lambda_- - \overline{\Lambda}\lambda_+} = \frac{\|I_0\|}{\lambda-\beta}. \tag{41}$$

Таким образом, оценка (39) доказана. □

Из леммы 4 вытекает, что часть комплексной плоскости $\{\zeta\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta > \beta\}$ принадлежит резольвентному множеству оператора $\mathscr{A}$, причем для всех ζ из этого множества справедливо неравенство $\|\mathscr{R}_\zeta\| \le 1/(\operatorname{Re}\zeta-\beta)$. Этого достаточно для существования единственной полугруппы разрешающих операторов $\mathscr{U}(t)$ задачи Коши (11), (12): $I(t) = \mathscr{U}(t)I_0$.

Из ограничения (38) на порядок роста полугруппы β достаточно просто получаются условия стабилизации решения задачи Коши $I(t)$. Действительно, если $\overline{\Lambda} < -\lambda_+/\lambda_-$, то $\beta = \lambda_- + \lambda_+\overline{\Lambda} < 0$ и семейство операторов $\mathscr{U}(t)$ образует полугруппу сжатия, поэтому $\|\mathscr{U}(t)I_0\| \le C\exp(\beta t)\|I_0\| \to 0$ при $t\to\infty$, т. е. при $t\to\infty$ решение задачи Коши $I(t)$ стабилизируется к нулю. Отсюда, в частности, вытекает устойчивость решения задачи Коши (11), (12) на всей полуоси $[0,+\infty)$ при выполнении условия $\overline{\Lambda} < -\lambda_+/\lambda_-$.

Доказательство теоремы 1 завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 61. С. 3–158.
2. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
3. *Новиков В. М., Шихов С. Б.* Теория параметрического воздействия на перенос нейтронов. М.: Энергоиздат, 1982.

4. *Voigt J.* Positivity in time dependent linear transport theory // Acta Appl. Math. 1984. V. 2. P. 311–331.
5. *Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
6. *Маслова Н. Б.* Математические методы исследования уравнения Больцмана // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, № 1. С. 3–56.
7. *Аниконов Д. С., Коновалова Д. С.* Кинетическое уравнение переноса для случая комптоновского рассеяния // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 987–1001.
8. *Аниконов Д. С., Коновалова Д. С.* Краевая задача для уравнения переноса с чисто комптоновским рассеянием // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 3–16.
9. *Прохоров И. В.* Краевая задача теории переноса излучения в неоднородной среде с условиями отражения на границе // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 6. С. 848–851.
10. *Прохоров И. В.* О разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 6. С. 169–192.
11. *Прохоров И. В.* О структуре множества непрерывности решения краевой задачи для уравнения переноса излучения // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 256–272.
12. *Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V.* A boundary-value problem for the polarized-radiation transfer equation with Fresnel interface conditions for a layered medium // J. Comput. Appl. Math. 2011. V. 235, N 8. P. 2006–2014.
13. *Прохоров И. В.* О разрешимости начально-краевой задачи для интегродифференциального уравнения // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 377–387.
14. *Прохоров И. В.* Задача Коши для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 5. С. 75–766.
15. *Амосов А. А.* Краевые задачи для уравнения переноса излучения с условиями отражения и преломления // Вестн. МЭИ. 2014. № 1. С. 99–108.
16. *Amosov A. A.* Boundary value problem for the radiation transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions // J. Math. Sci. 2013. V. 193, N 2. P. 151–176.
17. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

Статья поступила 2 июня 2014 г.

Прохоров Игорь Васильевич, Сущенко Андрей Андреевич
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041;
Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, 8, Владивосток 690950
prokhorov@iam.dvo.ru