Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 517.518+517.54

ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА НА ГРУППЕ КАРНО

Н. А. Евсеев

Аннотация. Изучаются свойства отображений, индуцирующих по правилу замены переменных ограниченный оператор в весовых пространствах Соболева на группе Карно. Аналитическое описание таких отображений получено в терминах интегрируемости весовой функции искажения. В отдельных случаях доказано, что отображение, порождающее ограниченный оператор, является кусочно абсолютно непрерывным на почти всех горизонтальных линиях.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.608

Ключевые слова: оператор композиции, весовые пространства Соболева, группа Карно.

Введение

Изучаются свойства измеримых отображений $\varphi : D \to D'$, индуцирующих по правилу замены переменных ограниченный оператор весовых пространств Соболева на группе Карно:

$$\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_q(D, u), \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D').$$

В зависимости от соотношения между показателями суммируемости q, p удается получить полное или частичное решение задачи. Для случая $q = p$ найдены необходимые условия, при которых отображение индуцирует ограниченный оператор композиции (теорема 3). Достаточные условия ограниченности оператора композиции сформулированы в теореме 4 для общей ситуации $1 \leq q \leq p < \infty$. При совпадении показателей суммируемости и хаусдорфовой размерности ($q = p = \nu$) задача решается в полной мере (теорема 5).

В евклидовом случае отображения, порождающие ограниченный оператор композиции в весовых пространствах Соболева, полностью описаны в [1]. Таковыми являются отображения, имеющие конечное искажение и суммируемую в некоторой степени весовую функцию искажения. На группе Карно аналогичное описание получено в [2] (невесовой случай) при условии, что отображение φ принадлежит классу ACL. Весовой случай изучался в [3] в предположении, что φ — гомеоморфизм. В данной работе мы отказываемся от априорных свойств регулярности отображения и в некоторых случаях выводим ACL-свойство из ограниченности оператора композиции.

Работа выполнена при частичной поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (Договор № 14.B25.31.0029) и РФФИ (код проекта 14–01–00768).

Большинство применяемых методов разработаны в [1, 2, 4–7], где получены эквивалентные описания отображений, индуцирующих ограниченные операторы классов Соболева как в евклидовых пространствах, так и на группах Карно. В настоящей работе мы применяем новый метод для доказательства кусочной абсолютной непрерывности измеримого отображения, порождающего ограниченный оператор в пространствах Соболева.

В [1–6, 8–10] можно найти более подробную историю вопроса и обширную библиографию по исследованию операторов композиции пространств Соболева с первыми обобщенными производными.

Далее текст организован следующим образом. В разд. 1 определены основные понятия и доказаны вспомогательные результаты. В разд. 2 приведены определение ограниченного оператора композиции и характеристика его нормы посредством конечно аддитивной функции множества. Разд. 3 посвящен исследованию свойств непрерывности и дифференцируемости отображения φ, порождающего ограниченный оператор композиции. В п 3.1 доказаны непрерывность на почти всех линиях и аппроксимативная дифференцируемость почти всюду отображения φ. В п. 3.2 вводится понятие кусочной абсолютной непрерывности на почти всех линиях, предложенное С. К. Водопьяновым, которое является ослаблением ACL-свойства, обусловленного спецификой задачи. Это свойство впоследствии обеспечит принадлежность классу $ACL(D)$ композиции $f\circ\varphi$. Разд. 4 содержит основные результаты работы. Таковыми являются теоремы 3–5.

1. Предварительные сведения

1.1. Группа Карно.

Определение 1. *Группой Карно* $\mathbb{G}$ называется связная односвязная нильпотентная группа Ли, алгебра Ли $\mathscr{G}$ которой градуирована, т. е. $\mathscr{G} = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, где $\dim V_1 = n_1 \geq 2$, $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leq k \leq m-1$, $[V_1, V_m] = 0$ и $N = \sum\limits_{i=1}^{m} \dim V_i$.

Отождествим элементы $g \in \mathbb{G}$ с элементами $x \in \mathbb{R}^N$ посредством экспоненциального отображения $\exp\bigl(\sum x_{ij}X_{ij}\bigr)$, числа x_{ij} называются *координатами первого рода* точки $g \in \mathbb{G}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i = \dim V_i$. Таким образом, на $\mathbb{G}$ существует глобальная система координат, посредством которой точки на группе $\mathbb{G}$ отождествляются с точками в $\mathbb{R}^N$.

В координатах первого рода отображение

$$\delta_t : (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m) \mapsto (t\bar{x}_1, t^2\bar{x}_2, \dots, t^m\bar{x}_m), \quad t > 0,$$

задает однопараметрическое семейство растяжений. Здесь $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

Левоинвариантные векторные поля $X_i = X_{i,1}$, $i = 1, \dots, n_1$, составляющие стандартный базис подрасслоения V_1, называются *горизонтальными*.

Зафиксируем следующую однородную норму на группе $\mathbb{G}$ (см., например, [11]):

$$\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} |\bar{x}_i|^{2m!/i}\right)^{1/2m!},$$

где $|\bar{x}_i|$ — евклидова норма в V_i. Однородная норма задает однородную квазиметрику: $\rho(x, y) = \rho(x^{-1}y)$ для точек $x, y \in \mathbb{G}$.

Абсолютно непрерывная кусочно гладкая кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{G}$, касательный вектор которой принадлежит V_1, называется *горизонтальной кривой.*

Определение 2. *Метрика Карно — Каратеодори* $d(x, y)$ *на группе* $\mathbb{G}$ — это точная нижняя грань длин всех горизонтальных кривых, соединяющих точки x и y.

Можно показать, что величины $d(x, y)$ и $\rho(x, y)$ эквивалентны (см. рассуждения из леммы 1.4 и предложения 1.5 в [12]), т. е.

$$c\rho(x, y) \le d(x, y) \le C\rho(x, y).$$

Размерность Хаусдорфа группы $\mathbb{G}$ равна $\nu = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + mn_m$, где $n_i = \dim V_i$.

1.2. Весовые пространства Соболева. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, D — открытое множество в $\mathbb{G}$. Локально суммируемая функция $g_i : D \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной производной* функции f вдоль векторного поля X_i, $i = 1, \dots, n_1$, если

$$\int\limits_D g_i \psi \, dx = -\int\limits_D f X_i \psi \, dx$$

для произвольной финитной функции $\psi \in C_0^\infty(D)$. Далее используем обозначение $g_i = X_i f$.

Весом будем называть измеримую функцию $w : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, принимающую почти всюду положительные значения. Для любого измеримого множества A определим весовую меру

$$w(A) = \int\limits_A w(x) \, dx.$$

Здесь dx — мера Лебега в $\mathbb{R}^N$, нормированная таким образом, что мера шара единичного радиуса (относительно квазиметрики ρ) равна 1. Весовое пространство $L_p(D, w)$ состоит из функций, суммируемых в степени $p \in [1, \infty)$ с весом w:

$$\|f \mid L_p(D, w)\| = \left(\int\limits_D |f(x)|^p w(x) \, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Весовое пространство Соболева $L_p^1(D, w)$ состоит из локально суммируемых функций с конечной полунормой

$$\left\| f \mid L_p^1(D, w) \right\| = \|\nabla_{\mathscr{L}} f \mid L_p(D, w)\|,$$

где $\nabla_{\mathscr{L}} f(x) = (X_1 f(x), \dots, X_{n_1} f(x))$ — обобщенный субградиент f в точке $x \in D$.

Определение 3. Весовая функция w *принадлежит классу Макенхаупта* A_p, $p \in (1, \infty)$, если

$$\sup_{B \subset \mathbb{G}} \left(\frac{1}{|B|} \int\limits_B w \, dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int\limits_B w^{\frac{1}{1-p}} \, dx \right)^{p-1} = c_{w,p} < \infty,$$

где супремум берется по всем шарам B из $\mathbb{G}$.

Далее можно полагать, что весовые функции $u(x)$, $v(y)$ принадлежат соответствующим классам Макенхаупта, но в основных результатах мы приводим более точные условия на эти функции.

Более подробно о весовых пространствах Соболева см., например, [13, 14].

1.3. Мера семейства кривых. Рассмотрим семейство Γ_j интегральных кривых базисного горизонтального векторного поля X_j, образующих гладкое слоение открытого множества $A \subset \mathbb{G}$. Если соответствующий этому полю поток обозначить символом g_s, то слой имеет вид $\gamma(s) = g_s(p)$, где p принадлежит поверхности S_j, трансверсальной к векторному полю X_j, а параметр s берется из интервала $I \subset \mathbb{R}$. Для слоения, определяемого векторным полем X_j, мера $d\gamma$ может быть получена как внутреннее умножение $i(X_j)$ векторного поля X_j с биинвариантной формой объема dx. Если $\mathbb{J}_{g_s}$ — якобиан потока g_s, то

$$g_s^* i(X_j)dx = \mathbb{J}_{g_s} i(X_j)\,dx \quad \text{или} \quad g_s^*(\mathbb{J}_{g_{-s}} i(X_j)\,dx) = i(X_j)\,dx.$$

Поскольку поток g_s переводит касательный вектор к однопараметрическому семейству кривых γ_t в касательный вектор к тому же семейству, форма $\mathbb{J}_{g_{-s}} i(V)\,dx$ определяет меру $d\gamma$ на слоении Γ_j. Так как X_j — левоинвариантное горизонтальное векторное поле, поток g_s есть правый сдвиг на $\exp sX_j$: $\mathbb{G} \ni p \mapsto p \exp sX_j$. В силу того, что dx — биинвариантная форма, имеем $\mathbb{J}_{g_s} = 1$. Используя левоинвариантность и однородность относительно растяжений, находим

$$\int\limits_{\gamma \cap B(x,r) \neq \varnothing} d\gamma = c|B(x,r)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}.$$

Отсюда можно вывести теорему Фубини, применяемую ниже. Более подробно см. [11].

