Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 512.57

ЧАСТИЧНЫЙ КЛОН ЛИНЕЙНЫХ ТЕРМОВ

К. Денеке

Аннотация. В качестве обобщения линейного выражения над векторным пространством терм произвольного типа τ называют *линейным*, если каждая переменная, входящая в терм, встречается в нем только один раз. Вместо обычной суперпозиции термов тотального многосортного клона всех термов в случае линейных термов определены операция частичной многосортной суперпозиции и частичный многосортный клон, удовлетворяющий суперассоциативному закону как слабому тождеству. Расширения линейных гиперподстановок являются слабыми эндоморфизмами этого частичного клона. Для многообразия V односортных тотальных алгебр типа τ определен многосортный частичный линейный клон этого многообразия как частичная фактор-алгебра частичных многосортных клонов всех линейных термов по множеству всех линейных тождеств V. Доказано, что слабые тождества этого клона соответствуют линейным гипертождествам многообразия V.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.403

Ключевые слова: линейный терм, клон, частичный клон, линейная гиперподстановка.

Посвящается памяти Х.-Й. Хёнке
по случаю его 90-летнего юбилея в октябре 2015 г.

1. Предварительные сведения

Всюду в статье предполагаем, что $\{f_i \mid i \in I\}$ — индексированное множество символов операций вида $\tau = (n_i)_{i \in I}$, где символ f_i n_i-арен для $n_i \in \mathbb{N}^+ := \mathbb{N}\backslash\{0\}$, и 0-арные символы отсутствуют. Символом $W_\tau(X)$ обозначим множество всех термов, образованных с помощью алфавита $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ и символов операций из $\{f_i \mid i \in I\}$. Также используем множество $W_\tau(X_n)$ всех n-арных термов, образованных с помощью конечного алфавита $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}^+$, определенных с использованием следующих шагов.

(i) Всякая переменная $x_i \in X_n$ есть n-арный терм типа τ.

(ii) Если $t_1, \dots, t_{n_i}$ — n-арные термы типа τ и f_i — символ n_i-арной операции, то $f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$ — n-арный терм типа τ.

Тогда $W_\tau(X_n)$ — наименьшее множество, содержащее $x_1, \dots, x_n$; это множество замкнуто относительно конечного применения (ii) и $W_\tau(X) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^+} W_\tau(X_n)$. В настоящей статье используем то же самое обозначение для многосортного множества $W_\tau(X) := (W_\tau(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}$, т. е. для бесконечной последовательности $(W_\tau(X_1), W_\tau(X_2), \dots, W_\tau(X_n), \dots)$. Сорта представляют собой множества n-арных термов типа τ для всех $n \in \mathbb{N}^+$.

На этом многосортном множестве операции многосортной суперпозиции S^n_m, $m, n \in \mathbb{N}^+$, могут быть определены как отображения

$$S^n_m : W_\tau(X_n) \times (W_\tau(X_m))^n \to W_\tau(X_m)$$

такие, что

(i) $S^n_m(x_i, t_1, \dots, t_n) := t_i$ для $1 \leq i \leq n$,

(ii) $S^n_m(f_i(s_1, \dots, s_{n_i}), t_1 \dots, t_n) := f_i\bigl(S^n_m(s_1, t_1, \dots, t_n), \dots, S^n_m(s_{n_i}, t_1, \dots, t_n)\bigr)$.

Тогда многосортная алгебра, клон всех термов типа τ, может быть определена формулой

$$\operatorname{clone}\tau := \bigl((W_\tau(X_n))_{n\in\mathbb{N}^+}; \left(S^n_m\right)_{m,n\in\mathbb{N}^+}, (x_i)_{i\leq n\in\mathbb{N}^+}\bigr).$$

Эта многосортная алгебра удовлетворяет следующим тождествам:

(C1) $\widetilde{S}^p_m\bigl(\widetilde{Z}, \widetilde{S}^n_m(\widetilde{Y}_1, \widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n), \dots, \widetilde{S}^n_m(\widetilde{Y}_p, \widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n)\bigr) \approx \widetilde{S}^n_m\bigl(\widetilde{S}^p_n(\widetilde{Z}, \widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_p), \widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n\bigr)$, $m, n, p \in \mathbb{N}^+$,

(C2) $\widetilde{S}^n_m(\lambda_j, \widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n) \approx \widetilde{X}_i$, $m = 1, 2, \dots$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}^+$,

(C3) $\widetilde{S}^n_n(\widetilde{Y}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \approx \widetilde{Y}$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Здесь $\widetilde{Z}, \widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_p, \widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n$ — переменные для термов, $\widetilde{S}^n_m$ — символы операций и λ_i, $i = 1, \dots, m$, — символы 0-арных операций.

Для $m = n = 1$ (C1) — ассоциативный закон с $\widetilde{S}^1_1$ в качестве бинарной ассоциативной операции.

Произвольная многосортная алгебра того же типа, что и $\operatorname{clone}\tau$, удовлетворяющая аксиомам (C1)–(C3), называется *абстрактным клоном*. Другой элемент многообразия абстрактных клонов — клон многообразия V односортных тотальных алгебр типа τ, определяемый как многосортная фактор-алгебра $\operatorname{clone}\tau$ по множеству всех тождеств $\operatorname{Id} V := (\operatorname{Id}_n V)_{n\in\mathbb{N}^+}$, выполненных в V. Здесь $\operatorname{Id}_n V$ — множество всех n-арных тождеств $s \approx t$ с $s, t \in W_\tau(X_n)$, выполненных в V: $\operatorname{clone} V := \operatorname{clone}\tau/\operatorname{Id} V$.

Понятие клона является одним из ведущих алгебраических понятий. Всякий абстрактный клон изоморфен конкретному клону, т. е. клону операций, определенных на множестве. Клон может рассматриваться как категория. Категории, двойственные таким категориям, являются так называемыми теориями Ловира (см. [1]). По случаю 4-й конференции молодых алгебраистов в Потсдаме в 1988 г. Хёнке поставил вопрос о нахождении характеризации типа Кэли для частичных операций. Бёрнер в [2] дал ответ на этот вопрос на уровне универсальной алгебры. В собственном ответе Хёнке использовал обогащенные декартово-замкнутые категории, так называемые *dht*-симметричные категории (категории Хёнке). В [3] подведены итоги в этой области. В настоящей работе сделан еще один шаг и введено понятие частичного клона как частичной многосортной алгебры.

Гиперподстановка типа τ — это отображение $\sigma : \{f_i \mid i \in I\} \to W_\tau(X)$, переводящее каждый символ n_i-арной операции типа τ в n_i-арный терм того же типа. Всякая гиперподстановка σ определяет отображение $\hat{\sigma} : W_\tau(X) \to W_\tau(X)$, определяемое следующим индуктивным образом:

(i) $\hat{\sigma}[x_i] := x_i$,

(ii) $\hat{\sigma}[f_i(t_1, \dots, t_{n_i})] := S^{n_i}_m(\sigma(f_i), \hat{\sigma}[t_1], \dots, \hat{\sigma}[t_{n_i}])$.

