Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 517.955

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. В. Демиденко

Аннотация. Рассмотрен класс строго псевдогиперболических уравнений с младшими членами. Получены энергетические оценки. Установлены условия разрешимости задачи Коши в соболевских пространствах с экспоненциальным весом.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.607

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, псевдогиперболические уравнения, энергетические оценки.

1. Введение

В монографии [1] изучались краевые задачи для некоторых классов уравнений, не разрешенных относительно старшей производной:

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор. В литературе такие уравнения часто называют *уравнениями соболевского типа*. Большой интерес к их изучению возник в связи с исследованиями С. Л. Соболева [2] задачи о малых колебаниях вращающейся жидкости. В настоящее время имеется очень много теоретических и прикладных работ, посвященных изучению различных задач для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. При этом известно большое количество уравнений вида (1.1), возникающих при моделировании различных процессов (см., например, [1, 3]). По мере возрастания количества работ, посвященных изучению таких уравнений, к концу прошлого столетия начала «просматриваться» некоторая классификация уравнений вида (1.1). На основе анализа большого количества работ авторами [1] было выделено три класса уравнений: уравнения соболевского типа, псевдопараболические уравнения и псевдогиперболические уравнения. Класс псевдогиперболических уравнений был введен в [1] как обобщение гиперболических уравнений и одного класса уравнений, рассмотренного в [4].

При исследовании задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений (1.1) с постоянными коэффициентами в [1, 5, 6] были впервые получены энергетические оценки и доказаны теоремы о разрешимости в различных весовых соболевских пространствах. В этих работах рассматривались уравнения, для которых дифференциальный оператор

$$L(D_t,D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k \tag{1.2}$$

имеет символ $L(i\eta, i\xi)$, однородный относительно некоторого вектора $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_0 > 0$, $1/\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$, т. е.

$$L(c^{\alpha_0} i\eta, c^{\alpha_1} i\xi_1, \dots, c^{\alpha_n} i\xi_n) = cL(i\eta, i\xi_1, \dots, i\xi_n), \quad c > 0.$$

Иными словами, ранее рассматривались уравнения вида (1.1), не содержащие младшие члены (в обобщенном смысле). В [7] рассмотрен класс строго псевдогиперболических уравнений (1.1) с условием изотропности $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1/m$, а также с младшими членами, удовлетворяющими некоторым дополнительным условиям. Авторы [7] также получили энергетические оценки и доказали теоремы о разрешимости в некоторых соболевских пространствах с весом.

В настоящей работе мы изучаем задачу Коши для строго псевдогиперболических уравнений с постоянными коэффициентами и младшими членами. Отметим, что в отличие от гиперболических и параболических уравнений добавление младших членов в уравнение, не разрешенное относительно старшей производной, может существенно повлиять на разрешимость задачи Коши (см. [1]).

2. Основные результаты

Напомним определение строго псевдогиперболических операторов [1].

Вначале предположим, что символ $L(i\eta, i\xi)$ дифференциального оператора (1.2) однороден относительно вектора $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $1 - l\alpha_0 \geq \alpha_0 > 0$, $1/\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$.

Определение 1. Дифференциальный оператор (1.2) называется *псевдогиперболическим*, если оператор при старшей производной по времени $L_0(D_x)$ является квазиэллиптическим и уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{L_{l-k}(i\xi)}{L_0(i\xi)} (i\eta)^k = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \tag{2.1}$$

имеет только вещественные корни $\eta_1(\xi), \dots, \eta_l(\xi)$. Если корни различны, то оператор $L(D_t, D_x)$ будем называть *строго псевдогиперболическим.*

Из проведенных в [1, гл. 2] рассуждений вытекает, что если корни $\eta_j(\xi)$ уравнения (2.1) вещественны и различны, то для функции

$$m(i\eta + \sigma, i\xi) = \sum_{k=1}^{l} \prod_{j \neq k} |i\eta + \sigma - i\eta_j(\xi)|^2 \tag{2.2}$$

при любых $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\sigma \geq 0$ выполняется оценка

$$a_1(|i\eta + \sigma| + \langle \xi \rangle^{\alpha_0})^{2(l-1)} \leq m(i\eta + \sigma, i\xi) \leq a_2(|i\eta + \sigma| + \langle \xi \rangle^{\alpha_0})^{2(l-1)}, \tag{2.3}$$

где $\langle \xi \rangle^2 = \sum\limits_{1}^{n} \xi_i^{2/\alpha_i}$ и $a_j > 0$ — константы.

Отметим, что класс рассматриваемых операторов включает, в частности, дифференциальные операторы с вектором однородности $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1/(2m)$, определенные С. А. Гальперном [4].

Рассмотрим строго псевдогиперболические операторы с младшими членами

$$\mathscr{L}(D_t, D_x) = (L_0(D_x) + L_0'(D_x))D_t^l + \sum_{k=0}^{l-1} (L_{l-k}(D_x) + L_{l-k}'(D_x))D_t^k, \tag{2.4}$$

т. е. дифференциальный оператор $\mathscr{L}(D_t, D_x)$ имеет вид

$$\mathscr{L}(D_t, D_x) = L(D_t, D_x) + L'(D_t, D_x),$$

где главная часть $L(D_t, D_x)$ удовлетворяет указанным выше условиям, а младшая часть

$$L'(D_t, D_x) = L'_0(D_x)D_t^l + \sum_{k=0}^{l-1} L'_{l-k}(D_x)D_t^k$$

такая, что символы $L'_{l-k}(i\xi)$ «младших» операторов $L'_{l-k}(D_x)$, $k = 0, \dots, l$, удовлетворяют оценкам

$$c_1(\langle\xi\rangle^{1-l\alpha_0} + \langle\xi\rangle^{q-l\alpha_0}) \le |L_0(i\xi) + L'_0(i\xi)| \\ \le c_2(\langle\xi\rangle^{1-l\alpha_0} + \langle\xi\rangle^{q-l\alpha_0}), \quad l\alpha_0 \le q < 1, \quad (2.5)$$

$$|L'_{l-k}(i\xi)| \le c_0\langle\xi\rangle^{\varepsilon_k}, \quad q - l\alpha_0 \le \varepsilon_k < 1 - k\alpha_0, \ k = 0, \dots, l-1,$$

где $\xi \in \mathbb{R}^n$, $c_0, c_1, c_2 > 0$ — константы.