1.4. Функция множества.

Определение 4. Отображение Φ, определенное на открытых подмножествах открытого множества $D \subset \mathbb{G}$ и принимающее неотрицательные значения, называется *конечно λ-квазиаддитивной функцией множества*, $1 \le \lambda < \infty$, если

1) для любого $x \in D$ существует δ, $0 < \delta < \operatorname{dist}(x, \partial D)$, такое, что $0 \le \Phi(B(x,\delta)) < \infty$;

2) неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i) \le \lambda \Phi(U)$$

выполнено для любого набора попарно не пересекающихся открытых множеств $U_1, \dots, U_k \subset U \subset D$, $i = 1, \dots, k$.

При $\lambda = 1$ будем употреблять термин *квазиаддитивная функция*.

Если вместо второго условия в определении функции множества потребовать выполнение равенства

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i) = \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right)$$

для любого конечного набора попарно не пересекающихся открытых множеств $U_i \subset D$, то такая функция называется *конечно аддитивной*. Если это равенство распространить на счетный набор, то функция называется *счетно аддитивной*.

Квазиаддитивная функция Φ называется *монотонной*, если $\Phi(U_1) \le \Phi(U_2)$ для любых открытых множеств $U_1 \subset U_2 \subset D$.

Верхняя и нижняя производные квазиаддитивной функции, заданной на некоторой совокупности открытых подмножеств, определяются как

$$\overline{\Phi}'(x) = \lim_{h\to 0} \sup_{\delta\le h} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|} \quad \text{и} \quad \underline{\Phi}'(x) = \lim_{h\to 0} \inf_{\delta\le h} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|}. \tag{1}$$

Здесь супремум и инфимум берутся по всем открытым шарам B_δ с радиусом $\delta \le h$, содержащих точку x . Если в некоторой точке x верхняя и нижняя производные совпадают: $\overline{\Phi}'(x) = \underline{\Phi}'(x)$, то их общее значение называется *производной* $\Phi'(x)$ *функции множеств* Φ.

Для квазиаддитивной функции множества справедливо

Предложение 1 [2]. *Пусть Φ — конечная λ-квазиаддитивная функция множества, определенная на открытых подмножествах области $D \subset \mathbb{G}$. Тогда*

(a) *для любого открытого множества $U \subset D$*

$$\int_U \overline{\Phi}'(x)\, dx \le \lambda \Phi(U);$$

(b) *почти в каждой точке $x \in D$ существует конечная верхняя производная и*

$$\overline{\Phi}'(x) \le \lambda \underline{\Phi}'(x);$$

если $\lambda = 1$, то почти в каждой точке $x \in D$ существует конечная производная

$$\Phi'(x) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|}.$$

Далее нам потребуется следующая теорема Лебега.

Теорема 1 [2, следствие 9]. *Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, D — область в $\mathbb{G}$. Предположим, что функция f принадлежит $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Тогда для почти всех $x \in D$ имеет место равенство*

$$\lim_{\delta\to 0,\, x\in B_\delta} \frac{1}{|B_\delta|} \int_{B_\delta} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

Приведем еще две леммы о покрытиях, которыми будем пользоваться при доказательстве основных результатов.

Лемма 1 [2, лемма 9]. *Для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^N$, $U \ne \mathbb{R}^N$, существует счетное семейство евклидовых шаров $\mathscr{B} = \{B_j\}$ таких, что*

1) $\bigcup_j B_j = U$;

2) *если $B_j = B(x_j, r_j) \in \mathscr{B}$, то $\operatorname{dist}(x_j, \partial U) = 12 r_j$;*

3) *семейства $\mathscr{B} = \{B_j\}$ и $2\mathscr{B} = \{2B_j\}$ образуют конечнократное покрытие U;*

4) *если $B_i(x_i, r_i) \cap B_j(x_j, r_j) = \varnothing$, то $\frac{5}{7} r_i \le r_j \le \frac{7}{5} r_i$;*

5) *семейство $\{2B_j\}$ может быть разделено на конечные семейства, зависящие только от размерности N, так, что в каждом семействе шары не пересекаются.*

Лемма 2 [2, лемма 10]. *Пусть монотонная счетно аддитивная функция* Φ *определена на открытых подмножествах открытого множества* $D \subset \mathbb{R}^N$. *Тогда для всякого открытого множества* $U \subset D$, $U \neq \mathbb{R}^N$, *существует последовательность евклидовых шаров* $\{B_j\}$ *такая, что*

1) *семейства* $\{B_j\}$ *и* $\{2B_j\}$ *образуют конечнократное покрытие* U*;*

2) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \Phi(2B_j) \le \zeta_N \Phi(U)$, *где* ζ_N — *постоянная, зависящая только от размерности* N.

1.5. Объемная производная. Рассмотрим измеримое отображение $\varphi : D \to D'$. *Индикатриса Банаха* $N(y, \varphi, A) = \#\{x \in A \mid \varphi(x) = y\}$ — это число прообразов y, принадлежащих A. Если число прообразов бесконечно, то $N(y, \varphi, A) = \infty$. В случае $A = D$ пишем $N(y, \varphi)$ вместо $N(y, \varphi, D)$.

Заметим, что функция $N(y, \varphi)$ измерима (см., например, [15]). Поэтому область D' можно представить в виде дизъюнктного объединения измеримых множеств:

$$D' = \bigcup_{i=0}^{\infty} N^{-1}(i, \varphi).$$

Обозначим $A_i = \varphi^{-1}(N^{-1}(i, \varphi))$. Тогда $D = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$.

Пусть $Q \subset D'$ — ограниченное множество. Определим следующее семейство функций множества:

$$U \mapsto \Psi_i(U; Q) = |\varphi(U) \cap N^{-1}(i, \varphi) \cap Q|,$$

где $i \in \mathbb{N}$, а $U \subset D$ — открытое множество. Очевидно, каждая функция Ψ_i является монотонной конечно i-квазиаддитивной функцией множества. Следовательно, $\overline{\Psi}'_i(x) < \infty$ п. в. в D. В силу предложения 1 для п. в. $x \in D$ выполнено неравенство

$$\overline{\Psi}'_i(x; Q) \le i \underline{\Psi}'_i(x; Q). \tag{2}$$

Обозначим символом $\Sigma_{i,Q}$ множество меры нуль, на котором производная $\overline{\Psi}'_i(\cdot; Q)$ либо не определена, либо равна ∞.

Лемма 3. *Пусть* $E \subset D \setminus \Sigma_{i,Q}$ — *множество нулевой меры. Тогда*

$$|\varphi(E) \cap N^{-1}(i, \varphi) \cap Q| = 0.$$

Доказательство. Пусть $M_k = \{x \in D \setminus \Sigma_{i,Q} : \overline{\Psi}'_i(x; Q) < k\}$. Тогда $D \setminus \Sigma_{i,Q} = \bigcup\limits_k M_k$. Пусть E_k — множество нулевой меры в M_k. Можно считать, что E_k ограничено. Для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U_\varepsilon \supset E_k$ такое, что $|U_\varepsilon| < \varepsilon$. С учетом определения множества M_k и (1) имеем: для каждого $x \in E_k$ найдется число $r_x > 0$ такое, что $B(x, r) \subset U_\varepsilon$ и $|\varphi(B(x, r)) \cap N^{-1}(i, \varphi) \cap Q| < k|B(x, r)|$ для любого числа $0 < r < r_x$. По лемме Витали из семейства шаров $\mathscr{B} = \{B(x, r) : x \in E_k,\ B(x, r) \subset U_\varepsilon,\ 0 < r < r_x\}$, образующих покрытие множества E_k, можно выделить счетное дизъюнктное семейство шаров $\{B_j\}$ такое, что $E_k \subset \bigcup\limits_j cB_j$, где c — постоянная, зависящая только от ν. Кроме того, $cB(x, r) \subset U_\varepsilon$ и $|\varphi(cB(x, r)) \cap N^{-1}(i, \varphi) \cap Q| < k|cB(x, r)|$. Тогда

$$|\varphi(E_k) \cap N^{-1}(i, \varphi) \cap Q| \le \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(cB_j) \cap N^{-1}(i, \varphi) \cap Q| \le k \sum_{j=1}^{\infty} |cB_j| \le c^\nu k |U_\varepsilon| < c^\nu k \varepsilon, \tag{3}$$

откуда $|\varphi(E_k) \cap N^{-1}(i,\varphi) \cap Q| = 0$, так как $\varepsilon > 0$ произвольно.

Для любого множества меры нуль $E \subset D \setminus \Sigma_i$ имеем также $|\varphi(E) \cap N^{-1}(i,\varphi) \cap Q| = 0$, поскольку $E = \bigcup\limits_k E \cap M_k$. $\square$

Утверждение доказанной леммы можно сформулировать немного иначе.