Будем использовать обозначение $\operatorname{Hyp}(\tau)$ для множества всех гиперподстановок типа τ. Для произвольных двух гиперподстановок σ_1 и σ_2 положим $\sigma_1 \circ_h \sigma_2 := \hat{\sigma}_1 \circ \sigma_2$, где $\circ$ — обычная композиция функций. Это дает ассоциативную бинарную операцию $\circ_h$ на $\operatorname{Hyp}(\tau)$, и отображение σ_{id}, отображающее каждый символ операции f_i в терм $f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$, действует как тождественный элемент для $\circ_h$. Таким образом, имеем моноид $\mathcal{H}yp(\tau) = (\operatorname{Hyp}(\tau); \circ_h, \sigma_{\mathrm{id}})$.

Так как гиперподстановки сохраняют арности, весьма естественно рассматривать их как многосортные отображения. Пусть $I_n \subseteq I$, где $n \in \mathbb{N}^+$, — множество всех индексов таких, что f_j, $j \in I_n$, n-арен, и пусть $F_\tau^n := \{f_j \mid j \in I_n\}$. Тогда σ_n, где $\sigma_n(F_\tau^n) \subseteq W_\tau(X_n)$, — это та часть σ, которая отображает n-арные символы операций в n-арные термы. Таким образом всякая гиперподстановка типа τ становится многосортным множеством функций $\sigma := (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$. Пусть теперь $\mathrm{Hyp}_n(\tau)$ — множество всех σ_n, и пусть $\mathrm{Hyp}(\tau) := (\mathrm{Hyp}_n(\tau))_{n\in\mathbb{N}^+}$ — многосортное множество всех гиперподстановок типа τ.

Известно (см. ссылки ниже), что расширение $\hat{\sigma} := (\hat{\sigma}_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ (многосортной) гиперподстановки типа τ является эндоморфизмом $\mathrm{clone}\,\tau$.

Если V — многообразие алгебр типа τ и $s \approx t$ — тождество в V, где $s, t \in W_\tau(X_n)$, то говорят, что $s \approx t$ — *гипертождество* в V, если $\hat{\sigma}_n[s] \approx \hat{\sigma}_n[t]$ для всех $\sigma_n \in \mathrm{Hyp}_n(\tau)$. Как доказано Тейлором в [4], гипертождества в V соответствуют тождествам в $\mathrm{clone}\,V$. По поводу ссылок и дополнительных сведений о гипертождествах и клонах см. [5–13].

Если рассматривать векторное пространство над полем $\mathscr{K}$ как двухсортную алгебру, то линейное выражение

$$t = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_lx_l + c$$

является термом типа векторных пространств, в который каждая переменная входит только один раз. Это может быть обобщено на произвольные типы. Пусть t — терм (односортного) типа τ, и пусть $\mathrm{var}(t)$ — множество переменных, входящих в t.

Определение 1.1. *n-Арный терм типа* τ определяется по индукции следующим образом.

(i) Для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ $\quad x_j \in X_n$ есть n-арный линейный терм типа τ.

(ii) Если $t_1, \dots, t_{n_i}$ — n-арные линейные термы типа τ и $\mathrm{var}(t_j) \cap \mathrm{var}(t_k) = \varnothing$ для всех $1 \le j < k \le n_i$, то $f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$ — n-арный линейный терм типа τ.

(iii) Множество $W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)$ всех n-арных линейных термов типа τ есть наименьшее множество, содержащее $x_1, \dots, x_n$ и замкнутое относительно конечного применения (ii).

Обычно $W_\tau^{\mathrm{lin}}(X)$ обозначает объединение всех $W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)$ для $n \in \mathbb{N}^+$, но здесь определяем $W_\tau^{\mathrm{lin}}(X) := \big(W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^+}$ как многосортное множество всех линейных термов типа τ.

В качестве примера рассмотрим тип $\tau = (2)$ с бинарным символом операции f. Тогда

$$W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_1) = \{x_1\}, \quad W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_2) = \{x_1, x_2, f(x_1, x_2), f(x_2, x_1)\},$$

$$\begin{aligned}W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_3) = \{&x_1, x_2, x_3, f(x_1, x_2), f(x_2, x_1), f(x_1, x_3), f(x_3, x_1), f(x_2, x_3),\\ &f(x_3, x_2), f(x_1, f(x_2, x_3)), f(x_1, f(x_3, x_2)), f(x_2, f(x_1, x_3)), f(x_2, f(x_3, x_1)),\\ &f(x_3, f(x_1, x_2)), f(x_3, f(x_2, x_1)), f(f(x_1, x_2), x_3), f(f(x_2, x_1), x_3), f(f(x_2, x_3), x_1),\\ &f(f(x_3, x_2), x_1), f(f(x_1, x_3), x_2), f(f(x_3, x_1), x_2)\},\end{aligned}$$

и т. д.

Мотивация изучения линейных термов восходит к работе Коусейру и Лехтонена [13]. В этой статье авторы изучают структурно-алгебраические свойства термовых операций в алгебре $\mathscr{A}$, индуцированной линейными термами. Если $\mathscr{A}$ — алгебра типа τ, то каждый терм t типа τ индуцирует термовую операцию $t^{\mathscr{A}}$ над $\mathscr{A}$. Пусть $(W_\tau(X))^{\mathscr{A}}$ — множество всех таких термовых операций. Тогда $(W_\tau(X))^{\mathscr{A}}$ является клоном операций на A, т. е. это множество замкнуто относительно суперпозиций и содержит все проекции. Эквивалентное описание клона дается операциями Мальцева $*, \xi, \tau$ и Δ. Тогда клон есть множество операций, определенных на данном множестве, которое замкнуто относительно $*, \xi, \tau$, Δ и содержит все проекционные операции [14]. Множество $\left(W_\tau^{\text{lin}}(X)\right)^{\mathscr{A}}$ не является клоном, поскольку оно не замкнуто относительно операции Δ удвоения первого входа. Задача состоит в описании алгебраической структуры $\left(W_\tau^{\text{lin}}(X)\right)^{\mathscr{A}}$. Нетрудно видеть, что это множество замкнуто относительно $*, \xi$ и τ. В [15] доказана его замкнутость относительно операции ∇, что означает забвение первого входа, и порождается проекциями. Кроме того, в [15] описана связность Галуа, характеризующая множества функций вида $\left(W_\tau^{\text{lin}}(X)\right)^{\mathscr{A}}$ подобно тому, как связность Галуа Pol-Inv характеризует клоны. Наш подход открывает другой путь рассмотрения $\left(\left(W_\tau^{\text{lin}}(X_n)\right)^{\mathscr{A}}\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ как алгебраической структуры, именно, как многосортного частичного клона.

2. Суперпозиция линейных термов

Множества $W_\tau^{\text{lin}}(X_n)$ не замкнуты относительно операций суперпозиции, как показывает следующий пример. Пусть $\tau = (2, 2)$ с бинарными операциями символов f и g. Тогда $f(x_1, x_2)$ и $g(x_2, x_1)$ — линейные термы, но $f(g(x_2, x_1), f(x_1, x_2))$ нелинеен. Однако справедливо

Предложение 2.1. *Если* $f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \in W_\tau^{\text{lin}}(X_n)$, $s_1, \dots, s_n \in W_\tau^{\text{lin}}(X_m)$ *и* $\text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \varnothing$ *для* $1 \le j < k \le n$, *то* $S_m^n(f_i(t_1, \dots, t_{n_i}), s_1, \dots, s_n) \in W_\tau^{\text{lin}}(X_m)$.