В дальнейшем будем предполагать, что уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{L_{l-k}(i\xi) + L'_{l-k}(i\xi)}{L_0(i\xi) + L'_0(i\xi)}(i\eta)^k = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad (2.6)$$

имеет вещественные корни $\hat{\eta}_1(\xi), \dots, \hat{\eta}_l(\xi)$, при этом для функции

$$\hat{m}(i\eta + \sigma, i\xi) = \sum_{k=1}^{l} \prod_{j \ne k} |i\eta + \sigma - i\hat{\eta}_j(\xi)|^2 \quad (2.7)$$

при любых $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\sigma \ge 0$ выполняется оценка

$$\hat{a}_1(|i\eta + \sigma| + \langle\xi\rangle^{\alpha_0})^{2(l-1)} \le \hat{m}(i\eta + \sigma, i\xi) \le \hat{a}_2(|i\eta + \sigma| + \langle\xi\rangle^{\alpha_0})^{2(l-1)}, \quad (2.8)$$

где $\hat{a}_j > 0$ — некоторые константы.

Иными словами, предполагаем, что младшие члены в (2.4) не нарушают характерного свойства (2.3) для аналогичной функции корней (2.2) в случае, когда строго псевдогиперболический оператор не имеет младших членов.

Приведем три примера строго псевдогиперболических уравнений:

$$\Delta D_t u + i \sum_{k=1}^{n} a_k D_{x_k}^4 u = f(t, x),$$

$$\Delta D_t^2 u - \sum_{k=1}^{n} a_k D_{x_k}^4 u = f(t, x),$$

где

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^4 > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

и уравнение Релея — Бишопа [8]

$$D_x^2\big(D_t^2 - a^2 D_x^2\big)u - D_t^2 u + c^2 D_x^2 u = f(t, x).$$

В первом случае символ дифференциального оператора $L(D_t, D_x)$ имеет вид

$$L(i\eta, i\xi) = -|\xi|^2 i\eta + i \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^4.$$

Очевидно, он однороден относительно вектора $\alpha_0 = 1/2$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1/4$. Во втором случае символ

$$L(i\eta, i\xi) = |\xi|^2\eta^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^4$$

однороден относительно вектора $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1/4$. Оба этих оператора являются строго псевдогиперболическими без младших членов.

Для уравнения Релея — Бишопа символ дифференциального оператора

$$\mathscr{L}(D_t, D_x) = D_x^2\big(D_t^2 - a^2 D_x^2\big) - D_t^2 + c^2 D_x^2 = \big(D_x^2 - I\big)D_t^2 + \big(c^2 D_x^2 - a^2 D_x^4\big)$$

имеет вид

$$\mathscr{L}(i\eta, i\xi) = L(i\eta, i\xi) + L'(i\eta, i\xi) = (\xi^2\eta^2 - a^2\xi^4) + (\eta^2 - c^2\xi^2).$$

Символ главной части $L(i\eta, i\xi)$ однороден относительно $(\alpha_0, \alpha_1) = (1/4, 1/4)$. Из явного вида символов младших членов, очевидно, имеем

$$|L_0(i\xi) + L_0'(i\xi)| = \xi^2 + 1,$$

а поскольку $\langle\xi\rangle = |\xi|^4$, $1 - l\alpha_0 = 1/2$, выполнены оценки (2.5) при $q = 1/2$. Учитывая явный вид корней уравнения

$$(\xi^2 + 1)\eta^2 - a^2\xi^4 - c^2\xi^2 = 0, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

получим также неравенство (2.8). Следовательно, оператор Релея — Бишопа строго псевдогиперболический.

Будем рассматривать задачу Коши для строго псевдогиперболического уравнения, имеющего младшие члены, с нулевыми начальными условиями

$$\begin{gathered} \mathscr{L}(D_t, D_x)u = f(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ D_t^k u|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, l-1. \end{gathered} \tag{2.9}$$

При изучении задачи будем следовать схеме из [1, гл. 2].

Символом $W_{2,\gamma}^{l,r}(G)$, $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $r = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)$, $\gamma > 0$, будем обозначать соболевское пространство с весом $e^{-\gamma t}$. По определению положим

$$\big\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{l,r}(G)\big\| = \big\|e^{-\gamma t}u(t,x), W_2^{l,r}(G)\big\|.$$

Решение задачи (2.9) будем искать в пространствах $W_{2,\gamma}^{l,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, предполагая, что $D_t^k u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{0,(1-k\alpha_0)r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $k = 0, \dots, l$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \alpha_{\min} = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Через $\tilde{u}_\gamma(\eta, \xi)$ обозначаем преобразование Фурье функции $u_\gamma(t,x) = e^{-\gamma t}u(t,x)$, а через $\hat{u}_\gamma(t,\xi)$ — ее частичное преобразование Фурье по x.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любой функции $u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{l,r}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > 0$, такой, что*

$$D_t^k u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{0,(1-k\alpha_0)r}(\mathbb{R}^{n+1}), \quad k = 0, \dots, l,$$

имеет место оценка

$$\gamma\|(\langle\xi\rangle^{1-l\alpha_0} + \langle\xi\rangle^{q-l\alpha_0})(|\eta| + \gamma + \langle\xi\rangle^{\alpha_0})^{l-1}\tilde{u}_\gamma(\eta,\xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \\ \le c\|\mathscr{L}(D_t, D_x)u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \tag{2.10}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(t,x)$.

Теорема 2. *Пусть* $|\alpha|/2 > q - l\alpha_0 > 0$ *и*

$$f(t,x) \in W^{0,s}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \cap L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; L_1(\mathbb{R}^n)), \quad s = (\alpha_0/\alpha_1, \dots, \alpha_0/\alpha_n),\ \gamma > 0.$$

Тогда задача Коши (2.9) *однозначно разрешима в* $W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *и для решения имеет место оценка*

$$\big\|u(t,x), W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| + \sum_{k=0}^{l} \big\|D^k_t u(t,x), W^{0,(1-k\alpha_0)r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\|$$
$$\leq c\big(\big\|f(t,x), W^{0,s}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|\big) \quad (2.11)$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $f(t,x)$.