Следствие 1. *Пусть $E \subset D \setminus \Sigma_{i,Q}$ — множество нулевой меры. Тогда*

$$\inf\{\Psi_i(U;Q) : U \textit{ открыто и } E \subset U\} = 0.$$

Замечание 1. В силу произвольности Q выводим $|\varphi(E)| = 0$ для множества нулевой меры $E \subset D \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Sigma_{i,Q_k}$, где Q_k — возрастающая последовательность такая, что $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} Q_k \supset D'$.

Покажем, что для Ψ_i имеет место свойство абсолютной непрерывности.

Предложение 2. *Для любого открытого множества $U \subset D \setminus \Sigma_i$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_U \overline{\Psi}'_i(x;Q)\,dx \geq \Psi_i(U;Q). \tag{4}$$

Доказательство. Для каждого $x \in D \setminus \Sigma_i$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta_0(x)$ такое, что для всех $\delta < \delta_0(x)$ выполнены неравенства

$$\frac{\Psi_i(B(x,\delta);Q)}{|B(x,\delta)|} \leq \overline{\Psi}'_i(x;Q) + \varepsilon \tag{5}$$

и

$$\overline{\Psi}'_i(x;Q) - \varepsilon \leq \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int\limits_{B(x,\delta)} \overline{\Psi}'_i(z;Q)\,dz \leq \overline{\Psi}'_i(x;Q) + \varepsilon. \tag{6}$$

Неравенство (5) следует из определения производной функции множества, а неравенство (6) получается из теоремы Лебега [2, следствие 3].

Далее,

$$\begin{aligned}\Psi_i(B(x,\rho);Q) &\leq |B(x,\delta)|\overline{\Psi}'_i(x;Q) + \varepsilon|B(x,\delta)| \\ &\leq \int\limits_{B(x,\delta)} \overline{\Psi}'_i(z;Q)\,dz + 2\varepsilon|B(x,\delta)| \end{aligned} \tag{7}$$

для всех $x \in D \setminus \Sigma_i$ и всех $\delta < \delta_0(x)$.

Пусть $U \subset D \setminus \Sigma_i$ — открытое множество конечной меры. Выберем покрытие Витали множества U семейством шаров $\{B(x,\delta) \mid x \in U \setminus \Sigma_i,\ 0 < \delta < \delta_0(x)\}$. Из этого семейства можно выделить последовательность попарно не пересекающихся шаров $\{B_j\}$ так, что

$$\Big|U \setminus \bigcup_j B_j\Big| = 0 \quad \text{и} \quad |U| = \Big|\bigcup_j B_j\Big| = \sum_j |B_j|.$$

В силу леммы 3

$$\Psi_i(U;Q) \leq \Psi_i\Big(\bigcup_j B_j;Q\Big) \leq \sum_j \Psi_i(B_j;Q). \tag{8}$$

Для каждого шара из $\{B_j\}$ выполнено неравенство (7). Суммируя неравенство (7) по шарам из $\{B_j\}$ и учитывая (8), получаем

$$\Psi_i(U;Q) \le \sum_j \Psi_i(B_j;Q) \le \int\limits_{\bigcup\limits_j B_j} \overline{\Psi}'_i(z;Q)\,dz + 2\varepsilon \sum_j |B_j| = \int\limits_U \overline{\Psi}'_i(z;Q)\,dz + 2\varepsilon|U|.$$

В силу произвольности ε

$$\Psi_i(U;Q) \le \int\limits_U \overline{\Psi}'_i(z;Q)\,dz. \quad \square \tag{9}$$

Из предложения 2 выводим

Следствие 2. *Для любой неотрицательной измеримой функции* $u : A_i \to \mathbb{R}$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{A_i} u(x)\overline{\Psi}'_i(x;Q)\,dx \ge \frac{1}{i} \int\limits_{N^{-1}(i,\varphi)\cap Q} \Big(\sum_{x_j \in \varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i} u(x) \Big)\,dy. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $u(x) = \chi_V(x)$ — индикатор некоторого борелевского множества $V \subset A_i$. Тогда

$$\frac{1}{i} \int\limits_{N^{-1}(i,\varphi)\cap Q} \Big(\sum_{x_j \in \varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i} u(x) \Big)\,dy = \frac{1}{i} \int\limits_{N^{-1}(i,\varphi)\cap Q} \Big(\sum_{x_j \in V\cap\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i} 1 \Big)\,dy$$
$$= |N^{-1}(i,\varphi) \cap \varphi(V\setminus\Sigma_i) \cap Q| \le \Psi_i(V;Q) \le \int\limits_{A_i} \overline{\Psi}'_i(x;Q)\,dx.$$

Аналогично проверяем данное неравенство для ступенчатых функций, далее стандартной процедурой распространяем его на измеримые функции. $\square$

Положим

$$Z_{i,Q} = \{x \in A_i \cap \varphi^{-1}(Q) : \overline{\Psi}'_i(x;Q) = 0\}$$

Можно показать, что $|\varphi(Z_{i,Q})| = 0$ при $i < \infty$. Действительно,

$$|\varphi(Z_{i,Q})| = \int\limits_{\varphi(Z_{i,Q})} dy \le \int\limits_{N^{-1}(i,\varphi)\cap Q} \Big(\sum_{x_j \in \varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i} \chi_{Z_{i,Q}}(x) \Big)\,dy$$
$$\le i \int\limits_{Z_{i,Q}} \overline{\Psi}'_i(x;Q)\,dx = 0.$$

Нам потребуется еще одно свойство. Из п. (a) предложения 1 выводим

Предложение 3. *Для любой неотрицательной измеримой функции* $g : D' \to \mathbb{R}$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{A_i} g(\varphi(x))\overline{\Psi}'_i(x;Q)\,dx \le i \int\limits_{N^{-1}(i,\varphi)\cap Q} g(y)\,dy. \tag{11}$$

2. Оператор композиции

Пусть D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$. Говорят, что измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ *индуцирует ограниченный оператор в весовых пространствах Соболева* $\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_q(D, u)$ *по правилу композиции* $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, если $f \circ \varphi \in L^1_q(D, u)$ и справедлива оценка

$$\left\|\varphi^*(f) \mid L^1_q(D, u)\right\| \leq K\left\|f \mid L^1_p(D', v)\right\| \tag{12}$$

для любой функции $f \in L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D')$, где постоянная K не зависит от выбора функции f.

Теорема 2 [2, теорема 1.2]. *Предположим, что отображение* $\varphi : D \to D'$ *порождает ограниченный оператор*

$$\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C^\infty(D') \to L^1_q(D, u), \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad \varphi^* f = f \circ \varphi.$$

Тогда

$$\Phi(A') = \sup_{f \in L^1_p(A', v) \cap C_0^\infty(A')} \left(\frac{\left\|\varphi^* f \mid L^1_q(D, u)\right\|}{\left\|f \mid \ L^1_p(A', v)\right\|} \right)^{\varkappa}, \quad \varkappa = \begin{cases} \frac{pq}{p-q} & \text{при } p < \infty, \\ q & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

— ограниченная монотонная счетно аддитивная функция, определенная на открытых ограниченных подмножествах $A' \subset D'$.

В [1] теорема 2 доказана для отображений областей из $\mathbb{R}^n$, доказательство для группы Карно является дословным повторением рассуждений для случая евклидова пространства.

3. Свойства отображения φ

Опишем свойства непрерывности и дифференцируемости отображений, порождающих ограниченный оператор композиции.

3.1. Аппроксимативная дифференцируемость φ.

Лемма 4. *Пусть отображение* $\varphi : D \to D'$ *такое, что для всех* η *из* $C_0^\infty(D')$ *композиция* $\eta \circ \varphi$ *принадлежит классу* $ACL(D)$. *Тогда на почти всех интегральных кривых горизонтальных векторных полей отображение* $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \to D'$ *непрерывно вне некоторого множества нулевой* 1*-меры Хаусдорфа.*

Здесь $\{\widetilde{T}_i\}$ — возрастающая последовательность множеств, состоящих из точек положительной плотности, $|D \setminus \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i| = 0$ и на каждом $\widetilde{T}_i$ отображение φ непрерывно.

Доказательство. Фиксируем горизонтальное поле X_j. Предположим противное: найдется семейство интегральных кривых Γ поля X_j положительной меры такое, что на каждой кривой $\gamma \in \Gamma$ существует множество $s_\gamma \subset \gamma$ положительной 1-меры, на котором отображение $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \to D'$ не является непрерывным.

Положим $S = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} s_\gamma$. Покажем, что S измеримо. Действительно, $S = D \setminus A$, где множество

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \Big\{ x \in \bigcup_i \widetilde{T}_i \mid d(\varphi(x \exp tX_j), \varphi(x)) < \frac{1}{n} \text{ при } |t| < \frac{1}{m}, \\ x \exp tX_j \in \bigcup_i \widetilde{T}_i \Big\},$$

измеримо, поскольку любое множество в фигурных скобках измеримо. По теореме Фубини $|S| > 0$. Аналогично проверяется, что $S = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} S_m$, где $S_m = \{x \in s_\gamma \mid \operatorname{osc}_l \varphi(x) > \frac{1}{m}\}$ — измеримое множество. Здесь $\operatorname{osc}_l \varphi(x)$ — колебание отображения $\varphi : \gamma \cap \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \to D'$ в точке x. Следовательно, можно выбрать номер m такой, что $|S_m| > 0$. Также найдется номер j такой, что $|S_m \cap \widetilde{T}_j| > 0$. Пусть $x_0 \in S_m \cap \widetilde{T}_j$ — точка плотности 1. Тогда любой шар $B(x_0, r)$ будет содержать подмножество положительной меры из $S_m \cap \widetilde{T}_j$. Обозначим это множество символом P_r. В силу непрерывности отображения φ на $\widetilde{T}_j$ можно подобрать шар $B(x_0, r_m)$ таким образом, чтобы $\varphi(B(x_0, r_m) \cap S_m \cap \widetilde{T}_j) \subset B\big(\varphi(x_0), \frac{1}{4m}\big)$.