Доказательство. Поскольку

$$S_m^n(f_i(t_1, \dots, t_{n_i}), s_1, \dots, s_n) = f_i\big(S_m^n(t_1, s_1, \dots, s_n), \dots, S_m^n(t_{n_i}, s_1, \dots, s_n)\big),$$

нужно показать, что

1) $S_m^n(t_j, s_1, \dots, s_n) \in W_\tau^{\text{lin}}(X_m)$ для всех $1 \le j \le n_i$,

2) $\text{var}\left(S_m^n(t_j, s_1, \dots, s_n)\right) \cap \text{var}\left(S_m^n(t_k, s_1, \dots, s_n)\right) = \varnothing$ для всех $1 \le j < k \le n_i$.

1. Так как t_j линеен, переменные из X_n входят только один раз в t_j, $1 \le j \le n_i$. Для этих переменных заменим термы из $\{s_1, \dots, s_n\}$. Но по предположению в множестве $\{s_1, \dots, s_n\}$ каждая переменная из X_m входит только один раз, т. е. $S_m^n(t_j, s_1, \dots, s_n)$ переменных из X_m входят только раз, и потому $S_m^n(t_j, s_1, \dots, s_n)$ линеен.

2. Поскольку $f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \in W_\tau^{\text{lin}}(X_n)$, имеем $\text{var}(t_j) \cap \text{var}(t_k) = \varnothing$ для $1 \le j < k \le n_i$, т. е. в $S_m^n(t_j, s_1, \dots, s_n)$ и в $S_m^n(t_k, s_1, \dots, s_n)$ для различных переменных подставляются различные термы из $s_1, \dots, s_n$, содержащие $1 \le j < k \le n$ различных переменных ввиду $\text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \varnothing$. □

Вследствие предложения 2.1 можно определить многосортные частичные отображения

$$\overline{S}_m^n : W_\tau^{\text{lin}}(X_n) \times \left(W_\tau^{\text{lin}}(X_m)\right)^n \multimap W_\tau^{\text{lin}}(X_m)$$

формулой

$$\overline{S}_m^n(t, s_1, \dots, s_n) := \begin{cases} S_m^n(t, s_1, \dots, s_n), & \text{если } \text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \varnothing \\ & \text{для всех } 1 \le j < k \le n, \\ \text{не определено} & \text{иначе} \end{cases}$$

для $m, n \in \mathbb{N}^+$ и многосортовую частичную алгебру:

$$\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau := \bigl(\bigl(W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+}, \bigl(\overline{S}^n_m\bigr)_{m,n\in\mathbb{N}^+}, (x_i)_{i\le n, n\in\mathbb{N}^+}\bigr).$$

Напомним некоторые основные понятия, касающиеся частичных алгебр. Для частичных алгебр имеется несколько возможностей определить гомоморфизмы, подалгебры или тождества. Если $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ — частичные алгебры одного типа с индексированными множествами $\bigl\{f_i^{\mathscr{A}} \mid i \in I\bigr\}$, $\bigl\{f_i^{\mathscr{B}} \mid i \in I\bigr\}$ частичных операций на A и B соответственно в качестве основных операций, то отображение $h : A \to B$ называется *слабым гомоморфизмом*, если для всех основных операций выполняется следующее: если $(a_1, \dots, a_{n_i}) \in \operatorname{dom} f_i^{\mathscr{A}}$, то $(h(a_1), \dots, h(a_{n_i})) \in \operatorname{dom} f_i^{\mathscr{B}}$, и тогда

$$h\bigl(f_i^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_{n_i})\bigr) = f_i^{\mathscr{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{n_i})), \quad i \in I,$$

где $\operatorname{dom} f_i^{\mathscr{A}}$ — область определения операции $f_i^{\mathscr{A}}$. Для многосортных частичных алгебр понятия слабого гомоморфизма определяется аналогично, но тогда h — многосортовое отображение, отображающее множества определенного сорта в многосортном множестве A в соответствующие множества того же сорта многосортно множестве B. Говорят, что уравнение $s \approx t$ в термах над многосортной частичной алгеброй $\mathscr{A}$ есть *слабое тождество в* $\mathscr{A}$, если после вычисления одна и другая части определены и они равны.

3. Свойства $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau$

Положим $\overline{F}^n_\tau := \{f_i(x_1, \dots, x_n) \mid i \in I_n,\ n \in N^+\}$. Ясно, что $\overline{F}^n_\tau \subseteq W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)$.

Лемма 3.1. $\bigl(\overline{F}^n_\tau\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+}$ *— порождающая система* $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau$.

Доказательство. Используя индукцию по сложности линейного терма, покажем, что $\bigl(W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+}$ порождается $\bigl(\overline{F}^n_\tau\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+}$. Пусть m, n — произвольные натуральные числа из $\mathbb{N}^+$, и пусть $x_i \in X_n$. Поскольку переменные принадлежат типу $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau$, они порождены. Предположим, что $t_1, \dots, t_n \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_m)$ порождены и $t = f_i(t_1, \dots, t_n) \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_m)$. Тогда

$$\overline{S}^n_m(f_i(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n) = S^n_m(f_i(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n) = f_i(t_1, \dots, t_n),$$

поскольку $\operatorname{var}(t_j) \cap \operatorname{var}(t_k) = \varnothing$ для $1 \le j < k \le n$ и потому $(f_i(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n)$ принадлежит области $\overline{S}^n_m$. Это показывает, что $f_i(t_1, \dots, t_n)$ порождена. $\square$

Говорят, что алгебра *свободна относительно себя*, если она имеет порождающую систему и всякое отображение из порождающей системы в универсум алгебры (подстановка) продолжается до эндоморфизма. Для частичной алгебры $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau$ — это слабый эндоморфизм. Покажем теперь, что $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau$ обладает этим свойством.

Лемма 3.2. *Многосортная частичная алгебра* $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau$ *свободна относительно себя и свободно порождается* $\bigl(\overline{F}^n_\tau\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+}$.

Доказательство. Покажем, что всякое многосортное отображение

$$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^+} : \bigl(\overline{F}^n_\tau\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+} \to \bigl(W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+}$$

продолжается до слабого эндоморфизма $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau$. Определим продолжение $(\overline{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ по индукции с помощью следующих шагов:

1) $\overline{\varphi}_n(x_i) := x_i$ для $x_i \in X_n, n \in \mathbb{N}^+$,

2) $\overline{\varphi}_m(f_i(t_1,\dots,t_n)) := \overline{S}^n_m(\varphi_n(f_i(x_1,\dots,x_n)), \bar{\varphi}_m(t_1),\dots,\bar{\varphi}_m(t_n))$, $m,n \in \mathbb{N}^+$, $i \in I_n$, в предположении, что $\overline{\varphi}_m(t_j)$, $j = 1,\dots,n$, уже определены.

Ясно, что $\overline{\varphi}_n$ продолжает φ_n. Для любого терма $s \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)$ получаем $\mathrm{var}(\overline{\varphi}_n(s)) \subseteq \mathrm{var}(s)$. Для переменных это ясно в силу шага 1 определения $\overline{\varphi}_n$. Если $s = f_i(s_1,\dots,s_n) \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)$ и предположим по индукции, что $\mathrm{var}(\overline{\varphi}_n(s_j)) \subseteq \mathrm{var}(s_j)$ для $j = 1,\dots,n$, то

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\overline{\varphi}_n(f_i(s_1,\dots,s_n))) &= \mathrm{var}\left(\overline{S}^n_m(\varphi_n(f_i(x_1,\dots,x_n)), \bar{\varphi}_n(s_1),\dots,\bar{\varphi}_n(s_n))\right)\\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^n \mathrm{var}(\overline{\varphi}_n(s_j)) \subseteq \bigcup_{j=1}^n \mathrm{var}(s_j) = \mathrm{var}(f_i(s_1,\dots,s_n))\end{aligned}$$

в силу шага 2 нашего определения. Отсюда имеем

$$\mathrm{var}(t_j) \cap \mathrm{var}(t_k) = \varnothing \Rightarrow \mathrm{var}(\overline{\varphi}_n(t_j)) \cap \mathrm{var}(\overline{\varphi}_n(t_k)) = \varnothing \qquad (*)$$

для $t_j, t_k \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)$. Если $f_i(t_1,\dots,t_n) \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_m)$, то $(\varphi_n(f_i(x_1,\dots,x_n)), \overline{\varphi}(t_1), \dots, \overline{\varphi}_m(t_n)) \in \mathrm{dom}\, \overline{S}^n_m$ в силу $(*)$, и тогда $\overline{\varphi}_m\big(\overline{S}^n_m(f_i(x_1,\dots,x_n), t_1,\dots,t_n)\big) = \overline{S}^n_m(\varphi_n(f_i(x_1,\dots,x_n)), \bar{\varphi}_m(t_1),\dots,\bar{\varphi}_m(t_n))$.

Это показывает, что $(\overline{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ — слабый эндоморфизм, продолжающий $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$. $\square$

Будем называть отображения вида $\varphi = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ *подстановками линейного клона.* Для подстановок линейного клона $\varphi = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ и $\psi = (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ определим многосортную композицию $\circ_S$ формулой $\psi \circ_S \varphi := \bar{\psi} \circ \varphi$, где $\circ$ — обычная композиция многосортных отображений:

$$\left(\overline{F}^n_\tau\right)_{n\in\mathbb{N}^+} \xrightarrow{\varphi} \left(W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^+} \xrightarrow{\bar{\psi}} \left(W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^+},$$

т. е. $\psi \circ_S \varphi$ снова является подстановкой линейного клона. Пусть $\mathrm{Subst}_{\mathrm{lin}}\,\tau := \left(\mathrm{Subst}^n_{\mathrm{lin}}\,\tau\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$, где $\mathrm{Subst}^n_{\mathrm{lin}}\,\tau := \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ и $\overline{F}^n_\tau \xrightarrow{\varphi_n} W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)$ — множество всех подстановок линейного клона. Так как операция $\circ_S$ ассоциативна, вместе с тождественной подстановкой id получаем моноид, именно, моноид $(\mathrm{Subst}_{\mathrm{lin}}\,\tau; \circ_S, \mathrm{id})$ всех подстановок линейного клона типа τ.

Проверим теперь выполнение тождеств (C1)–(C3) в $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau$.

(C1) Заменим переменные в (C1) произвольными линейными термами $t_1,\dots,t_n \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_m)$, $s_1,\dots,s_p \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)$, $u \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_p)$, $m,n,p \in \mathbb{N}^+$, а символы операций — частичными основными операциями $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau$ и получим

$$\overline{S}^p_m\big(u, \overline{S}^n_m(s_1,t_1,\dots,t_n),\dots,\overline{S}^n_m(s_p,t_1,\dots,t_n)\big) \approx \overline{S}^n_m\big(\overline{S}^p_n(u,s_1,\dots,s_p),t_1,\dots,t_n\big).$$

Если $\mathrm{var}(s_j) \cap \mathrm{var}(s_k) = \varnothing$ для $1 \le j < k \le p$ и $\mathrm{var}(t_j) \cap \mathrm{var}(t_k) = \varnothing$ для $1 \le j < k \le n$, то правая часть определена и равна $S^n_m\big(S^p_n(u,s_1,\dots,s_p),t_1,\dots,t_n\big)$. Тогда также $\overline{S}^n_m(s_j,t_1,\dots,t_n)$, $j = 1,\dots,p$, определены и равны $S^n_m(s_j,t_1,\dots,t_n)$ и, кроме того,

$$\mathrm{var}\left(\overline{S}^n_m(s_j,t_1,\dots,t_n)\right) \cap \mathrm{var}\left(\overline{S}^n_m(s_k,t_1,\dots,t_n)\right) = \varnothing, \quad 1 \le j < k \le p.$$

Тем самым правая часть определена и равна

$$S^p_m\big(u, S^n_m(s_1,t_1,\dots,t_n),\dots,S^n_m(s_p,t_1,\dots,t_n)\big).$$

(C2) Заменим $\widetilde{S}^n_m$ на $\overline{S}^n_m$, λ_i — на $x_i \in X_n$ и $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n$ — на произвольные m-арные линейные термы $t_1, \dots, t_n$ и получим $\overline{S}^n_m(x_i, t_1, \dots, t_n)$. Если $\operatorname{var}(t_j) \cap \operatorname{var}(t_k) = \varnothing$, $1 \le j < k \le n$, то этот терм существует и $\overline{S}^n_m(x_i, t_1, \dots, t_n) = S^n_m(x_i, t_1, \dots, t_n) = t_i$.

Наши рассуждения показывают, что (C1) и (C2) — слабые тождества в $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} \tau$, поскольку если после вычисления обе части равенства существуют, то они равны.

(C3) Заменим $\widetilde{S}^n_n$ на $\overline{S}^n_n$, $\widetilde{Y}$ — на произвольные линейные термы $s \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)$. Тогда $\overline{S}^n_n(s, x_1, \dots, x_n) = S^n_n(s, x_1, \dots, x_n) = s$. Поэтому (C3) также выполнено как слабое тождество в $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} \tau$, но даже и в более сильном смысле.

В итоге доказано следующее утверждение.

Теорема 3.3. $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} \tau$ *удовлетворяет* (C1)–(C3) *как слабым тождествам.*

4. Линейный клон многообразия

Пусть V — многообразие алгебр типа τ. Тождество $s \approx t$ в V называется *линейным*, если $s, t \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)$ для некоторого $n \ge 1$. Например, ассоциативный закон является линейным тождеством в многообразии полугрупп. Пусть $\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}} V$ — множество всех линейных тождеств в V. Если положить

$$\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V := \bigl\{ s \approx t \mid s, t \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n) \text{ и } s \approx t \in \operatorname{Id} V \bigr\},$$

то $\bigl(\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V\bigr)_{n \in \mathbb{N}^+}$ — многосортное отношение эквивалентности на $W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$. Очевидно, что $\bigl(\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V\bigr)_{n \in \mathbb{N}^+}$ не является эквациональной теорией типа τ, поскольку она не замкнута относительно подстановки.

Используем следующее понятие конгруэнции на частичной алгебре с универсумом A и частичными операциями $\bigl(f^{\mathscr{A}}_j\bigr)_{j \in J}$. Пусть θ — отношение эквивалентности на A. Тогда θ называется *конгруэнцией на частичной алгебре* $\mathscr{A}$, если для всех $j \in J$ и всех $(a_1, b_1), \dots, (a_{n_j}, b_{n_j}) \in \theta$ выполняется следующее: если $(a_1, \dots, a_{n_j}) \in \operatorname{dom} f^A_j$ и $(b_1, \dots, b_{n_j}) \in \operatorname{dom} f^A_j$, то $\bigl(f^A_j(a_1, \dots, a_{n_j}), f^A_j(b_1, \dots, b_{n_j})\bigr) \in \theta$ [16]. Из соответствующего определения для многосортных частичных алгебр вытекает

Теорема 4.1. *Пусть V — многообразие* (*тотальных односортных алгебр*) *типа τ. Тогда $\bigl(\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V\bigr)_{n \in \mathbb{N}^+}$ — конгруэнция на* $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} \tau$.

Доказательство. Предположим, что $s \approx t \in \operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V$ и $s_1 \approx t_1, \dots, s_n \approx t_n \in \operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_m V$. Если $\operatorname{var}(s_j) \cap \operatorname{var}(s_k) = \varnothing$ и $\operatorname{var}(t_j) \cap \operatorname{var}(t_k) = \varnothing$ для $1 \le j < k \le n$, т. е. если $(s, s_1, \dots, s_n), (t, t_1, \dots, t_n) \in \operatorname{dom} \overline{S}^n_m$, то

$$\overline{S}^n_m(s, s_1, \dots, s_n) = S^n_m(s, s_1, \dots, s_n) \approx S^n_m(t, t_1, \dots, t_n) = \overline{S}^n_m(t, t_1, \dots, t_n).$$

Ясно, что $\bigl(\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V\bigr)_{n \in \mathbb{N}^+}$ также сохраняется постоянными основными операциями $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} \tau$. $\square$

Теперь можно построить частичную многосортную алгебру

$$\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} V := \operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} \tau / \bigl(\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V\bigr)_{n \in \mathbb{N}^+},$$

которую назовем *линейным клоном многообразия* V. Здесь частичные многосортные основные операции клона $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} V$ определяются следующим образом:

$$\widehat{S}^n_m : W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)/\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V \times \bigl(W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_m)/\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_m V\bigr)^n \to W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_m)/\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_m V,$$

где $\widehat{S}^n_m([t]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_n V}, [t_1]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V}, \dots, [t_n]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V})$ полагается равным $[s]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V}$ тогда и только тогда, когда существуют термы $t'_i \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_m)$, $t' \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)$, $s' \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_m)$, $i = 1, \dots, n$, такие, что $(t', t'_1, \dots, t'_n) \in \operatorname{dom} S^n_m$, $[t'_i]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V} = [t_i]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V}$, $i = 1, \dots, n$, $[t']_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_n V} = [t]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_n V}$, $[s']_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V} = [s]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V}$ и $S^n_m(t', t'_1, \dots, t'_n) = s'$.

Заметим, что многосортное отображение

$$\mathrm{nat}_{\mathrm{lin}}\, \mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}\, V : \big(W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^+} \to \big(W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^+} / \big(\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_n\, V\big)_{n\in\mathbb{N}^+},$$

переводящее произвольное t в $[t]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_n V}$, является слабым гомоморфизмом

$$\mathrm{nat}_{\mathrm{lin}}\, \mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}\, \tau : \mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, \tau \to \mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, V,$$

который назовем *естественным гомоморфизмом.*

Установим некоторые полезные свойства $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, V$.

Лемма 4.2. *Пусть V — многообразие тотальных односортных алгебр типа τ. Всякое многосортное отображение*

$$\varphi : \big(\overline{F}^n_\tau\big)_{n\in\mathbb{N}^+} \to \big(W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^+} / \big(\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_n\, V\big)_{n\in\mathbb{N}^+}$$

можно продолжить до слабого гомоморфизма

$$\overline{\varphi} : \mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, \tau \to \mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, V.$$

Доказательство. Всякое отображение φ разлагается в композицию $\varphi = \mathrm{nat}_{\mathrm{lin}}\, \mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}\, V \circ \psi$, где $\psi : \big(\overline{F}^n_\tau\big)_{n\in\mathbb{N}^+} \to \big(W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^+}$ и $\psi_n(f_i(x_1, \dots, x_n)) = t$, если $\varphi_n(f_i(x_1, \dots, x_n)) = [t]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_n V}$.

В силу леммы 3.2 отображение ψ можно продолжить до слабого эндоморфизма $\bar{\psi} : \mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, \tau \to \mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, \tau$. Так как $\mathrm{nat}_{\mathrm{lin}}\, \mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}\, V$ — слабый гомоморфизм, то $\overline{\varphi} := \mathrm{nat}_{\mathrm{lin}}\, \mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}\, V \circ \bar{\psi}$ — слабый гомоморфизм, продолжающий φ. $\square$

Отметим, что подлинным основанием для леммы 4.2 может служить тот факт, что алгебра $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, \tau$ не только свободна относительно себя, но также относительно более широкого класса многосортных частичных алгебр, содержащего $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, \tau$ и $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, V$.

Положим $\widehat{F}^n_\tau := \{[f_i(x_1, \dots, x_n)]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_n V} \mid i \in I_n\}$. Ясно, что $\big(\widehat{F}^n_\tau\big)_{n\in\mathbb{N}^+}$ — порождающая система для $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, V$.

Лемма 4.3. $\big(\widehat{F}^n_\tau\big)_{n\in\mathbb{N}^+}$ *— порождающая система для* $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, V$.

Доказательство. Система $([x_i])_{i\le n, n\in\mathbb{N}^+}$ может быть порождена, так как ее элементы принадлежат основным операциям $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, V$. Пусть $[t]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V}$, где $t = f_i(t_1, \dots, t_n) \in W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_m)$, и предположим по индукции, что $[t_1]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V}, \dots, [t_n]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V}$ могут быть порождены. Тогда

$$\begin{aligned}[t]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V} = [f_i(t_1, \dots, t_n)]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V} &= \big[S^n_m(f_i(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n)\big]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V} \\ &= \widehat{S}^n_m([f_i(x_1, \dots, x_n)]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_n V}, [t_1]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V}, \dots, [t_n]_{\mathrm{Id}^{\mathrm{lin}}_m V}),\end{aligned}$$

потому что $\mathrm{var}(t_j) \cap \mathrm{var}(t_k) = \varnothing$ для $1 \le j < k \le n$. $\square$

Ясно также, что $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, V$, будучи слабым гомоморфным образом $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\, \tau$, удовлетворяет (C1)–(C3) как слабым тождествам.

5. Линейные гиперподстановки

Линейные гиперподстановки типа τ введены в [17] и являются отображениями из множества $\{f_i \mid i \in I\}$ всех символов операций типа τ в множество $W_\tau^{\mathrm{lin}}(X)$ всех линейных термов этого типа и сохраняют арности. Поэтому определим линейные гиперподстановки как многосортные отображения $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, где $\sigma_n : F_\tau^n \to W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)$. Пусть $\mathrm{Hyp}_n^{\mathrm{lin}}(\tau)$ — множество всех σ_n, и пусть $\bigl(\mathrm{Hyp}_n^{\mathrm{lin}}(\tau)\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+}$ — многосортное множество всех линейных гиперподстановок. По определению

$$\hat\sigma_n[x_i] := x_i,$$

$$\hat\sigma_n[f_i(t_1,\dots,t_n)] := \overline{S}_n^n(\sigma_n(f_i), \hat\sigma_n[t_1],\dots,\hat\sigma_n[t_n]) = S_n^n(\sigma_n(f_i), \hat\sigma_n[t_1],\dots,\hat\sigma_n[t_n]),$$

и получаем продолжение σ_n, поскольку $\mathrm{var}(\hat\sigma_n[t_j]) \cap \mathrm{var}(\hat\sigma_n[t_k]) = \varnothing$ для $1 \le j < k \le n$ (см. [17]).

Как и в односортном случае, можно определить композицию $\sigma_{1n} \circ_n^h \sigma_{2n} := \hat\sigma_{1n} \circ_n \sigma_{2n}$, $F_\tau^n \overset{\sigma_{2n}}{\to} W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n) \overset{\hat\sigma_{1n}}{\to} W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)$. Вместе с отображением $\sigma_{\mathrm{id}\,n} : F_\tau^n \to \overline{F}_\tau^n$, определенным по формуле $\sigma_{\mathrm{id}\,n}(f_i) = f_i(x_1,\dots,x_n)$ для $i \in I_n$, получаем многосортный моноид

$$\Bigl(\bigl(\mathrm{Hyp}_n^{\mathrm{lin}}(\tau)\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+}; \bigl(\circ_n^h\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+}, (\sigma_{\mathrm{id}\,n})_{n\in\mathbb{N}^+}\Bigr).$$

Для этого определения необходимо, чтобы продолжение $\hat\sigma_n$ отображало линейные термы в линейные. Это показано в [17]. Для краткости здесь будем использовать следующее обозначение: $\mathrm{Hyp}^{\mathrm{lin}}(\tau) := \bigl(\mathrm{Hyp}_n^{\mathrm{lin}}(\tau)\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+}$, $\circ_h := \bigl(\circ_n^h\bigr)_{n\in\mathbb{N}^+}$ и $\sigma_{\mathrm{id}} := (\sigma_{\mathrm{id}\,n})_{n\in\mathbb{N}^+}$.

То, что $\mathrm{Hyp}^{\mathrm{lin}}(\tau)$ образует многосортный моноид, также является следствием изоморфизма моноидов подстановок линейного клона и линейных гиперподстановок. Для доказательства этого изоморфизма нужна

Лемма 5.1. *Для произвольной подстановки линейного клона η имеет место равенство*

$$(\eta \circ \sigma_{\mathrm{id}})^\wedge[t] = \bar\eta[t]$$

для всех линейных термов t.

Доказательство. Предположим, что $t \in W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)$, и продолжим по индукции по сложности t. Если $t = x_i \in X_n$, то $(\eta\circ\sigma_{\mathrm{id}})_n^\wedge[x_i] = x_i = \bar\eta_n[x_i]$ по определению продолжения подстановки линейного клона в 3. Для $t = f_i(t_1,\dots,t_n)$, $i \in I_n$, в предположении, что

$$(\eta\circ\sigma_{\mathrm{id}})_n^\wedge[t_i] = \bar\eta_n[t_i], \quad i = 1,\dots,n,$$

имеем

$$\begin{aligned}
(\eta\circ\sigma_{\mathrm{id}})_n^\wedge[f_i(t_1,\dots,t_n)] &= \overline{S}_n^n\bigl((\eta\circ\sigma_{\mathrm{id}})_n(f_i), (\eta\circ\sigma_{\mathrm{id}})_n^\wedge[t_1],\dots,(\eta\circ\sigma_{\mathrm{id}})_n^\wedge[t_n]\bigr)\\
&= \overline{S}_n^n(\eta_n(f_i(x_1,\dots,x_n)), \bar\eta_n[t_1],\dots,\bar\eta_n[t_n]) = \bar\eta_n\bigl[\overline{S}_n^n(f_i(x_1,\dots,x_n), t_1,\dots,t_n)\bigr]\\
&= \bar\eta_n\bigl[S_n^n(f_i(x_1,\dots,x_n), t_1,\dots,t_n)\bigr]\\
&\qquad (\text{так как } \mathrm{var}(t_j)\cap\mathrm{var}(t_k) = \varnothing \text{ для } 1 \le j < k \le n)\\
&= \bar\eta_n(f_i(t_1,\dots,t_n)) = \bar\eta_n[t]. \quad \square
\end{aligned}$$

Теорема 5.2. *Многосортные моноиды подстановок линейного клона и линейных гиперподстановок типа τ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\varphi = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, где $\varphi_n : \overline{F}_\tau^n \to W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)$ — подстановка линейного клона типа τ. Семейство $\sigma := (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, определенное как

$$\sigma_n : F_\tau^n \stackrel{\sigma_{\mathrm{id}\,n}}{\to} \overline{F}_\tau^n \stackrel{\varphi_n}{\to} W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n),$$

т. е. $\sigma_n := \varphi_n \circ \sigma_{\mathrm{id}\,n}$, является линейной гиперподстановкой. Пусть $\psi := (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, где $\psi_n : \mathrm{Subst}_{\mathrm{lin}}^n(\tau) \to \mathrm{Hyp}_n^{\mathrm{lin}}(\tau)$, $\psi_n(\varphi_n) := \varphi_n \circ \sigma_{\mathrm{id}\,n}$, — многосортное отображение. Покажем, что ψ биективно, т. е. что каждое ψ_n, $n \in \mathbb{N}^+$, биективно. В самом деле, ψ_n инъективно, поскольку $\psi_n(\varphi_n) = \psi_n(\pi_n)$, т. е. из $\varphi_n \circ_n \sigma_{\mathrm{id}\,n} = \pi_n \circ_n \sigma_{\mathrm{id}\,n}$ следует, что $\varphi_n = \pi_n$ в силу инъективности $\sigma_{\mathrm{id}\,n}$. Отображение ψ_n также сюръективно, так как для $\sigma_n \in \mathrm{Hyp}_n^{\mathrm{lin}}(\tau)$ имеется n-арная подстановка линейного клона, именно

$$\sigma_n \circ_n \sigma_{\mathrm{id}\,n}^{-1} : \overline{F}_\tau^n \stackrel{\sigma_{\mathrm{id}\,n}^{-1}}{\to} F_\tau^n \stackrel{\sigma_n}{\to} W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n),$$

где $\psi_n\big(\sigma_n \circ_n \sigma_{\mathrm{id}\,n}^{-1}\big) = \sigma_n \circ_n \sigma_{\mathrm{id}\,n}^{-1} \circ_n \sigma_{\mathrm{id}\,n} = \sigma_n$, отображаемая в σ_n. Наконец, ψ совместимо с операциями обоих моноидов, поскольку

$$\begin{aligned}\psi(\varphi \circ_S \pi) &= (\varphi \circ_S \pi) \circ \sigma_{\mathrm{id}} = (\overline{\varphi} \circ \pi) \circ \sigma_{\mathrm{id}} = \overline{\varphi} \circ (\pi \circ \sigma_{\mathrm{id}}) \\ &= (\varphi \circ \sigma_{\mathrm{id}})^\wedge \circ (\pi \circ \sigma_{\mathrm{id}}) = (\varphi \circ \sigma_{\mathrm{id}}) \circ_h (\pi \circ \sigma_{\mathrm{id}}) = \psi(\varphi) \circ_h \psi(\pi)\end{aligned}$$

с учетом того факта, что продолжение гиперподстановки $\varphi \circ \sigma_{\mathrm{id}}$ равно продолжению подстановки клона φ (лемма 5.1). $\square$

В качестве следствия леммы 3.2 и теоремы 5.2 имеем следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Продолжение произвольной линейной гиперподстановки является слабым эндоморфизмом* $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau$.

6. Линейные гипертождества

Пусть V — многообразие односортных тотальных алгебр типа τ, и пусть $\mathcal{H}yp^{\mathrm{lin}}(\tau)$ — многосортный моноид линейных подстановок типа τ. Линейное тождество $s \approx t$ на V называется *линейным гипертождеством в* V, если $\hat{\sigma}_n[s] \approx \hat{\sigma}_n[t] \in \mathrm{Id}_n V$ для $s, t \in W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)$ для всех $\sigma_n \in \mathrm{Hyp}_n^{\mathrm{lin}}(\tau)$ и $n \in \mathbb{N}^+$ (см. [17]). Положим

$$H\,\mathrm{Id}_n^{\mathrm{lin}}\,V := \big\{s \approx t \mid s, t \in W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n),\ \hat{\sigma}_n[s] \approx \hat{\sigma}_n[t] \in \mathrm{Id}_n V \\ \text{для всех } \sigma_n \in \mathrm{Hyp}_n^{\mathrm{lin}}(\tau)\big\}.$$

Тогда $\big(H\,\mathrm{Id}_n^{\mathrm{lin}}\,V\big)_{n\in\mathbb{N}^+}$ является многосортным отношением эквивалентности на $\big(W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^+}$ и, кроме того, справедлива

Теорема 6.1. *Пусть V — многообразие типа τ. Тогда $\big(H\,\mathrm{Id}_n^{\mathrm{lin}}\,V\big)_{n\in\mathbb{N}^+}$ — слабая вполне инвариантная конгруэнция на* $\mathrm{clone}_{\mathrm{lin}}\,\tau$.

Доказательство. Предположим, что $s \approx t \in H^{\mathrm{lin}}\,\mathrm{Id}_n V$, $s_1 \approx t_1, \dots, s_n \approx t_n \in H^{\mathrm{lin}}\,\mathrm{Id}_m V$. Это означает, что $\hat{\sigma}_n[s] \approx \hat{\sigma}_n[t] \in \mathrm{Id}_n^{\mathrm{lin}} V$ и $\hat{\sigma}_m[s_1] \approx \hat{\sigma}_m[t_1], \dots, \hat{\sigma}_m[s_n] \approx \hat{\sigma}_m[t_n] \in \mathrm{Id}_m^{\mathrm{lin}} V$ для всех многосортных линейных гиперподстановок $\sigma \in \big(Hyp_n^{\mathrm{lin}}(\tau)\big)_{n\in\mathbb{N}^+}$.

Если $\overline{S}^n_m(s, s_1, \dots, s_n)$ и $\overline{S}^n_m(t, t_1, \dots, t_n)$ определены, т. е. если $\operatorname{var}(s_j) \cap \operatorname{var}(s_k) = \varnothing$ и $\operatorname{var}(t_j) \cap \operatorname{var}(t_k) = \varnothing$ для $1 \le j < k \le n$, то также $\operatorname{var}(\hat{\sigma}_m[s_j]) \cap \operatorname{var}(\hat{\sigma}_m[s_k]) = \varnothing$ и $\operatorname{var}(\hat{\sigma}_m[t_j]) \cap \operatorname{var}(\hat{\sigma}_m[t_k]) = \varnothing$ для $1 \le j < k \le n$ в силу леммы 5.3 из [17]. Тогда

$$\overline{S}^n_m(\hat{\sigma}_n[s], \hat{\sigma}_m[s_1], \dots, \hat{\sigma}_m[s_n]) = S^n_m(\hat{\sigma}_n[s], \hat{\sigma}_m[s_1], \dots, \hat{\sigma}_m[s_n])$$

и

$$\overline{S}^n_m(\hat{\sigma}_n[t], \hat{\sigma}_m[t_1], \dots, \hat{\sigma}_m[t_n]) = S^n_m(\hat{\sigma}_n[t], \hat{\sigma}_m[t_1], \dots, \hat{\sigma}_m[t_n])$$

определены и

$$\begin{aligned}\overline{S}^n_m(\hat{\sigma}_n[s], \hat{\sigma}_m[s_1], \dots, \hat{\sigma}_m[s_n]) &= S^n_m(\hat{\sigma}_n[s], \hat{\sigma}_m[s_1], \dots, \hat{\sigma}_m[s_n]) \\ &\approx S^n_m(\hat{\sigma}_n[t], \hat{\sigma}_m[t_1], \dots, \hat{\sigma}_m[t_n]) = \overline{S}^n_m(\hat{\sigma}_n[t], \hat{\sigma}_m[t_1], \dots, \hat{\sigma}_m[t_n]) \in \operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_m V\end{aligned}$$

для всех $\sigma \in \left(\operatorname{Hyp}^{\mathrm{lin}}_n(\tau)\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$, тем самым

$$\hat{\sigma}_m\left[\overline{S}^n_m(s, s_1, \dots, s_n)\right] \approx \hat{\sigma}_m\left[\overline{S}^n_m(t, t_1, \dots, t_n)\right] \in \operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_m V \text{ для всех } \sigma_m \in \operatorname{Hyp}^{\mathrm{lin}}_m(\tau),$$

так как $\hat{\sigma}$ является слабым изоморфизмом $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} \tau$. Значит, $\left(H \operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ есть конгруэнция на $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} \tau$.

Доказательство того, что эта конгруэнция вполне инварианта, означает доказательство того, что для всех линейных подстановок φ из $s \approx t \in H \operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V$ вытекает, что $\overline{\varphi}_n(s) \approx \overline{\varphi}_n(t) \in H \operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V$, где $\overline{\varphi}$ — продолжение φ. По лемме 5.1 можно вместо $\overline{\varphi}_n(s) \approx \overline{\varphi}_n(t)$ написать $(\varphi \circ \sigma_{\mathrm{id}})^\wedge_n[s] \approx (\varphi \circ \sigma_{\mathrm{id}})^\wedge_n[t]$. Чтобы доказать, что это линейное гипертождество в V, мы должны показать, что для всех $\sigma_n \in \operatorname{Hyp}^{\mathrm{lin}}_n(\tau)$ следует

$$\hat{\sigma}_n\big((\varphi \circ \sigma_{\mathrm{id}})^\wedge_n\big)[s] \approx \hat{\sigma}_n\big((\varphi \circ \sigma_{\mathrm{id}})^\wedge_n\big)[t] \in \operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V.$$

Но по свойствам гиперподстановок (см. [5]) имеем $\hat{\sigma}_1 \circ \hat{\sigma}_2 = (\sigma_1 \circ_h \sigma_2)^\wedge$ и потому

$$(\sigma_n \circ_h (\varphi \circ \sigma_{\mathrm{id}})_n)^\wedge[s] \approx (\sigma_n \circ_h (\varphi \circ \sigma_{\mathrm{id}})_n)^\wedge[t]$$

является тождеством в V, поскольку линейные подстановки образуют моноид. Тем самым $\hat{\varphi}_n(s) \approx \hat{\varphi}_n(t)$ — линейное гипертождество в V. $\square$

Подобно тому, как определили линейный клон $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} V$ многообразия V как фактор-алгебру $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} \tau / \left(\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$, можно определить частичную многосортную алгебру

$$\operatorname{Hclone}_{\mathrm{lin}} V := \operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} \tau / \left(H \operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V\right)_{n\in\mathbb{N}^+},$$

которую назовем *линейным гиперклоном* V.

Обсудим связь между слабыми тождествами в $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} V$ и линейными гипертождествами в V. В силу леммы 4.2 линейное тождество $s \approx t \in \operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V$, $n \in \mathbb{N}^+$, является слабым тождеством в $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} V$ тогда и только тогда, когда для всех $\varphi : \left(\overline{F}^n_\tau\right)_{n\in\mathbb{N}^+} \to \left(W^{\mathrm{lin}}_\tau(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^+} / \left(\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ выполняется следующее: $\overline{\varphi}(s)$ существует, $\overline{\varphi}(t)$ существует и $\overline{\varphi}(s) = \overline{\varphi}(t)$, где $\overline{\varphi} : \operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} \tau \to \operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} V$ — слабый гомоморфизм, продолжающий φ. Используем следующее разложение φ:

$$\varphi = \left(\operatorname{nat}_n \operatorname{Id}^{\mathrm{lin}}_n V\right)_{n\in\mathbb{N}^+} \circ (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \circ \left(\sigma^{-1}_{\mathrm{id}\,n}\right)_{n\in\mathbb{N}^+}.$$

Его продолжение $\overline{\varphi}=\overline{\left(\operatorname{nat}_n \operatorname{Id}_n^{\mathrm{lin}} V\right)}_{n\in\mathbb{N}^+}\circ\widehat{(\sigma_n)}_{n\in\mathbb{N}^+}\circ\widehat{(\sigma_{\mathrm{id}\,n})}^{-1}_{n\in\mathbb{N}^+}$, для краткости $\overline{\varphi}=\operatorname{nat}\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}} V\circ\hat{\sigma}\circ\widehat{(\sigma_{\mathrm{id}}^{-1})}$, устроено следующим образом:

$$\left(W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^+}\overset{\widehat{\sigma_{\mathrm{id}}^{-1}}}{\longrightarrow}\left(W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^+}\overset{\hat{\sigma}}{\longrightarrow}\left(W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$$
$$\overset{\operatorname{nat}\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}} V}{\longrightarrow}\left(W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)/\operatorname{Id}_n^{\mathrm{lin}} V\right)_{n\in\mathbb{N}^+}.$$

Тогда $\overline{\varphi}(s)=\overline{\varphi}(t)$ означает, что

$$\left(\operatorname{nat}\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}} V\circ\hat{\sigma}\circ\widehat{(\sigma_{\mathrm{id}}^{-1})}\right)[s]=\left(\operatorname{nat}\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}} V\circ\hat{\sigma}\circ\widehat{(\sigma_{\mathrm{id}}^{-1})}\right)[t],$$

т. е.

$$\overline{\varphi}(s)=(\operatorname{nat}\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}} V\circ\hat{\sigma})[s]=(\operatorname{nat}\operatorname{Id}^{\mathrm{lin}} V\circ\hat{\sigma})[t]=\overline{\varphi}(t),$$

так как $\widehat{\sigma}_{\mathrm{id}}^{-1}$ — тождественное отображение.

Это дает следующий результат.

Теорема 6.2. *Пусть V — многообразие типа τ, и пусть $s\approx t\in\operatorname{Id}_n^{\mathrm{lin}} V$ при $n\geq 1$. Тогда $s\approx t$ есть слабое тождество в $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} V$ тогда и только тогда, когда оно является линейным гипертождеством в V.*

Доказательство. Пусть $s\approx t$ — слабое тождество в $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} V$. Тогда для всех подстановок

$$\varphi:\left(\overline{F}_\tau^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\to\left(W_\tau^{\mathrm{lin}}(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}/\left(\operatorname{Id}_n^{\mathrm{lin}} V\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

имеем $\overline{\varphi}(s)=\overline{\varphi}(t)$. Теорема 5.2 дает биекцию между подстановками линейного клона и линейными гиперподстановками, и $\overline{\varphi}(s)=\overline{\varphi}(t)$ означает, что

$$\operatorname{nat}_n\operatorname{Id}_n^{\mathrm{lin}} V(\hat{\sigma}_n[s])=\operatorname{nat}_n\operatorname{Id}_n^{\mathrm{lin}} V(\hat{\sigma}_n[t])$$

и тем самым $\hat{\sigma}_n[s]\approx\hat{\sigma}_n[t]\in\operatorname{Id}_n^{\mathrm{lin}} V$ для всех $\sigma\in\left(\operatorname{Hyp}_n^{\mathrm{lin}}(\tau)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Обратное тоже верно. $\square$

7. Заключительные замечания

Хотя суперпозиция линейных термов дает, вообще говоря, нелинейный терм и линейные тождества в многообразии не образуют эквациональную теорию, вводя частичные операции суперпозиции $\overline{S}_m^n$ и частичные клоны $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}}\tau$ и $\operatorname{clone}_{\mathrm{lin}} V$ и используя понятия частичных многосортных алгебр, получаем результаты, подобные ситуации обычных клонов.

1. Подстановки линейных клонов, т. е. подстановки частичного клона линейных членов, соответствуют линейным гиперподстановкам.

2. Слабые тождества частичных клонов линейных членов соответствуют линейным гипертождествам в многообразии V тотальных односортных алгебр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lawvere F. W.* Functorial semantics of algebraic theories: Diss. New York, Columbia Univ., 1963.
2. *Börner F.* Clones of partial functions // (K. Denecke, O. Lüders, eds.) Conf. Gen. Alg. Appl. Discr. Math. (Potsdam, 1996). Berichte aus der Mathematik. Aachen: Shaker-Verl., 1997. P. 35–52.
3. *Hoehnke H.-J., Schreckenberger J.* Partial algebras and their theories. Aachen: Shaker-Verl., 2007.

4. *Taylor W.* Abstract clone theory // Algebras and order. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1993. P. 507–530.

5. *Denecke K., Wismath S. L.* Hyperidentities and clones. New York; Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 2000.

6. *Graczynska E., Schweigert D.* Hypervarieties of a given type // Alg. Univ. 1990. V. 27. P. 305–318.

7. *Мовсисян Ю. М.* Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Ереван: Ереван. ун-т, 1986.

8. *Movsisjan Yu. M.* Hyperidentities and hypervarieties in algebras (Russian). Yerewan: Univ. Yerewan, 1990.

9. *Neumann W.* Representing varieties of algebras by algebras // J. Austral. Math. Soc. 1970. V. 11. P. 1–8.

10. *Denecke K., Jampachon P., Wismath S. L.* Clones of n-ary algebras // J. Appl. Alg. Discr. Struct. 2003. V. 1, N 2. P. 141–158.

11. *Denecke K., Jampachon P.* Clones of full terms // Alg. Discr. Math. 2004. V. 4. P. 1–11.

12. *Denecke K.* Terms, trees and languages // Lect. notes 8th workshop of young algebraists of Thailand. KhonKaen: KhonKaen Univ., Department of Math., 2013. P. 1–258.

13. *Couceiro M., Lehtonen E.* Galois theory for sets of operations closed under permutation, cylindrification and composition // Alg. Univ. 2012. V. 67. P. 273–297.

14. *Мальцев И. А.* Гипертождества квазилинейных клонов на трехэлементном множестве // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 350–363.

15. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры Поста и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 2. С. 5–24.

16. *Burmeister P.* A model theoretic oriented approach to partial algebras. Berlin: Akad.-Verl., 1986.

17. *Changphas Th., Denecke K., Pibaljommee B.* Linear terms and linear hypersubstitutions // Seams Bull. Math. 2016. V. 40.

Статья поступила 13 марта 2015 г.

Klaus Denecke (Денеке Клаус)
University of Potsdam,
Am Neuen Palais, 10,
Institute für Mathematic, Potsdam 14469, Germany;
KhonKaen University, Department of Mathematics
40002 KhonKaen, Thailand
klausdenecke@hotmail.com