Теорема 3. *Пусть* $q = l\alpha_0$ *и*

$$f(t,x) \in W^{0,s}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+), \quad s = (\alpha_0/\alpha_1, \dots, \alpha_0/\alpha_n),\ \gamma > 0.$$

Тогда задача Коши (2.9) *однозначно разрешима в* $W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *и для решения имеет место оценка*

$$\big\|u(t,x), W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| + \sum_{k=0}^{l} \big\|D^k_t u(t,x), W^{0,(1-k\alpha_0)r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\|$$
$$\leq c\big\|f(t,x), W^{0,s}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| \quad (2.12)$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $f(t,x)$.

Теорема 4. *Пусть* $|\alpha|/2 \leq q - l\alpha_0$ *и* N — *натуральное число, определяемое из неравенств*

$$|\alpha|/2 + N\alpha_{\min} > q - l\alpha_0 \geq |\alpha|/2 + (N-1)\alpha_{\min}.$$

Тогда задача Коши (2.9) *имеет единственное решение* $u(t,x) \in W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $\gamma > 0$, *для любой функции* $f(t,x) \in W^{0,s}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, *удовлетворяющей условиям*

$$(1 + \langle x \rangle)^{N|\alpha|} f(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; L_1(\mathbb{R}^n)),$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\beta f(t,x)\,dx = 0, \quad |\beta| = 0, \dots, N-1, \quad (2.13)$$

при этом выполнена оценка

$$\big\|u(t,x), W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| + \sum_{k=0}^{l} \big\|D^k_t u(t,x), W^{0,(1-k\alpha_0)r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\|$$
$$\leq c\big(\big\|f(t,x), W^{0,s}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| + \|\|(1 + \langle x \rangle)^{N|\alpha|} f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|\big), \quad (2.14)$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* $f(t,x)$.

Оценка (2.10) является аналогом энергетического неравенства для строго гиперболических операторов [9, 10], а также для строго псевдогиперболических операторов [1, 6, 7]. Из теорем 2, 3 следует, что задача Коши (2.9) безусловно разрешима в $W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, если $|\alpha|/2 > q - l\alpha_0$, где число $q \in [l\alpha_0, 1)$ определено в (2.5). В случае $|\alpha|/2 \leq q - l\alpha_0$ согласно теореме 4 разрешимость в $W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ имеет место при дополнительных условиях ортогональности (2.13) на правую часть уравнения. Эти условия аналогичны установленным в [1] условиям разрешимости задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений, не содержащих младших членов. Можно привести примеры, показывающие, что эти условия необходимы для разрешимости задачи Коши (2.9) в указанных классах (см. [1]).

3. Энергетические оценки

Вначале, как и в [1, гл. 2], приведем некоторые алгебраические неравенства для символов строго псевдогиперболических операторов, имеющих младшие члены.

По аналогии с теорией строго гиперболических уравнений [9] введем следующий полином:

$$M(i\eta+\sigma,i\xi)=-\operatorname{Im}(\mathscr{L}(i\eta+\sigma,i\xi)\overline{D_\eta\mathscr{L}(i\eta+\sigma,i\xi)}). \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Существуют константы c_1, c_2, $c_3>0$ такие, что при $\sigma\ge 0$, $(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}$ имеют место оценки*

$$c_1\sigma(\langle\xi\rangle^{1-l\alpha_0}+\langle\xi\rangle^{q-l\alpha_0})^2(|i\eta+\sigma|+\langle\xi\rangle^{\alpha_0})^{2l-2}\le M(i\eta+\sigma,i\xi)$$
$$\le c_2\sigma(\langle\xi\rangle^{1-l\alpha_0}+\langle\xi\rangle^{q-l\alpha_0})^2(|i\eta+\sigma|+\langle\xi\rangle^{\alpha_0})^{2l-2}, \tag{3.2}$$

$$c_3\sigma(\langle\xi\rangle^{1-l\alpha_0}+\langle\xi\rangle^{q-l\alpha_0})(|\eta|+\sigma+\langle\xi\rangle^{\alpha_0})^{l-1}\le|\mathscr{L}(i\eta+\sigma,i\xi)|. \tag{3.3}$$

Доказательство. Из определения (3.1) имеем

$$M(i\eta+\sigma,i\xi)=-\frac{1}{2i}(\mathscr{L}(i\eta+\sigma,i\xi)\overline{D_\eta\mathscr{L}(i\eta+\sigma,i\xi)}-\overline{\mathscr{L}(i\eta+\sigma,i\xi)}D_\eta\mathscr{L}(i\eta+\sigma,i\xi))$$
$$=-\frac{1}{2i}|L_0(i\xi)+L_0'(i\xi)|^2\left(\prod_{p=1}^{l}(i\eta+\sigma-i\hat\eta_p(\xi))\sum_{k=1}^{l}(-i)\prod_{j\ne k}\overline{(i\eta+\sigma-i\hat\eta_j(\xi))}\right.$$
$$\left.-\prod_{p=1}^{l}\overline{(i\eta+\sigma-i\hat\eta_p(\xi))}\sum_{k=1}^{l}i\prod_{j\ne k}(i\eta+\sigma-i\hat\eta_j(\xi))\right)$$
$$=\sigma|L_0(i\xi)+L_0'(i\xi)|^2\sum_{k=1}^{l}\prod_{j\ne k}|i\eta+\sigma-i\hat\eta_j(\xi)|^2.$$

Тогда в силу определения (2.7) это можно переписать в виде

$$M(i\eta+\sigma,i\xi)=\sigma|L_0(i\xi)+L_0'(i\xi)|^2\hat m(i\eta+\sigma,i\xi).$$

Отсюда, учитывая (2.5) и (2.8), получим оценку (3.2).