Фиксируем функцию $\eta \in C_0^\infty(D')$ такую, что $\eta(y) = 1$ при $y \in B\big(\varphi(x_0), \frac{1}{4m}\big)$ и $\eta(y) = 0$ при $y \notin B\big(\varphi(x_0), \frac{1}{2m}\big)$.

На основании вышесказанного на каждой горизонтальной кривой, пересекающей P_{r_m} по множеству положительной 1-меры, имеем $\operatorname{osc}_l \eta \circ \varphi(x) = 1$, где $x \in P_{r_m}$. По построению множества P_{r_m} совокупность таких кривых имеет положительную меру. Таким образом, пришли к противоречию с абсолютной непрерывностью функции $\eta \circ \varphi$ на почти всех линиях.

Следовательно, на почти всех горизонтальных кривых отображение $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \to D'$ непрерывно вне некоторого множества нулевой 1-меры. $\square$

В следующей лемме показано, что при приближении к точкам разрыва соответствующие образы стремятся к границе области значений или к бесконечно удаленной точке.

Лемма 5. *Для почти всех интегральных кривых γ горизонтальных векторных полей множество точек разрыва отображения φ замкнуто, $\sigma_\gamma \subset \gamma$ имеет меру нуль и отображение φ обладает свойством:*

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ x\in\gamma\setminus\sigma_\gamma}} \operatorname{dist}(\varphi(x), \partial D') = 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{\substack{x\to a,\\ x\in\gamma\setminus\sigma_\gamma}} \rho(\varphi(x)) = \infty \tag{13}$$

для всех $a \in \sigma_\gamma$.

Доказательство. Шаг 1. Пусть γ — интегральная линия горизонтального поля, $\sigma_\gamma \subset \gamma$ — множество нулевой 1-меры, на котором нет непрерывности φ, и $x_0 \in \sigma_\gamma$. Докажем, что если для некоторой последовательности $\{x_n\} \subset \gamma\setminus\sigma_\gamma$ существует предел $\lim\limits_{x_n\to x_0} \varphi(x_n) = z \in D'$, то $\lim\limits_{x'_n\to x_0} \varphi(x'_n) = z$ для любой последовательности $\{x'_n\} \subset \gamma \setminus \sigma_\gamma$.

Пусть $\{z_j\}$ — счетное всюду плотное множество точек в D'. Определим счетное семейство функций $\eta^r_{z_j} : D' \to \mathbb{R}^+$ класса $C_0^\infty(D')$:

$$\eta^r_{z_j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in B(z_j, r), \\ 0, & y \notin B(z_j, 2r), \end{cases}$$

где $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

Для почти всех интегральных кривых $\gamma \subset D$ горизонтальных векторных полей отображение φ непрерывно на γ вне множества нулевой 1-меры σ_γ, а функции $\eta^r_{z_j} \circ \varphi$ абсолютно непрерывны на γ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$. Выберем кривую γ с указанными свойствами.

Пусть $x_0 \in \sigma_\gamma$ и $\lim\limits_{x_n\to x_0} \varphi(x_n) = z \in D'$ для некоторой последовательности $\{x_n\} \subset \gamma \setminus \sigma_\gamma$. Если такой последовательности нет, то (13) выполнено.

Допустим, что нашлась другая последовательность $\{x'_n\} \subset \gamma \setminus \sigma_\gamma$, для которой $\lim\limits_{x'_n \to x_0} \varphi(x'_n) = z' \neq z$. Возможны три случая: $z' \in D'$, $z' \in \partial D'$, $z' = \infty$.

Подберем точку $z_l \in \{z_j\}$ и радиус $r_l \in \mathbb{Q}^+$ так, что $d(z, z_l) < r_l$, а $d(z', z_l) > 2r_l$. Тогда

$$\lim_{x_n \to x_0} \eta_{z_l}^{r_l} \circ \varphi(x_n) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x'_n \to x_0} \eta_{z_l}^{r_l} \circ \varphi(x'_n) = 0,$$

что противоречит непрерывности $\eta_{z_l}^{r_l} \circ \varphi$ на γ.

Отображение φ продолжается по непрерывности: $\varphi(x_0) = z$. Таким образом, можно считать, что $x_0 \notin \sigma_\gamma$, а все элементы σ_γ удовлетворяют (13).

Шаг 2. Докажем замкнутость σ_γ. Пусть $\{x_n\} \subset \sigma_\gamma$ — сходящаяся последовательность. Покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \in \sigma_\gamma$. Для каждого x_n найдется последовательность $\{x_n^k\} \subset \gamma \setminus \sigma_\gamma$ такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_n^k = x_n$. По доказанному выше свойству

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{dist}\bigl(\varphi(x_n^k), \partial D'\bigr) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{k \to \infty} \rho\bigl(\varphi(x_n^k)\bigr) = \infty.$$

Составим последовательность $\{x_n^{k_l}\} \subset \gamma \setminus \sigma_\gamma$ такую, что

$$\operatorname{dist}\bigl(\varphi(x_n^{k_l}), \partial D'\bigr) < \frac{1}{l} \quad \text{или} \quad \rho\bigl(\varphi(x_n^{k_l})\bigr) > l.$$

При этом $\lim\limits_{l \to \infty} x_n^{k_l} = x_0$. Таким образом, $x_0 \in \sigma_\gamma$, и замкнутость σ_γ доказана. $\square$

Доказательства следующих двух утверждений (леммы 6 и 7) основаны на рассуждениях из [6] (см. леммы 19, 20 в [6]).

Лемма 6. *Пусть $v(y) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, $u^{\frac{1}{1-p}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Если $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D') \cap L_p^1(D', v)$ и $\bigl\|f \mid L_p^1(D', v)\bigr\| \leq 1$, то найдется функция $g_i \in L_{q,\mathrm{loc}}(D)$ такая, что*

$$|\nabla_{\mathscr{L}}(f \circ \varphi)|(x) \leq g_i(x) \tag{14}$$

п. в. на $A_i \cap \varphi^{-1}(Q)$.

Здесь $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D')$ — пространство локально липшицевых функций.

Доказательство. Шаг 1. Фиксируем точку $y_0 \in D' \cap \varphi(A_i)$ и шар $B(y_0, r)$. Рассмотрим функцию $\eta(y) = \xi\bigl(\delta_r\bigl(y_0^{-1}y\bigr)\bigr)$, где $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ — функция такая, что $\xi|_{B(0,1)} = 1$ и $\xi|_{\mathbb{G} \setminus B(0,2)} = 0$.

Используя теорему 2, выводим

$$\begin{aligned}
&\Biggl(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |\nabla_{\mathscr{L}}(f \circ \varphi)|^q(x) u(x)\, dx\Biggr)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\varkappa}} \Biggl(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla_{\mathscr{L}}((f(y) - f(y_0))\eta(y))|^p v(y)\, dy\Biggr)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\varkappa}} \Biggl(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla_{\mathscr{L}} f|^p(y) \eta^p(y) v(y)\, dy\Biggr)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\varkappa}} \Biggl(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla_{\mathscr{L}} \eta|^p(y) |f(y) - f(y_0)|^p v(y)\, dy\Biggr)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\leq \Phi(B(y_0,2r))^{\frac{1}{\varkappa}}(v(B(y_0,2r))^{\frac{1}{p}}+(c_1r^{-1}c_2rv(B(y_0,2r))^{\frac{1}{p}}))$$
$$= C\Phi(B(y_0,2r))^{\frac{1}{\varkappa}}\cdot v(B(y_0,2r))^{\frac{1}{p}}$$

При этом если $p=q$, то

$$\Phi(B(y_0,2r))^{\frac{1}{\varkappa}} = \|\varphi^*\|.$$

Окончательно приходим к оценке

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |\nabla_{\mathscr{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)\,dx \leq C_1\Phi(B(y_0,2r))^{\frac{q}{\varkappa}}v(B(y_0,2r))^{\frac{q}{p}}. \tag{15}$$

Шаг 2. Оценка (15) влечет равенство $|\nabla_{\mathscr{L}}(f\circ\varphi)|(x)=0$ для п. в. $x\in Z_{i,Q}$. Действительно, поскольку $|\varphi(Z_i)|=0$, для произвольного $\varepsilon>0$ можно подобрать покрытие, состоящее из счетного набора шаров $\{B_l=B(y_l,r_l)\}$, такое, что шары с удвоенными радиусами образуют конечнократное покрытие $\varphi(Z_i)$ и $\sum\limits_{l=1}^{\infty}|B(y_l,2r_l)|<\varepsilon$.

Из неравенства (15) при $q<p$ имеем

$$\int\limits_{Z_i}|\nabla_{\mathscr{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)\,dx \leq \sum_{l=1}^{\infty}\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_l,r_l))}|\nabla_{\mathscr{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)\,dx$$
$$\leq C_1\sum_{l=1}^{\infty}\Phi(B(y_l,2r_l))^{\frac{q}{\varkappa}}v(B(y_l,2r_l))^{\frac{q}{p}}$$
$$\leq C_1\left(\sum_{l=1}^{\infty}\Phi(B(y_l,2r_l))\right)^{\frac{q}{\varkappa}}\left(\sum_{l=1}^{\infty}|B(y_l,2r_l)|\right)^{\frac{q}{p}} \leq C_2\Phi(D')^{\frac{q}{\varkappa}}\varepsilon^{\frac{q}{p}}.$$

Если $q=p$, то

$$\int\limits_{Z_i}|\nabla_{\mathscr{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)\,dx \leq C_3\|\varphi^*\|^q\varepsilon.$$

Шаг 3. Используя соотношения (10), (15), получаем

$$C_1\Phi(B(y_0,2r))^{\frac{q}{\varkappa}}V(B(y_0,2r))^{\frac{q}{p}} \geq \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\cap A_i\cap\varphi^{-1}(Q)}|\nabla_{\mathscr{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)\,dx$$
$$= \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\cap A_i\cap\varphi^{-1}(Q)\setminus Z_{i,Q}}\frac{|\nabla_{\mathscr{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)\overline{\Psi}'_i(x;Q)u(x)}{\overline{\Psi}'_i(x;Q)}\,dx$$
$$\geq \frac{1}{i}\int\limits_{B(y_0,r)\cap\varphi(A_i\setminus Z_{i,Q})\cap Q}\ \sum_{x_j\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_{i,Q}}\left(\frac{|\nabla_{\mathscr{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)}{\overline{\Psi}'_i(x)}\right)dy,$$

т. е.

$$\int\limits_{B(y_0,r)\cap\varphi(A_i\setminus Z_{i,Q})\cap Q}\ \sum_{x_j\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i}\left(\frac{|\nabla_{\mathscr{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)}{\overline{\Psi}'_i(x;Q)}\right)dy$$
$$\leq iC_1\Phi(B(y_0,2r))^{\frac{q}{\varkappa}}v(B(y_0,2r))^{\frac{q}{p}}. \tag{16}$$

Разделим обе части неравенства (16) на $|B(y_0,2r)|$:

$$\frac{1}{|B(y_0,2r)|}\int \sum_{x_j\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i}\left(\frac{|\nabla_{\mathscr L}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)}{\overline{\Psi}'_i(x;Q)}\right)dy$$
$$\le iC_1\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)^{\frac{q}{\varkappa}}\left(\frac{v(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Дифференцируя по теореме Лебега, выводим

$$\sum_{x_j\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i}\left(\frac{|\nabla_{\mathscr L}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)}{\overline{\Psi}'_i(x;Q)}\right)\le iK\Phi'(y)^{\frac{q}{\varkappa}}v^{\frac{q}{p}}(y)$$

для п. в. $y\in\varphi(A_i\setminus Z_{i,Q})$. Отсюда

$$|\nabla_{\mathscr L}(f\circ\varphi)|(x)\le g_{i,Q}(x)\quad \text{для п. в. } x\in A_i, \tag{17}$$

где

$$g_{i,Q}(x)=\begin{cases} K_1\sqrt[q]{i}\Phi'(\varphi(x))^{\frac{1}{\varkappa}}(\overline{\Psi}'_i(x;Q))^{\frac1q}u^{-\frac1q}(x)v^{\frac1p}(\varphi(x)) & \text{при } p>q,\\ K_2\sqrt[q]{i}C(\overline{\Psi}'_i(x;Q))^{\frac1q}u^{-\frac1q}(x)v^{\frac1p}(\varphi(x)) & \text{при } p=q.\end{cases}$$

Шаг 4. Докажем локальную интегрируемость функции $g_{i,Q}(x)$. Пусть $p>q$ и $B\subset D$ — произвольный шар. Применяя два раза неравенство Гёльдера и предложение 3, получаем

$$\int\limits_B g_{i,Q}(x)\,dx=K_1 i^{\frac1q}\int\limits_B\Phi'(\varphi(x))^{\frac1\varkappa}(\overline{\Psi}'_i(x;Q))^{\frac1q}u^{-\frac1q}(x)v^{\frac1p}(\varphi(x))\,dx$$
$$\le K_1 i^{\frac1q+\frac1\varkappa+\frac{\varkappa'}{p}}\left(\int\limits_Q\Phi'(y)\,dy\right)^{\frac1\varkappa}\left(\int\limits_Q v(y)\,dy\right)^{\frac1p}\left(\int\limits_B u(x)^{\frac{1}{1-q}}\,dx\right)^{\frac{1}{\varkappa'}-\frac1p},$$

где $\frac{1}{\varkappa'}=1-\frac1\varkappa$. В случае $q=p$ выводим аналогичное неравенство. Все величины в правой части неравенства конечны, поэтому $g_{i,Q}\in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. $\square$

Напомним, что *аппроксимативная производная* вдоль вектора X в точке x (см. [11]) — это величина $\operatorname{ap}X\varphi(x)=\operatorname{ap}\lim\limits_{t\to0}\delta_t^{-1}((\varphi(x))^{-1}\varphi(x\delta_t\exp X))$.

Лемма 7. *Если отображение φ индуцирует ограниченный оператор композиции в пространствах Соболева $\varphi^*: L^1_p(D',v)\cap C_0^\infty(D')\to L^1_q(D,u)$, то φ имеет аппроксимативные частные производные п. в. на D.*

Доказательство. Так как результат носит локальный характер, можно считать, что D имеет конечную меру. Фиксируем $k\in\mathbb N$ и ограниченное множество $Q\subset\mathbb G$.

Пусть $\{z_j\}$ — счетное всюду плотное множество точек в D'. Зададим счетное семейство функций $d^r_{z_j}:D'\to\mathbb R^+$, $d^r_{z_j}(y)=(r-d_{z_j}(y))^+$, где $r\in\mathbb Q^+=\{x\in\mathbb Q\mid x>0\}$ и $d_{z_j}(y)=d(z_j,y)$. Для каждой такой функции выполняется поточечное равенство $\varphi^*d^r_{z_j}(x)=d^r_{z_j}\circ\varphi(x)$, $r\in\mathbb Q^+$, $j\in\mathbb N$, для всех точек $x\in\widetilde T_k$. Кроме того, каждая такая функция удовлетворяет условиям леммы 6. Поэтому $\left|\nabla_{\mathscr L}(d^r_{z_j}\circ\varphi)\right|(x)\le Cg_{i,Q}(x)$ для почти всех $x\in A_i$.

Рассмотрим слоение Γ_s области D, порожденное горизонтальным векторным полем X_s, и линию γ из этого слоения. Для почти всех кривых γ из слоения Γ_s выполнены следующие условия:

1) φ непрерывно на γ вне некоторого множества σ_γ нулевой 1-меры (лемма 4);

2) выполняется поточечное неравенство для измеримых функций:

$$\left|\nabla_{\mathscr{L}}\left(\varphi^* d^r_{z_j}\right)\right|(t) \le K g_{i,Q}(t), \quad r \in \mathbb{Q}^+,\ j \in \mathbb{N},\ \text{п. в. на } \gamma \cap \varphi^{-1}(Q),$$

и функция $g_{i,Q}$ интегрируема на произвольной компактной части γ;

3) для почти всех $x_0 \in \gamma$ существует конечный предел $\frac{1}{d(x_0,x)} \int\limits_{[x_0,x]} g_{i,Q}(t)\,d\sigma$ при $x \to x_0$ по кривой γ, равный $g_{i,Q}(x_0)$ (здесь $[x_0,x] \subset \gamma$ — отрезок интегральной линии);

4) $A_i \cap \widetilde{T}_k \cap \gamma$ является множеством полной (1-мерной) меры на $\gamma \cap D$;

5) функции $\varphi^* d^r_{z_j}$ абсолютно непрерывны на γ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$.

Фиксируем кривую $\gamma \in \Gamma_s$, на которой выполняются все пять условий.

Пусть $x_0 \in A_i \cap \varphi^{-1}(Q) \cap \widetilde{T}_k \cap \gamma$ — точка положительной плотности на кривой γ, точка непрерывности ограничения $\varphi|_\gamma$ и точка, в которой выполняется условие 3. Положим $z = \varphi(x_0)$. Фиксируем подпоследовательность $\{z_{j_l}\}$ точек из $\{z_j\}$, сходящуюся к $z = \varphi(x_0)$ (далее будем обозначать элементы этой подпоследовательности через z_l). Так как отображение φ непрерывно на γ в точке x_0, можно подобрать числа δ, r и L такие, что $d^r_{z_l} \circ \varphi(x) \ne 0$ для всех $l \ge L$ и всех точек $x \in A_i \cap \varphi^{-1}(Q) \cap B(x_0,\delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$.