Для доказательства неравенства (3.3) заметим, что

$$|M(i\eta+\sigma,i\xi)|\le|\mathscr{L}(i\eta+\sigma,i\xi)D_\eta\mathscr{L}(i\eta+\sigma,i\xi)|$$
$$\le|\mathscr{L}(i\eta+\sigma,i\xi)||L_0(i\xi)+L_0'(i\xi)|\sum_{k=1}^{l}\prod_{j\ne k}|i\eta+\sigma-i\hat\eta_j(\xi)|.$$

Поэтому, вновь учитывая (2.5) и (2.7), а также оценку (3.2), получим неравенство (3.3).

Лемма доказана.

Используя лемму 3.1, нетрудно доказать теорему 1. Действительно, в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|\mathscr{L}(D_t,D_x)u(t,x),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\|=\|\mathscr{L}(D_t+\gamma,D_x)u_\gamma(t,x),L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|$$
$$=\|\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi)\tilde u_\gamma(\eta,\xi),L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|.$$

Следовательно, оценка (2.10) непосредственно вытекает из (3.3).

Теорема 1 доказана.

Отметим, что из теоремы 1 следует единственность решения задачи (2.9) в указанном классе функций. Действительно, если $u(t,x) \in W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ — решение задачи Коши с $f(t,x)=0$, то, продолжая его нулем при $t<0$, получим функцию $\bar{u}(t,x) \in W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, удовлетворяющую условиям теоремы 1. Следовательно, из оценки (2.10) имеем

$$\|\langle\xi\rangle^{1-l\alpha_0}(|\eta|+\gamma+\langle\xi\rangle^{\alpha_0})^{l-1}\tilde{\bar{u}}_\gamma(\eta,\xi), L_2(\mathbb{R}_{n+1})\| = 0.$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что $u(t,x)=0$.

4. Формулы решения задачи Коши

В этом разделе, используя преобразование Фурье и следуя схеме из [1, гл. 2], приведем формулы для решения задачи (2.9).

Вначале рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с вещественным параметром ξ, получающуюся формальным применением оператора Фурье по x к задаче (2.9):

$$\begin{gathered}\mathscr{L}(D_t, i\xi)v = \hat{f}(t,\xi), \quad t>0, \\ D_t^k v\big|_{t=0} = 0, \quad k=0,\dots,l-1.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Поскольку в случае $q > l\alpha_0$ коэффициент $L_0(i\xi)+L_0'(i\xi)$ при старшей производной в уравнении вырождается при $\xi=0$, задачу (4.1) будем рассматривать при $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Ее решение можно записать в виде

$$v(t,\xi) = \int_0^t J(t-\tau,\xi)\hat{f}(\tau,\xi)\,d\tau, \tag{4.2}$$

где

$$J(t,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma(\xi)} \frac{e^{it\lambda}}{\mathscr{L}(i\lambda, i\xi)}\,d\lambda, \tag{4.3}$$

$\Gamma(\xi)$ — контур в комплексной плоскости, охватывающий все корни уравнения (2.6) (см. [1]).

Отметим, что контурный интеграл $J(t,\xi)$ является решением задачи Коши

$$\begin{gathered}\mathscr{L}(D_t, i\xi)J(t,\xi) = 0, \\ D_t^j J(0,\xi) = 0, \quad j=0,\dots,l-2, \\ D_t^{l-1}J(0,\xi) = (L_0(i\xi)+L_0'(i\xi))^{-1}.\end{gathered}$$

Поскольку корни уравнения (2.6) вещественны, по аналогии с [1, гл. 2] можно доказать следующую лемму.

Лемма 4.1. *При $\gamma>0$, $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ выполняются тождества*

$$\int_0^\infty e^{-(i\eta+\gamma)t}D_t^k J(t,\xi)\,dt \equiv (i\eta+\gamma)^k(\mathscr{L}(i\eta+\gamma, i\xi))^{-1}, \quad k=0,\dots,l-1, \tag{4.4}$$

$$\int_0^\infty e^{-(i\eta+\gamma)t}D_t^l J(t,\xi)\,dt \equiv (i\eta+\gamma)^l(\mathscr{L}(i\eta+\gamma, i\xi))^{-1} - (L_0(i\xi)+L_0'(i\xi))^{-1}. \tag{4.5}$$

Введем функции $\chi^m(\xi)$ такие, что $\chi^m(\xi)=1$ при $\langle\xi\rangle>1/m$ и $\chi^m(\xi)=0$ при $\langle\xi\rangle<1/m$, и рассмотрим последовательность функций $\{v^m(t,\xi)\}$, где

$$v^m(t,\xi)=\chi^m(\xi)v(t,\xi).$$

В силу формул (4.2), (4.3) функции $v^m(t,\xi)$ не имеют особенностей при $\xi=0$. Следовательно, если правая часть $f(t,x)$ уравнения в (2.9) удовлетворяет условиям теоремы 2, то к функциям $v^m(t,\xi)$ можно применить обратный оператор Фурье по ξ, определив тем самым последовательность функций $\{u^m(t,x)\}$:

$$u^m(t,x)=F^{-1}[v^m](t,x).$$

В следующем разделе проведем оценки последовательности $\{u^m(t,x)\}$ в норме $W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

5. Оценки приближенных решений

Оценки построенных функций $\{u^m(t,x)\}$ в норме $W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ проводятся по схеме из [1, гл. 2], поэтому будем останавливаться только на существенных отличиях.

В дальнейшем будем считать, что функция $f(t,x)$ продолжена нулем при $t<0$.

Лемма 5.1. *Пусть $s=(0,\alpha_0/\alpha_1,\dots,\alpha_0/\alpha_n)$, тогда выполнена оценка*

$$\sum_{q-l\alpha_0\le\beta\alpha\le1}\big\|D^\beta_x u^m(t,x),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\|\le c\big\|f(t,x),W^{0,s}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| \tag{5.1}$$

с константой $c>0$, не зависящей от m и $f(t,x)$, причем для любого $j\ge1$

$$\sum_{q-l\alpha_0\le\beta\alpha\le1}\big\|D^\beta_x u^{m+j}(t,x)-D^\beta_x u^m(t,x),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\|\to\infty,\quad m\to\infty. \tag{5.2}$$

Доказательство. Используя равенство Парсеваля, имеем

$$\big\|D^\beta_x u^m(t,x),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\|=\left\|(i\xi)^\beta\chi^m(\xi)\int\limits_0^t J(t-\tau,\xi)\hat f(\tau,\xi)\,d\tau,L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\right\|.$$