Интегрируя функцию $Cg_{i,Q}(x)$ (где C не зависит от r, z) по части кривой γ от x_0 до x, где $x \in A_i \cap \widetilde{T}_k \cap B(x_0,\delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$, выводим

$$\begin{gathered} C \int\limits_{[x_0,x]\cap A_i} g_{i,Q}(t)\,dt \ge \int\limits_{[x_0,x]\cap A_i} \left|\nabla_{\mathscr{L}}\left(\varphi^* d^r_{z_l}\right)\right|(t)\,dt \ge \left| \int\limits_{[x_0,x]\cap A_i} \nabla_{\mathscr{L}}\left(\varphi^* d^r_{z_l}\right)(t)\,dt \right| \\ \ge \left| d^r_{z_l} \circ \varphi(x_0) - d^r_{z_l} \circ \varphi(x) \right| = |r - d_{z_l}(\varphi(x_0)) - r + d_{z_l}(\varphi(x))| \\ = |-d_{z_l}(\varphi(x_0)) + d_{z_l}(\varphi(x))| \to d_z(\varphi(x)) = d(\varphi(x_0),\varphi(x)) \quad \text{при } l \to \infty. \end{gathered} \tag{18}$$

Таким образом, получаем

$$d(\varphi(x_0),\varphi(x)) \le C \int\limits_{[x_0,x]} g_{i,Q}(t)\,d\sigma \tag{19}$$

или

$$\frac{d(\varphi(x_0),\varphi(x))}{d(x_0,x)} \le \frac{C}{d(x_0,x)} \int\limits_{[x_0,x]} g_{i,Q}(t)\,d\sigma \tag{20}$$

для всех $x \in A_i \cap \varphi^{-1}(Q) \cap \widetilde{T}_k \cap B(x_0,\delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$. Переходя к аппроксимативному пределу в неравенстве (20), имеем

$$\operatorname{ap} \varlimsup_{x \to x_0, x \in \gamma} \frac{d(\varphi(x_0),\varphi(x))}{d(x_0,x)} \le C g_{i,Q}(x_0) < \infty, \tag{21}$$

что означает аппроксимативную дифференцируемость отображения φ в точке x_0 вдоль векторного поля X_s.

В силу произвольности выбора индексов k и i, горизонтального поля X_s, интегральной кривой $\gamma \in \Gamma_s$, множества Q и точки $z_0 \in \gamma$ отображение φ аппроксимативно дифференцируемо п. в. вдоль горизонтальных кривых. $\square$

Замечание 2. Из аппроксимативной дифференцируемости отображения φ почти всюду вдоль интегральных линий горизонтальных векторных полей вытекает полная аппроксимативная дифференцируемость [11, теорема 3.3].

Обозначим символом $D\varphi$ аппроксимативный дифференциал отображения φ, а символом $D_h\varphi$ — горизонтальную часть этого дифференциала. Имеем $J(x,\varphi) = \det D\varphi(x)$.

3.2. Кусочная абсолютная непрерывность на линиях. Напомним, что отображение $\varphi : D \to D'$ называется *абсолютно непрерывным на кривой* $\gamma(t) : [0,1] \to D$, если кривая $\varphi(\gamma(t)) : [0,1] \to D'$ абсолютно непрерывна. Отображение φ *абсолютно непрерывно на линиях* ($\varphi \in ACL(D)$), если для любой области $U \Subset D$ и любого семейства Γ_j интегральных кривых базисного горизонтального векторного поля X_j, $j = 1,\dots,n_1$, образующих гладкое слоение U, отображение φ абсолютно непрерывно на $\gamma \cap U$ для почти всех кривых $\gamma \in \Gamma_j$.

Определение 5. Отображение $\varphi : D \to D'$ *кусочно абсолютно непрерывно на почти всех линиях* ($\varphi \in ACL_{\mathrm{part}}(D)$), если на почти каждой интегральной линии γ горизонтального поля X_j, $j = 1,\dots,n$, существует открытое множество $\omega_\gamma \subset \gamma$ полной меры на γ такое, что для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset \omega_\gamma$ отображение φ абсолютно непрерывно на $[\alpha,\beta]$ и

$$\lim_{x\to a, x\in\omega_\gamma} \operatorname{dist}(\varphi(x), \partial D') = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a, x\in\omega_\gamma} \rho(\varphi(x)) = \infty$$

для всех $a \in \gamma \setminus \omega_\gamma$.

Наличие аппроксимативных частных производных отображения φ позволит использовать следующую формулу замены переменных.

Предложение 4 [11, следствие 5.1]. *Пусть отображение $\varphi : A \to \mathbb{G}$, где $A \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, имеет аппроксимативные частные производные на A почти всюду. Тогда существует множество $\Sigma_\varphi \subset A$ меры нуль такое, что формула замены переменных в интеграле Лебега для любой неотрицательной измеримой функции $f : A \to \mathbb{R}$ имеет вид*

$$\int\limits_A f(x)|J(x,\varphi)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \Big(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\cap(A\setminus\Sigma_\varphi)} f(x) \Big)\,dy. \tag{22}$$

В частности, получаем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(F)} |J(x,\varphi)|\,dx = \int\limits_F N(y,\varphi)\,dy \tag{23}$$

для любого измеримого множества $F \subset D'$. Отсюда и из интегрируемости $N(y,\varphi)$ на F вытекает интегрируемость $|J(x,\varphi)|$ на $\varphi^{-1}(F)$.

Рассуждая так же, как в лемме 6, но используя (22) вместо (10), выводим следующую оценку.

Лемма 8. *Пусть $f \in \mathrm{Lip}_l(D') \cap L^1_p(D',v)$ и $\|f \mid L^1_p(D',v)\| \le 1$. Тогда*

$$|\nabla_{\mathscr{L}}(f\circ\varphi)|(x) \le g(x) \quad \text{п. в. на } D, \tag{24}$$

где

$$g(x) = \begin{cases} K_1 \Phi'(\varphi(x))^{\frac{1}{\varkappa}} |J(x,\varphi)|^{\frac{1}{q}} u^{-\frac{1}{q}}(x) v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) & \text{при } p > q, \\ K_2 |J(x,\varphi)|^{\frac{1}{p}} u^{-\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) & \text{при } p = q. \end{cases}$$

Заметим, что в лемме 8 ничего не утверждается об интегрируемости функции $g(x)$. Нам потребуется локальная интегрируемость на прообразе $\varphi^{-1}(B)$

произвольного шара $B \subset D'$. Удается доказать локальную интегрируемость функции g на $\varphi^{-1}(B)$ при следующих предположениях:

1) $u(x)^{\frac{1}{1-q}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$, $v(y)N(y,\varphi) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, если $q = p$;

2) $u(x)^{\frac{1}{1-q}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$, $v(y)N(y,\varphi) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, $\Phi'(y)N(y,\varphi) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, если $q < p$.

В случае $q = p$ доказываем следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть отображение индуцирует ограниченный оператор композиции весовых пространств Соболева $\varphi^* : L^1_p(D',v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_p(D,u)$, функция $N(y,\varphi)v(y)$ локально интегрируема, а вес $u(x)^{\frac{1}{1-p}}$ принадлежит $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Тогда $\varphi \in ACL_{\mathrm{part}}(D)$.*

Доказательство. Как и в лемме 7, зададим счетное семейство функций $d^r_{z_j} : D' \to \mathbb{R}^+$, $d^r_{z_j}(y) = (r - d_{z_j}(y))^+$, где $\{z_j\}$ — счетное всюду плотное множество точек в D', $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$. Для каждой такой функции выполняется поточечное равенство $\varphi^* d^r_{z_j}(x) = d^r_{z_j} \circ \varphi(x)$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$, для всех точек $x \in \widetilde{T}_k$ (для любого k) и неравенство (24) п. в. в D.

Фиксируем шар $B \subset D'$. В силу предложения 4 и локальной интегрируемости $N(y,\varphi)v(y)$ функция $|J(x,\varphi)|v(\varphi(x))$ интегрируема на $\varphi^{-1}(B)$. Пусть $K \subset \varphi^{-1}(B)$ — произвольный компакт. Из неравенства Гёльдера получаем

$$\int\limits_K |J(x,\varphi)|^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) u^{-\frac{1}{p}}(x)\,dx \le \biggl(\int\limits_K |J(x,\varphi)| v(\varphi(x))\,dx\biggr)^{\frac{1}{p}} \biggl(\int\limits_K (u(x))^{\frac{1}{1-p}}\,dx\biggr)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Правая часть неравенства ограничена, поскольку $u(x)^{\frac{1}{1-p}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Следовательно, $|J(x,\varphi)|^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) u^{-\frac{1}{p}}(x)$ — локально интегрируемая в $\varphi^{-1}(B)$ функция. Обозначим

$$g(x) = |J(x,\varphi)|^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) u^{-\frac{1}{p}}(x).$$

Рассмотрим слоение Γ_s области D, порожденное горизонтальным векторным полем X_s. Для почти всех кривых γ из слоения Γ_s, имеющих пересечение $\gamma \cap \varphi^{-1}(B)$ положительной меры, выполнены следующие условия:

1) φ непрерывно на γ вне некоторого множества σ_γ нулевой 1-меры (лемма 4);

2) функция $g(x)$ интегрируема на произвольной компактной части γ;

3) выполняется поточечное неравенство для измеримых функций:

$$\bigl|\nabla_{\mathscr{L}}\bigl(\varphi^* d^r_{z_j}\bigr)\bigr|(t) \le K g(x), \quad r \in \mathbb{Q}^+,\ j \in \mathbb{N}, \text{ п. в. на } \gamma;$$

4) $\widetilde{T}_k \cap \gamma$ является множеством полной (1-мерной) меры на $\gamma \cap \varphi^{-1}(B)$;

5) функции $\varphi^* d^r_{z_j}$ абсолютно непрерывны на γ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$.

Фиксируем кривую $\gamma \in \Gamma_s$, на которой выполняются все пять условий. Множество $\gamma \cap \varphi^{-1}(B)$ открыто на γ, поэтому является объединением отрезков. Выберем произвольный отрезок $[\alpha,\beta] \subset \gamma \cap \varphi^{-1}(B)$.