Учитывая свойства преобразования Фурье и лемму 4.1, перепишем это в следующем виде:

$$\big\|D^\beta_x u^m(t,x),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\|=\|(i\xi)^\beta\chi^m(\xi)(\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi))^{-1}\tilde f_\gamma(\eta,\xi),L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|.$$

Тогда в силу неравенства (3.3)

$$\begin{aligned}&\big\|D^\beta_x u^m(t,x),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\|\\&\quad\le\frac{c}{\gamma}\|\xi^\beta(\langle\xi\rangle^{1-l\alpha_0}+\langle\xi\rangle^{q-l\alpha_0})^{-1}(|\eta|+\gamma+\langle\xi\rangle^{\alpha_0})^{1-l}\chi^m(\xi)\tilde f_\gamma(\eta,\xi),L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Следовательно, при любом мультииндексе β таком, что $q-l\alpha_0\le\beta\alpha\le1$, для всех m получим неравенство

$$\big\|D^\beta_x u^m(t,x),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\|\le c(\gamma)\big\|f(t,x),W^{0,s}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\big\|$$

с константой $c(\gamma)>0$, зависящей от γ. Отсюда вытекает неравенство (5.1).

Аналогичным образом доказывается (5.2).

Лемма доказана.

Следующая лемма формулируется для случая, когда $q>l\alpha_0$.

Лемма 5.2. *Пусть $|\alpha|/2 > q - l\alpha_0 > 0$, тогда справедлива оценка*

$$\sum_{0\le\beta\alpha<q-l\alpha_0} \left\| D_x^\beta u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1}) \right\| \\ \le c(\|f(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|,\, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|), \quad (5.4)$$

где константа $c > 0$ не зависит от m и $f(t,x)$, причем для любого $j \ge 1$ имеет место сходимость

$$\sum_{0\le\beta\alpha<q-l\alpha_0} \left\| D_x^\beta u^{m+j}(t,x) - D_x^\beta u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1}) \right\| \to 0, \quad m\to\infty. \quad (5.5)$$

Доказательство. Заметим, что неравенство (5.3) справедливо для любого мультииндекса β. Поэтому в случае, когда $0 \le \beta\alpha < q - l\alpha_0$, оценки достаточно провести при $|\beta| = 0$. В этом случае имеем

$$\|u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| \le \frac{c}{\gamma}\|(\langle\xi\rangle^{1-l\alpha_0} + \langle\xi\rangle^{q-l\alpha_0})^{-1}(|\eta| + \gamma + \langle\xi\rangle^{\alpha_0})^{1-l} \\ \times \chi^m(\xi)\tilde{f}_\gamma(\eta,\xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \le \frac{c}{\gamma^l}\|\hat{f}(t,\xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+\times\{\langle\xi\rangle > 1\})\| \\ + \frac{c}{\gamma^l}\|\langle\xi\rangle^{l\alpha_0-q}\chi^m(\xi)\hat{f}(t,\xi),\, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+\times\{\langle\xi\rangle < 1\})\|. \quad (5.6)$$

Учитывая теперь условие $|\alpha|/2 > q - l\alpha_0$ и используя равенство Парсеваля и теорему Римана — Лебега, получим

$$\|u^m(t,x),\, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| \le \frac{c}{\gamma^l}\|f(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| \\ + \frac{c_1}{\gamma^l}\|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|,$$

где константа $c_1 > 0$ зависит только от n, l, α.

Точно так же устанавливается, что

$$\|u^{m+j}(t,x) - u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| \to 0, \quad m\to\infty.$$

Проводя аналогичные рассуждения для любых β, $0 < \beta\alpha < q - l\alpha_0$, приходим к (5.4), (5.5).

Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Пусть $q = l\alpha_0$, тогда имеет место оценка*

$$\left\| D_t^l u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1}) \right\| \le c\|f(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| \quad (5.7)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от m и $f(t,x)$, причем для любого $j \ge 1$

$$\left\| D_t^l u^{m+j}(t,x) - D_t^l u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1}) \right\| \to \infty, \quad m\to\infty. \quad (5.8)$$

Доказательство. Учитывая определение функции (4.2) и свойства контурного интеграла (4.3), при $\xi \ne 0$ получим

$$D_t^l v(t,\xi) = (L_0(i\xi) + L_0'(i\xi))^{-1}\hat{f}(t,\xi) + \int_0^t D_t^l J(t-\tau,\xi)\hat{f}(\tau,\xi)\,d\tau. \quad (5.9)$$

Используя свойства преобразования Фурье и функцию Хевисайда $\theta(t)$, имеем

$$\big\|D_t^l u^m(t,x),\, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\| = \Bigg\|\chi^m(\xi)(L_0(i\xi)+L_0'(i\xi))^{-1}\hat f_\gamma(t,\xi)$$

$$+\chi^m(\xi)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(t-\tau)}\theta(t-\tau)D_t^l J(t-\tau,\xi)\hat f_\gamma(\tau,\xi)\,d\tau, L_2(\mathbb{R}^{n+1})\Bigg\|$$

$$=\Bigg\|\chi^m(\xi)\Bigg((L_0(i\xi)+L_0'(i\xi))^{-1}+\int\limits_0^\infty e^{-(i\eta+\gamma)t}D_t^l J(t,\xi)\,dt\Bigg)\tilde f_\gamma(\eta,\xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\Bigg\|.$$

Отсюда в силу леммы 4.1

$$\big\|D_t^l u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\| = \|\chi^m(\xi)(i\eta+\gamma)^l(\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi))^{-1}\tilde f_\gamma(\eta,\xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|. \tag{5.10}$$

Учитывая тождество

$$(i\eta+\gamma)^l(\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi))^{-1}\equiv(L_0(i\xi)+L_0'(i\xi))^{-1}$$
$$-\sum_{k=0}^{l-1}(L_{l-k}(i\xi)+L_{l-k}'(i\xi))(i\eta+\gamma)^k(L_0(i\xi)+L_0'(i\xi))^{-1}(\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi))^{-1} \tag{5.11}$$

и условия $1-(l+1)\alpha_0\ge 0$, $q=l\alpha_0$, в силу леммы 3.1 получим неравенство

$$|(i\eta+\gamma)^l(\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi))^{-1}|\le c(\gamma),$$

где $c(\gamma)>0$ — константа, зависящая от γ. Следовательно, из (5.10) вытекают (5.7) и (5.8).

Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Пусть $|\alpha|/2>q-l\alpha_0>0$, тогда имеет место оценка*

$$\big\|D_t^l u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|$$
$$\le c(\|f(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\|+\|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|) \tag{5.12}$$

с константой $c>0$, не зависящей от m и $f(t,x)$, причем для любого $j\ge 1$

$$\big\|D_t^l u^{m+j}(t,x)-D_t^l u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|\to\infty,\quad m\to\infty. \tag{5.13}$$

Доказательство. Как и ранее, имеют место равенство (5.10) и тождество (5.11). Следовательно, учитывая условие $1-(l+1)\alpha_0\ge 0$, в силу леммы 3.1 можно получить неравенство

$$\big\|D_t^l u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|\le c(\gamma)\|\hat f(t,\xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+\times\{\langle\xi\rangle>1\})\|$$
$$+\|\chi^m(\xi)(L_0(i\xi)+L_0'(i\xi))^{-1}\hat f(t,\xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+\times\{\langle\xi\rangle<1\})\|$$
$$+\sum_{k=0}^{l-1}\left\|\chi^m(\xi)\frac{(L_{l-k}(i\xi)+L_{l-k}'(i\xi))(i\eta+\gamma)^k}{(L_0(i\xi)+L_0'(i\xi))\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi)}\hat f(t,\xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+\times\{\langle\xi\rangle<1\})\right\|$$
$$=c(\gamma)\|\hat f(t,\xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+\times\{\langle\xi\rangle>1\})\|+I_0+\sum_{k=0}^{l-1}I_{l-k}.$$

В силу условий (2.5) и $|\alpha|/2 > q - l\alpha_0$, очевидно, имеем

$$I_0 \le c_0 \| \|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|,$$

а используя лемму 3.1, аналогичным образом получим

$$I_{l-k} \le \frac{c}{\gamma^{l-k}} \|\chi^m(\xi)\langle\xi\rangle^{\varepsilon_k - 2(q-l\alpha_0)} \hat{f}(t,\xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+ \times \{\langle\xi\rangle < 1\})\| \\ \le c_{l-k}(\gamma) \| \|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|.$$

Отсюда вытекает (5.12). Точно так же устанавливается (5.13).

Лемма доказана.

Лемма 5.5. *Пусть $s = (0, \alpha_0/\alpha_1, \dots, \alpha_0/\alpha_n)$, $q = l\alpha_0$, тогда имеет место оценка*

$$\big\|D_t^k u^m(t,x), W_{2,\gamma}^{0,(1-k\alpha_0)}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\| \le c\big\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{0,s}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|, \quad k = 1, \dots, l, \tag{5.14}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от m и $f(t,x)$, причем для любого $j \ge 1$

$$\big\|D_t^k u^{m+j}(t,x) - D_t^k u^m(t,x), W_{2,\gamma}^{0,(1-k\alpha_0)}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\| \to \infty, \quad m \to \infty. \tag{5.15}$$

Доказательство. Рассмотрим нормы

$$A_{k,\beta}^m = \big\|D_t^k D_x^\beta u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|, \quad 0 < \beta\alpha \le 1 - k\alpha_0, \ k = 1, \dots, l.$$

Если $k = l$, то, как при доказательстве леммы 5.3, имеем

$$A_{l,\beta}^m = \|\chi^m(\xi)(i\xi)^\beta (i\eta + \gamma)^l (\mathscr{L}(i\eta+\gamma, i\xi))^{-1} \tilde{f}_\gamma(\eta,\xi), \ L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|, \tag{5.16}$$

а также

$$(i\xi)^\beta (i\eta+\gamma)^l (\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi))^{-1} \equiv (i\xi)^\beta (L_0(i\xi) + L_0'(i\xi))^{-1} \\ - \sum_{j=0}^{l-1} (i\xi)^\beta (L_{l-j}(i\xi) + L_{l-j}'(i\xi))(i\eta+\gamma)^j (L_0(i\xi) + L_0'(i\xi))^{-1} (\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi))^{-1}. \tag{5.17}$$

В силу леммы 3.1 из условий $\beta\alpha \le 1 - l\alpha_0$, $q = l\alpha_0$ вытекает неравенство

$$|(i\xi)^\beta (i\eta+\gamma)^l (\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi))^{-1}| \le c(\gamma)(1 + \langle\xi\rangle^{\alpha_0}),$$

где $c(\gamma) > 0$ — константа, зависящая от γ. Следовательно,

$$A_{l,\beta}^m \le c(\gamma)\big\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{0,s}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|.$$

Если $k < l$, то в силу равенства Парсеваля и определения интегралов (4.2), (4.3) имеем

$$A_{k,\beta}^m = \left\| (i\xi)^\beta \chi^m(\xi) \int_0^t D_t^k J(t-\tau,\xi) \hat{f}(\tau,\xi)\, d\tau, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1}) \right\|.$$

Учитывая свойства преобразования Фурье и лемму 4.1, это можно переписать в виде

$$A_{k,\beta}^m = \|\chi^m(\xi)(i\xi)^\beta (i\eta+\gamma)^k (\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi))^{-1} \tilde{f}_\gamma(\eta,\xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|. \tag{5.18}$$

Поскольку $\beta\alpha \le 1 - k\alpha_0$, $q = l\alpha_0$, вновь используя лемму 3.1, получаем аналогичное неравенство

$$|(i\xi)^\beta (i\eta+\gamma)^k (\mathscr{L}(i\eta+\gamma,i\xi))^{-1}| \le c(\gamma)(1 + \langle\xi\rangle^{\alpha_0}).$$

Следовательно,

$$A_{k,\beta}^m \le c(\gamma)\big\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{0,s}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|.$$

Из полученных оценок и лемм 5.1, 5.3 вытекает неравенство (5.14). Аналогичным образом доказывается (5.15).

Лемма доказана.