Пусть $x_0 \in \widetilde{T}_k \cap [\alpha,\beta]$ — точка положительной плотности на кривой γ и точка непрерывности ограничения $\varphi|_\gamma$. Положим $z = \varphi(x_0)$. Фиксируем подпоследовательность $\{z_{j_l}\}$ точек из $\{z_j\}$, сходящуюся к $z = \varphi(x_0)$ (далее будем обозначать элементы этой подпоследовательности через z_l). Так как отображение φ непрерывно на γ в точке x_0, можно подобрать числа δ, r и L такие, что $d^r_{z_l}\circ\varphi(x)\neq 0$ для всех $l\geq L$ и всех точек $x\in B(x_0,\delta)\cap[\alpha,\beta]$.

Интегрируя функцию $Kg(x)$ по части кривой γ от x_0 до x, где $x\in\widetilde{T}_k\cap B(x_0,\delta)\cap[\alpha,\beta]$, выводим

$$\begin{aligned} K\int\limits_{[x_0,x]} g(x)\,dt &\geq \int\limits_{[x_0,x]} \left|\nabla_{\mathscr{L}}\left(\varphi^* d^r_{z_l}\right)\right|(t)\,dt \geq \left|\int\limits_{[x_0,x]} \nabla_{\mathscr{L}}\left(\varphi^* d^r_{z_l}\right)(t)\,dt\right| \\ &\geq \left|d^r_{z_l}\circ\varphi(x_0)-d^r_{z_l}\circ\varphi(x)\right| = |r-d_{z_l}(\varphi(x_0))-r+d_{z_l}(\varphi(x))| \\ &= |-d_{z_l}(\varphi(x_0))+d_{z_l}(\varphi(x))| \to d_z(\varphi(x)) = d(\varphi(x_0),\varphi(x)) \quad \text{при } l\to\infty. \end{aligned}$$

Последнее позволяет получить оценку

$$d(\varphi(x_0),\varphi(x)) \leq K\int\limits_{[x_0,x]} g(x)\,dt \tag{25}$$

для $x\in\widetilde{T}_k\cap B(x_0,\delta)\cap[\alpha,\beta]$. Из оценки (25) и абсолютной непрерывности интеграла выводим, что отображение φ абсолютно непрерывно на $[\alpha,\beta]$.

В силу произвольности выбора кривой γ, отрезка $[\alpha,\beta]$, поля X_s и шара B свойство кусочной абсолютной непрерывности ($\varphi\in ACL_{\text{part}}(D)$) доказано. $\square$

При $q<p$ аналогичное утверждение составляет

Лемма 10. *Пусть отображение φ индуцирует ограниченный оператор композиции весовых пространств Соболева $\varphi^*: L^1_p(D',v)\cap C^\infty_0(D')\to L^1_q(D,u)$, функции $N(y,\varphi)v(y)$, $\Phi'(y)N(y,\varphi)$ локально интегрируемы, а вес $u(x)^{\frac{1}{1-q}}$ принадлежит $L_{1,\text{loc}}(D)$. Тогда $\varphi\in ACL_{\text{part}}(D)$.*

Функция Φ из теоремы 2.

4. Основные теоремы

Введем ключевые определения и докажем основные утверждения настоящей работы.

Определение 6. Отображение $\varphi: D\to D'$ класса $ACL_{\text{part}}(D)$ *имеет конечное (u,v)-весовое искажение*, если $D_h\varphi(x)u(x)=0$ п. в. на

$$Z_v=\{x\in D\mid J(x,\varphi)v(\varphi(x))=0\}.$$

Замечание 3. Очевидно, имеем $Z\subset Z_v$, где $Z=\{x\in D\mid J(x,\varphi)=0\}$. В случае, когда $v>0$ п. в., в частности, если v удовлетворяет A_p-условию Макенхаупта, $|Z_v\setminus Z|=0$. Таким образом, в определении 6 вместо множества Z_v можно взять множество Z. Действительно, пусть $v(\varphi(x))=0$, т. е. $x\in\varphi^{-1}(S)$, где $S=\{y\mid v(y)=0\}$. Мера множества S равна нулю, поскольку $v(x)>0$ п. в. Из формулы замены переменных для характеристической функции множества S имеем

$$\int\limits_D \chi_S(\varphi(x))|J(x,\varphi)|\,dx=\int\limits_{\mathbb{G}}\chi_S(y)N(y,\varphi,D)\,dy.$$

Интеграл в правой части равенства равен нулю, поскольку интегрирование ведется по множеству нулевой меры. Поэтому $\int\limits_{\varphi^{-1}(S)}|J(x,\varphi)|\,dx=0$. Последнее влечет равенство нулю п. в. на множестве Z произведения $J(x,\varphi)v(\varphi(x))$. В итоге $|Z_v\setminus Z|=0$.

Определение 7. Весовая функция искажения для φ определяется как

$$D' \ni y \mapsto H_q^{u,v}(y) = \begin{cases} v^{-\frac{1}{p}}(y)\Big(\sum\limits_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z_v)} \frac{|D\varphi|^q(x)u(x)}{|J(x,\varphi)|}\Big)^{\frac{1}{q}}, \\ 0, \quad \text{если } \varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z_v)=\varnothing. \end{cases} \tag{26}$$

Функция искажения такого типа впервые была введена в [16].

Теорема 3. *Пусть функция $N(y,\varphi)v(y)$ принадлежит $L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, а вес $u^{\frac{1}{1-p}}(x)$ принадлежит $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$, $1 \le p < \infty$. Если измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ индуцирует ограниченный оператор композиции в весовых пространствах Соболева $\varphi^* : L_p^1(D',v)\cap C_0^\infty(D') \to L_p^1(D,u)$, то оно обладает следующими свойствами:*

1) *φ принадлежит классу $ACL_{\mathrm{part}}(D)$,*
2) *φ имеет конечное (u,v)-весовое искажение,*
3) *функция искажения $H_p^{u,v}(\cdot)$ принадлежит $L_\infty(D')$.*

При этом $\big\|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\infty(D')\big\| \le C\|\varphi^*\|$.

Доказательство. 1. Принадлежность классу $ACL_{\mathrm{part}}(D)$ доказана в лемме 9.

2. Докажем, что φ имеет конечное (u,v)-весовое искажение, т. е. $D_h\varphi = 0$ п. в. на Z_v. Для любой функции $f \in L_p^1(D',v)\cap C_0^\infty(D')$ выполнено неравенство

$$\big\|\varphi^* f \mid L_q^1(D,u)\big\| \le \|\varphi^*\|\cdot\big\|f \mid L_p^1(D',v)\big\|. \tag{27}$$

Выбираем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, равную единице на евклидовом шаре $B^E(0,1)$ и нулю вне шара $B^E(0,2)$. Подставляя функции $h_j(z) = (z-y)_j\eta\big(\frac{z-y}{r}\big)$, где $B^E(y,2r)\subset D'$, в (27), получаем неравенство

$$\bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(B^E(y,r))} |D_h\varphi|^p u(x)\,dx\bigg)^{\frac{1}{p}} \le \mathrm{C}\|\varphi^*\|\bigg(\int\limits_{B^E(y,2r)} v(y')\,dy'\bigg)^{\frac{1}{p}} \tag{28}$$

(более подробные рассуждения можно найти в доказательстве леммы 6).

Покажем, что

$$\int\limits_{Z_v} |D_h\varphi|^q\,dx = 0.$$

По формуле замены переменных (предложение 4) имеем

$$v(\varphi(Z_v\setminus\Sigma_\varphi)) = \int\limits_{\varphi(Z_v\setminus\Sigma_\varphi)} v(y)\,dy \le \int\limits_G \Big(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\cap(Z_v\setminus\Sigma_\varphi)} v(\varphi(x))\Big)\,dy$$
$$= \int\limits_{Z_v} v(\varphi(x))|J(x,\varphi)|\,dx = 0.$$

Следовательно, $v(\varphi(Z_v\setminus\Sigma_\varphi)) = 0$ и $|\varphi(Z_v\setminus\Sigma_\varphi)| = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и открытое множество $U\subset D'$ такое, что $U \supset \varphi(Z_v\setminus\Sigma_\varphi)$ и $v(U) < \varepsilon$, $|U| < \varepsilon$. По лемме 1 выбираем конечнократное покрытие $\{B^E(y_j,r_j)\}$ открытого множества U кратности M; M не зависит от U и $\sum\limits_j |B^E(y_j,r_j)| \le M\varepsilon$. Используя неравенство

(28) и лемму 2, получаем

$$\int\limits_{Z_v} |D\varphi|^p(x)u(x)\,dx = \int\limits_{Z_v\setminus\Sigma_\varphi} |D\varphi|^p(x)u(x)\,dx \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B^E(y_j,r_j))} |D\varphi|^p(x)u(x)\,dx$$

$$\leq C^p\|\varphi^*\| \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B^E(y_j,2r_j)} v(x)\,dx \leq C_2^p\|\varphi^*\| v(U) < C_2^p\|\varphi^*\|\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, а весовая функция $u(x)$ почти всюду положительна, то $|D\varphi| = 0$ п. в. на Z_v. Следовательно, отображение φ имеет конечное (u,v)-весовое искажение.

3. Применяя формулу замены переменных (предложение 4) и неравенство (28), имеем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |D_h\varphi|^p u(x)\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\setminus Z_v} |D_h\varphi|^p u(x)\,dx$$

$$= \int\limits_{B(y_0,r)} \Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y')\setminus(Z_v\cup\Sigma_\varphi)} \frac{|D_h\varphi|^p(x)u(x)}{|J(x,\varphi)|} \Bigg)\,dy' \leq C^p\|\varphi^*\| v(B(y_0,r)). \quad (29)$$

Из (29) и теоремы 1 выводим неравенство

$$\Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(Z_v\cup\Sigma_\varphi)} \frac{|D_h\varphi|^p(x)u(x)}{|J(x,\varphi)|} \Bigg)^{\frac{1}{p}} \leq C v^{\frac{1}{p}}(y)\|\varphi^*\|,$$

которое позволяет получить искомую оценку

$$\big\|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\varkappa(D')\big\| \leq C\|\varphi^*\|. \quad \square$$

Теорема 4. *Пусть $1 \leq q \leq p < \infty$ и отображение $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) φ принадлежит классу $ACL_{\mathrm{part}}(D)$,

2) φ имеет конечное (u,v)-весовое искажение,

3) функция искажения $H_p^{u,v}(\cdot)$ принадлежит $L_\varkappa(D')$, где $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Тогда отображение φ индуцирует ограниченный оператор композиции в весовых пространствах Соболева $\varphi^* : L_p^1(D',v) \cap C_0^\infty(D') \to L_q^1(D,u)$.

При этом

$$\|\varphi^*\| \leq \big\|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\varkappa(D')\big\|.$$

Доказательство. Отметим, что $f\circ\varphi \in ACL(D)$ для всех $f \in L_p^1(D',v) \cap C_0^\infty(D')$. Действительно, $ACL_{\mathrm{part}}(D)$, поэтому для любого отрезка интегральной кривой горизонтального векторного поля (α,β), на котором отображение φ абсолютно непрерывно, выполнено следующее свойство: образы концов $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ покидают носитель $\operatorname{supp} f$. Тем самым $f\circ\varphi$ абсолютно непрерывна на отрезках абсолютной непрерывности φ и обращается в нуль там, где отображение φ не абсолютно непрерывно.

Покажем, что для любой функции $f \in L_p^1(D',v)\cap C^1(D')$ выполняется неравенство

$$\big\|\varphi^* f \mid L_q^1(D,u)\big\| \leq H_{p,q}^{u,v}(D')\big\|f \mid L_p^1(D',v)\big\|.$$

Имеем

$$\|\varphi^* f \mid L^1_q(D,u)\| \leq \Bigg(\int\limits_{D\setminus Z_v} (|\nabla_{\mathscr{L}} f|(\varphi(x))|D_h\varphi|(x))^q u(x)\,dx\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \Bigg(\int\limits_{D'} |\nabla_{\mathscr{L}} f|^q(y)\Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z_v)} \frac{|D_h\varphi|^q(x)u(x)}{|J(x,\varphi)|}\Bigg)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \Bigg(\int\limits_{D'} |\nabla_{\mathscr{L}} f|^q(y) v^{\frac{q}{p}}(y)\Bigg(v^{-\frac{q}{p}}(y)\sum_{x\in\varphi^{-1}\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z_v)} \frac{|D_h\varphi|^q(x)u(x)}{|J(x,\varphi)|}\Bigg)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя неравенство Гёльдера при $q<p$, имеем

$$\|\varphi^* f \mid L^1_q(D,u)\| \leq \Bigg(\int\limits_{D'} |\nabla_{\mathscr{L}} f|^p(y) v(y)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{D'} \Bigg(v^{-\frac{1}{p}}(y)\Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z_v)} \frac{|D_h\varphi|^q(x)u(x)}{|J(x,\varphi)|}\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)^{\varkappa} dy\Bigg)^{\frac{1}{\varkappa}}$$

$$= \|H^{u,v}_q(\cdot) \mid L_\varkappa(D')\| \cdot \|f \mid L^1_p(D',v)\|. \tag{30}$$

В итоге, $\|\varphi^*\| \leq H^{u,v}_{p,q}(D')$. $\square$

В случае $q=p=\nu$ и $v\circ\varphi \leq u$ необходимые условия являются достаточными.

Теорема 5. *Пусть $v(y)\in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, $u^{\frac{1}{1-\nu}}(x)\in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ и $v\circ\varphi\leq u$ п. в. на D. Измеримое отображение $\varphi: D\to D'$ индуцирует ограниченный оператор композиции в весовых пространствах Соболева $\varphi^*: L^1_\nu(D',v)\cap C_0^\infty(D')\to L^1_\nu(D,u)$ тогда и только тогда, когда*

1) φ принадлежит классу $ACL_{\mathrm{part}}(D)$,

2) φ имеет конечное (u,v)-весовое искажение,

3) функция искажения $H^{u,v}_p(\cdot)$ принадлежит $L_\infty(D')$.

При этом

$$C\|H^{u,v}_p(\cdot) \mid L_\infty(D')\| \leq \|\varphi^*\| \leq \|H^{u,v}_p(\cdot) \mid L_\infty(D')\|.$$

Доказательство. Необходимость. Неравенства $|J(x,\varphi)|\leq|D\varphi|^\nu(x)$, $v\circ\varphi\leq u$ и (28) обеспечивают интегрируемость $|J(x,\varphi)|v(\varphi(x))$ на $\varphi^{-1}(B(y_0,r))$, где $B(y_0,r)\subset D'$ — произвольный шар. Действительно,

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |J(x,\varphi)|v(\varphi(x))\,dx \leq C \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |D_h\varphi|^\nu u(x)\,dx \leq C_1 v(B(y_0,r)),$$

откуда следует, что $N(y,\varphi)v(y)\in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$. Далее применима теорема 3.

Достаточность следует из теоремы 4. $\square$

Если индикатриса Банаха $N(y,\varphi)$ ограничена, то необходимые условия совпадают с достаточными при $1\leq q\leq p<\infty$.

Следствие 3. *Пусть* $v(y) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, $u^{\frac{1}{1-q}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ *и* $N(y,\varphi) \leq b < \infty$ *п. в. на* D'. *Измеримое отображение* $\varphi : D \to D'$ *индуцирует ограниченный оператор композиции в весовых пространствах Соболева* $\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_q(D, u)$ *тогда и только тогда, когда*

1) φ *принадлежит классу* $ACL_{\mathrm{part}}(D)$,

2) φ *имеет конечное* (u, v)*-весовое искажение,*

3) *функция искажения* $H^{u,v}_p(\cdot)$ *принадлежит* $L_\kappa(D')$, *где* $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

При этом

$$c\big\|H^{u,v}_p(\cdot) \mid L_\kappa(D')\big\| \leq \|\varphi^*\| \leq \big\|H^{u,v}_p(\cdot) \mid L_\kappa(D')\big\|.$$

Заметим, что если отображение φ является гомеоморфизмом, то в качестве следствия получаем утверждение, близкое по содержанию к [3, теорема A].

Следствие 4. *Пусть* $v(y) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ *и* $u^{\frac{1}{1-q}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. *Гомеоморфизм* $\varphi : D \to D'$ *индуцирует ограниченный оператор композиции весовых пространств Соболева* $\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_q(D, u)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi \in ACL(D)$ *и весовая функция искажения*

$$K^{u,v}_p(x) = \inf\{K(x) : |D_h\varphi|(x) u^{\frac{1}{q}}(x) \leq K(x) |J(x,\varphi)|^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))\}$$

принадлежит $L_\varkappa(D)$. *Норма оператора* $\|\varphi^*\|$ *эквивалентна величине* $\big\|K^{u,v}_p(x) \mid L_\varkappa(D)\big\|$.

Сформулируем еще одно утверждение, в котором ограниченные операторы композиции в пространствах Соболева ассоциируются с квазиконформными отображениями.

Следствие 5. *Пусть весовые функции* u, v *принадлежат классу Макенхаупта* A_ν, *отображение* $\varphi : D \to D'$ — *гомеоморфизм и неравенство* $v \circ \varphi(x) \leq u(x)$ *выполнено для п. в.* $x \in D$. *Отображение* φ *квазиконформно тогда и только тогда, когда оператор композиции* $\varphi^* : L^1_\nu(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_\nu(D, u)$ *ограничен.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A.* Mappings associated with weighted Sobolev spaces // Contemp. Math. 2008. V. 455. P. 369–382.
2. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I // Мат. тр. 2003. Т. 6, № 2. С. 14–65.
3. *Ukhlov A.* Composition operators in weighted Sobolev spaces on Carnot groups // Acta Math. Hungar. 2011. V. 133, N 1–2. P. 103–127.
4. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. 2002. № 10. С. 11–33.
5. *Vodop'yanov S. K.* Composition operators on Sobolev spaces // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 327–342.
6. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1001–1039.
7. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и метрические свойства отображений // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 2. С. 131–135.
8. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 45–89.
9. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.
10. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.

11. *Vodopyanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии / под ред. С. К. Водопьянова. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 603–670.
12. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
13. *Kilpeläinen T.* Weighted Sobolev spaces and capacity // Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A.I. Math. 1994. V. 19, N 1. P. 95–113.
14. *Lu G.* Weighted Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications // Revista Mat. Iberoamericana. 1992. V. 8, N 3. P. 368–439.
15. *Решетняк Ю. Г., Гольдштейн В. М.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
16. *Vodop'yanov S. K.* Composition operators of Sobolev spaces // Modern problems of function theory and its applications. Saratov, 2002, P. 42–43.

Статья поступила 2 июля 2015 г.

Евсеев Никита Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
nikita@phys.nsu.ru