Лемма 5.6. *Пусть* $s = (0, \alpha_0/\alpha_1, \dots, \alpha_0/\alpha_n)$, $|\alpha|/2 > q - l\alpha_0 > 0$. *Тогда имеет место оценка*

$$\begin{aligned}\big\|D_t^k u^m(t,x), W_{2,\gamma}^{0,(1-k\alpha_0)}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\| \\ \leq c\big(\big\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{0,s}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|\big), \quad k = 1, \dots, l,\end{aligned} \tag{5.19}$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* m *и* $f(t,x)$, *причем для любого* $j \geq 1$

$$\big\|D_t^k u^{m+j}(t,x) - D_t^k u^m(t,x), W_{2,\gamma}^{0,(1-k\alpha_0)}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\| \to \infty, \quad m \to \infty. \tag{5.20}$$

Доказательство. Как и выше, рассмотрим нормы

$$A_{k,\beta}^m = \big\|D_t^k D_x^\beta u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|, \quad 0 < \beta\alpha \leq 1 - k\alpha_0,\ k = 1, \dots, l.$$

В случае $k = l$, учитывая равенство (5.16), имеем

$$\begin{aligned}A_{l,\beta}^m \leq \|(i\xi)^\beta (i\eta + \gamma)^l (\mathscr{L}(i\eta + \gamma, i\xi))^{-1} \tilde{f}_\gamma(\eta, \xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+ \times \{\langle\xi\rangle > 1\})\| \\ + \|\chi^m(\xi)(i\xi)^\beta (i\eta + \gamma)^l (\mathscr{L}(i\eta + \gamma, i\xi))^{-1} \tilde{f}_\gamma(\eta, \xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+ \times \{\langle\xi\rangle < 1\})\| \\ = P_{l,\beta}^m + Q_{l,\beta}^m.\end{aligned}$$

Повторяя рассуждения из доказательства предыдущей леммы, получим оценку

$$P_{l,\beta}^m \leq c(\gamma)\big\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{0,s}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|.$$

Оценим второе слагаемое. Ввиду тождества (5.17) имеем

$$\begin{aligned}Q_{l,\beta}^m \leq \|\chi^m(\xi)(i\xi)^\beta (L_0(i\xi) + L_0'(i\xi))^{-1} \hat{f}(t,\xi),\ L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+ \times \{\langle\xi\rangle < 1\})\| \\ + \sum_{k=0}^{l-1} \left\|\chi^m(\xi) \frac{(i\xi)^\beta (L_{l-k}(i\xi) + L_{l-k}'(i\xi))(i\eta + \gamma)^k}{(L_0(i\xi) + L_0'(i\xi))\mathscr{L}(i\eta + \gamma, i\xi)} \hat{f}(t,\xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+ \times \{\langle\xi\rangle < 1\})\right\|.\end{aligned}$$

Поэтому, учитывая условия (2.5) и $|\alpha|/2 > q - l\alpha_0$, а также используя лемму 3.1, получим неравенство

$$Q_{l,\beta}^m \leq c_1\|f(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| + c_2(\gamma)\|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|,\ L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|$$

с константами c_1, $c_2(\gamma) > 0$, не зависящими от $f(t,x)$ и m. Следовательно,

$$A_{l,\beta}^m \leq c_1(\gamma)\big\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{0,s}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\| + c_2(\gamma)\|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|.$$

Рассмотрим случай $k < l$. Учитывая равенство (5.18), имеем

$$\begin{aligned}A_{k,\beta}^m \leq \|(i\xi)^\beta (i\eta + \gamma)^k (\mathscr{L}(i\eta + \gamma, i\xi))^{-1} \tilde{f}_\gamma(\eta, \xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+ \times \{\langle\xi\rangle > 1\})\| \\ + \|\chi^m(\xi)(i\xi)^\beta (i\eta + \gamma)^k (\mathscr{L}(i\eta + \gamma, i\xi))^{-1} \tilde{f}_\gamma(\eta, \xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+ \times \{\langle\xi\rangle < 1\})\| = P_{k,\beta}^m + Q_{k,\beta}^m.\end{aligned}$$

Вновь повторяя рассуждения из доказательства предыдущей леммы, получим оценку

$$P_{k,\beta}^m \leq c(\gamma)\big\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{0,s}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|.$$

Оценим второе слагаемое. В силу леммы 3.1

$$\begin{aligned}Q_{k,\beta}^m \leq \frac{c}{\gamma}\|\chi^m(\xi)\xi^\beta (i\eta + \gamma)^k (\langle\xi\rangle^{1-l\alpha_0} + \langle\xi\rangle^{q-l\alpha_0})^{-1} \\ \times (|\eta| + \gamma + \langle\xi\rangle^{\alpha_0})^{1-l} \tilde{f}_\gamma(\eta, \xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+ \times \{\langle\xi\rangle < 1\})\|, \quad \beta\alpha \leq 1 - k\alpha_0.\end{aligned}$$

Тогда, учитывая условие $|\alpha|/2 > q - l\alpha_0$, по теореме Римана — Лебега получим неравенство

$$Q^m_{k,\beta} \le c_1(\gamma)\|f(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\| + c_2(\gamma)\|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|$$

с константами $c_1(\gamma)$, $c_2(\gamma) > 0$, не зависящими от $f(t,x)$ и m. Следовательно,

$$A^m_{k,\beta} \le c_3(\gamma)\big\|f(t,x), W^{0,s}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| + c_2(\gamma)\|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|.$$

Из полученных оценок и лемм 5.2, 5.4 вытекает неравенство (5.19). Аналогичным образом доказывается (5.20).

Лемма доказана.

В следующем разделе, опираясь на леммы 5.1–5.6, докажем, что последовательность $\{u^m(t,x)\}$ сходится в пространстве $W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, при этом предельная функция $u(t,x)$ будет решением задачи Коши (2.9) и для нее будут выполняться соответствующие оценки.

6. Разрешимость задачи Коши

Как уже отмечалось, из энергетического неравенства вытекает единственность решения задачи Коши (2.9) в пространстве $W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Покажем существование решения.

Докажем теорему 2.

Поскольку $|\alpha|/2 > q - l\alpha_0 > 0$, из лемм 5.1, 5.2 и 5.4 вытекает, что последовательность функций $\{u^m(t,x)\}$ фундаментальна в соболевском пространстве $W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, при этом

$$\big\|u^m(t,x), W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| \le c(\gamma)\big(\big\|f(t,x), W^{0,s}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|\big),$$

где константа $c(\gamma) > 0$ не зависит от m и $f(t,x)$. Поэтому в силу полноты $W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ существует предельная функция $u(t,x) \in W^{l,r}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Из леммы 5.6 в силу свойств операторов обобщенного дифференцирования вытекает существование обобщенных производных $D^\beta_x D^k_t u(t,x)$, $k\alpha_0 + \beta\alpha \le 1$, $k = 1,\dots,l$, причем

$$\big\|D^\beta_x D^k_t u^m(t,x) - D^\beta_x D^k_t u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| \to 0, \quad m \to \infty,$$

$$\big\|D^\beta_x D^k_t u,\ L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| \le c(\gamma)\big(\big\|f(t,x), W^{0,s}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\big\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|\big).$$

Поскольку по построению функций $u^m(t,x)$, очевидно, имеем

$$\begin{aligned}\|\mathscr{L}(D_t, D_x)u^m(t,x) - f(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\| &= \|\chi^m(\xi)\mathscr{L}(D_t, i\xi)v(t,\xi) - \hat f(t,\xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\| \\ &= \|(\chi^m(\xi) - 1)\hat f(t,\xi), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\| \to 0, \quad m \to \infty,\end{aligned}$$

то $u(t,x)$ — решение задачи Коши (2.9) и для него выполнена оценка (2.11).

Теорема 2 доказана.

Доказательство разрешимости задачи Коши (2.9) и вывод оценки (2.12) при выполнении условий теоремы 3 проводится с использованием лемм 5.1, 5.3 и 5.5 аналогичным образом.

Отметим, что при доказательстве теорем 2 и 3 существенно использовано условие $|\alpha|/2 > q - l\alpha_0$. В формулировке теоремы 4 указано обратное неравенство $|\alpha|/2 \le q - l\alpha_0$, при этом на правую часть уравнения налагаются дополнительные требования вида (2.13). Эти требования существенны и используются при доказательстве аналогов лемм 5.2–5.6. Приведем, например, аналог леммы 5.2.

Лемма 6.1. *При выполнении условий теоремы* 4 *имеет место оценка*

$$\sum_{0\le\beta\alpha<q-l\alpha_0} \big\|D_x^\beta u^m(t,x),\, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|$$
$$\le c(\|f(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| + \|\|(1+\langle x\rangle)^{N|\alpha|}f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|), \quad (6.1)$$

где константа $c > 0$ не зависит от m и $f(t,x)$, причем для любого $j \ge 1$ имеет место сходимость

$$\sum_{0\le\beta\alpha<q-l\alpha_0} \big\|D_x^\beta u^{m+j}(t,x) - D_x^\beta u^m(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\| \to 0, \quad m\to\infty. \quad (6.2)$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 5.2, достаточно оценить норму функции $u^m(t,x)$.

Напомним, что при получении неравенства (5.4) при $\beta = 0$ мы получали оценку (5.6), из которой в силу условия $|\alpha|/2 > q - l\alpha_0$ непосредственно вытекало неравенство (5.4). В случае же $|\alpha|/2 \le q - l\alpha_0$ для произвольной функции $f(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ это неверно. Однако если $f(t,x)$ удовлетворяет условиям (2.13), то функцию $\hat f(t,\xi)$ можно представить в виде

$$\hat f(t,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Big[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda_1\ldots\lambda_N y\xi}(-iy\xi)^N f(t,y)\,dy\Big]$$
$$\times\, \lambda_1^{N-1}\ldots\lambda_{N-2}^2\lambda_{N-1}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_N.$$

Из этого представления вытекает, что наличие множителя $(iy\xi)^N$ позволяет получить следующую оценку второго слагаемого из правой части (5.6):

$$\|\langle\xi\rangle^{l\alpha_0-q}\chi^m(\xi)\hat f(t,\xi),\, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+\times\{\langle\xi\rangle<1\})\|$$
$$\le c\|\|(1+\langle x\rangle)^{N|\alpha|}f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|$$

с константой $c > 0$, не зависящей от m и $f(t,x)$. Из этого неравенства и (5.6) вытекает неравенство (6.1). Точно так же устанавливается (6.2).

Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующий аналог лемм 5.3–5.6.

Лемма 6.2. *При выполнении условий теоремы* 4 *имеет место оценка*

$$\big\|D_t^k u^m(t,x), W_{2,\gamma}^{0,(1-k\alpha_0)}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\| \le c\big(\big\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{0,s}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\|$$
$$+ \|\|(1+\langle x\rangle)^{N|\alpha|}f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|\big), \quad k = 1,\ldots,l,$$

с константой $c > 0$, не зависящей от m и $f(t,x)$, причем для любого $j \ge 1$

$$\big\|D_t^k u^{m+j}(t,x) - D_t^k u^m(t,x), W_{2,\gamma}^{0,(1-k\alpha_0)}(\mathbb{R}_+^{n+1})\big\| \to \infty, \quad m\to\infty.$$

По аналогии с теоремами 2, 3 доказательство теоремы 4 вытекает из лемм 5.1, 6.1 и 6.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
2. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал «Гео» Изд-ва СО РАН, 2003. Т. I; 2006. Т. II.
3. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.. М.: Физматлит, 2007.
4. *Гальперн С. А.* Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 2. С. 239–249.
5. *Demidenko G.* The Cauchy problem for pseudohyperbolic equations // Selcuk J. Appl. Math. 2001. V. 1, N 1. P. 47–62.
6. *Demidenko G. V.* On solvability of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations // Sib. Adv. Math. 2001. V. 11, N 1. P. 25–40.
7. *Fedotov I., Volevich L. R.* The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // Russian J. Math. Phys. 2006. V. 13, N 3. P. 278–292.
8. *Rao J. S.* Advanced theory of vibration. New York: John Wiley & Sons, 1992.
9. *Лере Ж.* Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
10. *Петровский И. Г.* Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 17 июня 2015 г.

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru