Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 517.518.234+517.548.3

НЕКОТОРЫЕ ПАТОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

С. Б. Климентов

Аннотация. Построены пример ограниченного решения равномерно эллиптического уравнения Бельтрами, почти всюду на границе единичного круга, не имеющего некасательных предельных значений, а также пример решения такого уравнения, не равного тождественно нулю, почти всюду на границе единичного круга, имеющего нулевые некасательные предельные значения. Эти примеры показывают, что в общем случае для классов Харди решений равномерно эллиптического уравнения Бельтрами (и более общих неканонических эллиптических систем первого порядка) обычная постановка краевых задач, используемая для голоморфных и обобщенных аналитических функций, некорректна.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.511

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, классы Харди.

§ 1. Введение

Обозначим через $D_z = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости E_z, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, $\Gamma_z = \partial D_z$ — граница круга D_z, $\overline{D}_z = D_z \cup \Gamma_z$. Далее, если невозможны недоразумения, то индекс z у D, Γ, E будем опускать. В круге D рассмотрим измеримую комплексную функцию $q(z)$. Всюду далее предполагаем, что

$$|q(z)| \le q_0 = \text{const} < 1, \quad z \in \overline{D}. \tag{1}$$

Рассмотрим в $\overline{D}$ эллиптическую систему Бельтрами в комплексной записи [1, гл. 2, § 2]

$$\partial_{\bar z} w - q(z)\partial_z w = 0, \tag{2}$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $\partial_{\bar z} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$, $\partial_z = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$ — производные в смысле Соболева.

В статье используются следующие функциональные пространства со стандартными нормами в них: $L_p(\overline{D})$ — пространство суммируемых с показателем $p \ge 1$ в $\overline{D}$ функций; $W_p^k(\overline{D})$, $k = 0, 1, \dots$, $p \ge 1$, — класс функций, имеющих в $\overline{D}$ обобщенные в смысле Соболева производные до k-го порядка, суммируемые с показателем p, $W_p^0(\overline{D}) \equiv L_p(\overline{D})$; $C_\alpha^k(\overline{D})$, $k = 0, 1, \dots$, $0 < \alpha < 1$, — пространство функций, имеющих непрерывные в $\overline{D}$ частные производные до порядка k, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α, $C_\alpha^0(\overline{D}) \equiv C_\alpha(\overline{D})$, $L_p(\Gamma)$ определяется аналогично, только для функций, определенных на Γ. Подробные определения этих пространств и норм в них можно найти в [1].

Определение 1. Аналогично [2, 3] будем говорить, что решение системы (2) *принадлежит классу* $H_p(q)$, $p > 0$, если оно для некоторой положительной

© 2016 Климентов С. Б.

постоянной $M_p(w) < +\infty$ удовлетворяет условию

$$\mu(\rho, w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\sigma})|^p \, d\sigma \le M_p(w), \quad 0 \le \rho < 1, \ \rho e^{i\sigma} = z \in D. \tag{3}$$

Множество ограниченных в $\overline{D}$ решений системы (2) будем обозначать через $H_\infty(q)$.

При $q(z) \equiv 0$ имеем классический класс Харди H_p [4, гл. 9, § 4].

Классы Харди и их обобщения (классы Смирнова) голоморфных функций оказались естественными пространствами, в которых ищутся решения краевых задач типа Римана и Гильберта с разрывными коэффициентами и суммируемыми свободными членами краевого условия (см. [5], а также библиографию в ней). В связи с этим понятен интерес к распространению теории классов Харди на решения эллиптических систем первого порядка, обобщающих систему Коши — Римана. Классы Харди и Смирнова (обобщенных аналитических функций) для решений канонической эллиптической системы

$$\partial_{\bar z} w + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0, \quad A(z), B(z) \in L_p(\overline{D}), \ p > 2,$$

были введены К. М. Мусаевым в [6]. В дальнейшем им изучались различные свойства этих классов, краевые задачи не рассматривались, за исключением «задачи о скачке». Автором эти исследования были продолжены и подытожены в [7] (там же см. более подробную библиографию). Почти все свойства классических классов Харди и Смирнова в той или иной форме переносятся на обобщенные аналитические функции, включая теорему двойственности. Не переносится только монотонность по r интеграла из (3) (есть соответствующие контрпримеры).

Для общей эллиптической системы

$$\partial_{\bar z} w - q_1(z)\partial_z w - q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{w} + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0,$$

где

$$|q_1(z)| + |q_2(z)| \le q_0 = \text{const} < 1,$$

при $q_1(z), q_2(z) \in W_p^1(\overline{D})$, $A(z), B(z) \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$, приведением к каноническому виду все сводится к обобщенным аналитическим функциям, что использовано в [8] при изучении классов Харди решений сопряженного уравнения Бельтрами

$$\partial_{\bar z} w - q(z)\overline{\partial_z w} = 0, \quad |q(z)| \le q_0 = \text{const} < 1,$$

в предположении, что $q(z) \in W_\infty^1(\overline{D})$.

Если же коэффициенты $q_1(z)$, $q_2(z)$ не дифференцируемы (хотя бы в обобщенном смысле), то кое-какие результаты получены только для уравнения Бельтрами (2) (см. [2; 7, гл. 6]). Эти результаты основаны на представлении решений уравнения (2) с помощью так называемого «основного гомеоморфизма» уравнения (2). Поскольку это понятие потребуется далее, определим его подробно.

Теорема 1 (см. [9]). *Существует единственное решение $w(z)$ уравнения* (2) *класса $W_s^1(\overline{D}_z)$, $s > 2$, гомеоморфно отображающее замкнутый круг $\overline{D}_z = \{z : |z| \le 1\}$ на замкнутый круг $\overline{D}_w = \{w : |w| \le 1\}$ и удовлетворяющее нормировке*

$w(0) = 0$, $w(1) = 1$. *При этом обратное отображение* $z = z(w)$ *принадлежит* $W^1_s(\overline{D}_w)$.

Этот гомеоморфизм $w = w(z)$ будем называть *основным гомеоморфизмом* уравнения (2).

Замечание 1. Фигурирующее в формулировке теоремы 1 число $s > 2$, вообще говоря, достаточно близко к двум: $2 < s < 2 + \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon(q_0) > 0$ (см. [3, пример 3]).

Известно [1, гл. 2, § 4], что любое решение $w(z)$ уравнения (2) в D может быть представлено в виде

$$w(z) = \Phi(\zeta(z)), \tag{4}$$

где $\zeta(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (2), а $\Phi(\zeta)$ — голоморфная в круге $|\zeta| < 1$ функция.

Если $q(z) \in C^k_\alpha(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, то основной гомеоморфизм уравнения (2) $\zeta(z)$ принадлежит $C^{k+1}_\alpha(\overline{D})$ [3] и из (4) следует, что $w(z) \in H_p(q)$ тогда и только тогда, когда в (4) $\Phi(\zeta) \in H_p$. В связи с этим граничное поведение решений класса $H_p(q)$, $0 < p \leq \infty$, в основном аналогично свойствам классических классов Харди H_p. В частности, в этом случае решение $w(z) \in H_\infty(q)$ почти всюду на Γ имеет конечные некасательные предельные значения[1)] (аналог теоремы Фату [10, гл. 1, § 5]), а если $w(z) \in H_\infty(q)$ имеет на Γ нулевые некасательные предельные значения на множестве положительной меры, то $w(z) \equiv 0$ (аналог частного случая теоремы Лузина — Привалова [10, гл. 4, § 2]).

Если $q(z)$ — общая измеримая функция, удовлетворяющая (1), то к свойствам основного гомеоморфизма, описанным в теореме 1, добавить нечего, но для непрерывных в $\overline{D}$ решений уравнения (2) сохраняются формула (4) и топологическая эквивалентность голоморфным функциям. Вместе с тем для разрывных вблизи границы решений сходство с граничным поведением голоморфных функций, вообще говоря, пропадает.

Цель настоящей работы — построение примеров, демонстрирующих, что в случае общего измеримого коэффициента $q(z)$ граничное поведение решений классов $H_p(q)$ уравнения (2) может сильно отличаться от граничного поведения голоморфных функций классов H_p, а именно в этом случае могут существовать решение $w(z) \in H_\infty(q)$, почти всюду на Γ не имеющее некасательных предельных значений, а также не равное тождественно нулю решение $w(z) \in H_\infty(q)$, почти всюду на Γ имеющее нулевые некасательные предельные значения.

Эти примеры показывают, что в общем случае для классов Харди решений равномерно эллиптического уравнения Бельтрами (и более общих неканонических эллиптических систем первого порядка) обычная постановка краевых задач, используемая для голоморфных и обобщенных аналитических функций [5, 7], некорректна.

Наши построения опираются на вытекающий из [11] факт, что при квазиконформном гомеоморфизме единичного круга на себя (что эквивалентно рассмотрению основного гомеоморфизма уравнения (2) при общем измеримом коэффициенте $q(z)$ [12, гл. 2, разд. B]) множество граничной окружности нулевой линейной меры может переходить в множество полной линейной меры (и наоборот).

Напомним, что *комплексной характеристикой квазиконформного отображения* $w = w(z)$ называют величину $q(z) = \frac{\partial_{\bar z} w}{\partial_z w}$ (см., например, [13, гл. 1, § 1]).

[1)] Точное их определение см. ниже.

Основываясь на [11], сформулировать условия на коэффициент $q(z)$, при котором возможно появление таких патологических решений уравнения (2), можно так: если коэффициент $q(z)$ есть комплексная характеристика квазиконформного гомеоморфизма единичного круга на себя, граничные значения которого есть непрерывная вполне сингулярная функция (функция, почти всюду имеющая производную, равную нулю), то обязательно имеются такие решения. Конечно, это не конструктивное условие.

Проще сформулировать условия на $q(z)$, когда таких решений нет. Например, как уже было упомянуто, их нет, если $q(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$. Легко видеть, что таких решений нет, если ограниченный измеримый коэффициент $q(z)$ тождественно равен 0 вблизи Γ.

В порядке уточнения терминологии напомним, что гомеоморфизм уравнения (2) также называют *K-квазиконформным гомеоморфизмом*, $K = \frac{1+q_0}{1-q_0} = \mathrm{const}$, где q_0 — константа из (1) [12, гл. 2, разд. B].

Приведем также некоторые необходимые для точной формулировки результатов определения.

Определение 2. Следуя [4, гл. 9, § 1], будем говорить, что точка $z = re^{i\theta} \in D$ *стремится к точке* $z_0 = e^{i\theta_0} \in \Gamma$ *по некасательному пути*, если z находится в некотором угле с вершиной в z_0, причем этот угол в окрестности z_0 целиком содержится в D.

Если для определенной в D функции $F(z)$ существует предел F_0 последовательности ее значений $\{F(z_n)\}$ для любой последовательности $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset D_z$, сходящейся к $z_0 \in \Gamma_z$ по некасательному пути, то будем говорить, что функция $F(z)$ *имеет в точке* z_0 *некасательный предел* F_0.

Если существует предел

$$\lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta_0}) = F_0,$$

то F_0 будем называть *радиальным пределом* функции $F(z)$ в точке z_0.

Очевидно, что при отсутствии радиального предела не существует некасательного предела.

Если $\zeta = \zeta(z)$ — гомеоморфизм единичного круга $\overline{D}_z$ и единичного круга $\overline{D}_\zeta$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \rho e^{is}$, то он порождает монотонное гомеоморфное отображение сегментов $[0, 2\pi] \ni \theta$ и $[0, 2\pi] \ni s$: $s = s(\theta)$ (отображение длин дуг граничных окружностей $\Gamma_z = \partial D_z$ и $\Gamma_\zeta = \partial D_\zeta$). Это отображение $s = s(\theta)$ будем называть *граничным соответствием* гомеоморфизма $\zeta = \zeta(z)$.

§ 2. Формулировка результатов

Напомним, что коэффициент $q(z)$ уравнения (2) предполагается удовлетворяющим неравенству (1).

Теорема 2. *Если коэффициент $q(z)$ уравнения (2) есть комплексная характеристика квазиконформного гомеоморфизма единичного круга на себя, граничное соответствие которого есть вполне сингулярная функция, то у этого уравнения найдется решение класса $H_\infty(q)$, почти всюду на Γ не имеющее некасательных пределов.*

Замечание 2. Из результатов работы [11] следует, что квазиконформные гомеоморфизмы с вполне сингулярным граничным соответствием существуют (см. доказательство теоремы 2).

Теорема 3. *Если коэффициент $q(z)$ уравнения (2) есть комплексная характеристика квазиконформного гомеоморфизма единичного круга на себя, граничное соответствие которого есть вполне сингулярная функция, то это уравнение обладает ненулевым решением класса $H_\infty(q)$, имеющим нулевые некасательные предельные значения на множестве $l \subset \Gamma$, $\operatorname{mes} l = 2\pi$.*

При доказательстве теорем 2, 3 используются следующие вспомогательные результаты, представляющие определенный самостоятельный интерес.

Теорема 4. *Если $w = w(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (2) и последовательность $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset D_z$ сходится к $z_0 \in \Gamma_z$ по некасательному пути, то последовательность $\{w_n = w(z_n)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $w_0 = w(z_0) \in \Gamma_w$ также по некасательному пути.*

Замечание 3. Если $w = w(z)$ — C^1-диффеоморфизм, утверждение теоремы 4 тривиально.

Теорема 5. *Если множество $G \subset \Gamma$ имеет нулевую линейную меру, то существует голоморфная функция $\Phi(z) \in H_\infty$, не имеющая радиальных пределов в точках множества G.*

§ 3. Доказательства

3.1. Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы 4 опирается на результаты из [14]. Для их использования воспроизведем некоторые определения и формулировки из [14].

Будем говорить, что две дуги γ_1 и $\gamma_2 \subset E$ *образуют топологический угол в точке* z_0, если z_0 — общий конец дуг γ_1 и γ_2 и z_0 — их единственная общая точка. Определим *внутреннюю меру* $A(\gamma_1, \gamma_2)$ этого топологического угла следующим образом:

$$A(\gamma_1, \gamma_2) = \liminf_{z_1, z_2 \to z_0} 2 \arcsin\left(\frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_0| + |z_2 - z_0|}\right), \quad z_j \in \gamma_j, \ j = 1, 2.$$

Отметим следующие свойства $A(\gamma_1, \gamma_2)$.

1. $0 \le A(\gamma_1, \gamma_2) \le \pi$ и $A(\gamma_1, \gamma_2)$ не зависит от поведения γ_1 и γ_2 вне малой окрестности точки z_0.

2. Пусть $z_j \in \gamma_j$, $j = 1, 2$, $z_1, z_2 \ne z_0$ и $\theta = \theta(z_1, z_0, z_2)$ — радианная мера угла в точке z_0 треугольника с вершинами z_0, z_1, z_2. Если γ_1 и γ_2 имеют в точке z_0 (односторонние) касательные, то

$$A(\gamma_1, \gamma_2) = \liminf_{z_1, z_2 \to z_0} \theta = \theta(z_1, z_0, z_2).$$

3. Гомеоморфизм f области G является K-квазиконформным, $1 \le K < \infty$, тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:

(i) для любой точки z_0 из G и для всех отрезков γ_1 и γ_2, образующих угол в G с вершиной в точке z_0,

$$A(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) > 0; \tag{5}$$

(ii) для почти всех z_0 из G и для всех отрезков γ_1 и γ_2, которые образуют угол в G с вершиной в точке z_0,

$$A(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \ge \frac{1}{K} A(\gamma_1, \gamma_2)$$

[14, теорема 4].

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 4. Основной гомеоморфизм $w = w(z)$, $z = x + iy$, $w = u + iv$, можем считать продолженным до K-квазиконформного гомеоморфизма всей плоскости E (см. доказательство теоремы 1 в [3]), так что можно применять результаты из [14] к топологическим углам с вершинами на Γ.

Без ограничения общности можем рассмотреть только точку $z = 1 \in \Gamma_z$ и ее образ $w = 1 \in \Gamma_w$.

Обозначим через γ_1 достаточно малый отрезок прямой с уравнением $y = -k(x-1)$, $k > 0$, лежащий в круге $D_z = \{z : |z| < 1\}$ и имеющий точку $z = 1$ своим концом. Через γ_2 обозначим достаточно малую дугу окружности $\gamma_z = \{z : |z| = 1\}$, лежащую в первой четверти $x > 0$, $y > 0$ плоскости E_z, имеющую точку $z = 1$ своим концом и образующую топологический угол с отрезком γ_1. Образ этого топологического угла при отображении $w = w(z)$ — топологический угол в круге $D_w = \{z : |w| < 1\}$, образованный дугой окружности $w(\gamma_2) \subset \Gamma_w$, имеющей своим концом точку $w = 1$, и дугой $w(\gamma_1)$, также имеющей своим концом точку $w = 1$.

Существует $\varkappa > 0$ такое, что криволинейный треугольник в D_w с вершиной в точке $w = 1$, ограниченный дугой окружности $w(\gamma_2)$, отрезком прямой с уравнением $v = -\varkappa(u-1)$ и достаточно малой окружностью с уравнением $|w-1| = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, не содержит внутри себя точек из $w(\gamma_1)$. Действительно, в противном случае имели бы $A(w(\gamma_1), w(\gamma_2)) = 0$, что противоречит (5).

Тем самым образ пересечения достаточной малой окрестности точки $z = 1$ $|z-1| < \delta$, $\delta > 0$, с D_z и с углом, ограниченным прямыми $y = \pm k(z-1)$, содержится в пересечении достаточно малой окрестности точки $w = 1$ $|w-1| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, с D_w и с углом, ограниченным прямыми $v = \pm\varkappa(u-1)$.

Теорема 4 доказана.

Замечание 4. В (i) речь идет о прямолинейных отрезках γ_1 и γ_2. В нашем случае γ_2 — отрезок окружности. Но конформным отображением всей плоскости, переводящим точку пересечения прямой $y = -k(x-1)$ и окружности Γ_z, отличную от $z = 1$, в бесконечность, ситуация сводится к пересечению прямолинейных отрезков, поскольку суперпозиция K-квазиконформного отображения и конформного является K-квазиконформным отображением [12, гл. 2, разд. B].

3.2. Доказательство теоремы 5. Здесь и далее мы точку на единичной окружности отождествляем с длиной соответствующей дуги $s \in [0, 2\pi)$, отсчитываемой от точки $z = 1$ в положительном направлении. В связи с этим соответствующие множества, расположенные на Γ и отрезке $[0, 2\pi]$, будем обозначать одинаковыми буквами.

Пусть G — произвольное множество меры нуль на отрезке $[0, 2\pi]$. Существует положительная в D гармоническая функция $u(z) \geq 1$, имеющая в точках множества G бесконечные радиальные пределы

$$\lim_{r \to 1-0} u(re^{is}) = +\infty, \quad s \in G, \tag{6}$$

а почти всюду на $[0, 2\pi] \setminus G$ — конечные радиальные пределы $u(e^{is}) \in L_1(\Gamma)$ (см. [10, гл. 4, § 3]). Добавляя к $u(z)$ положительную константу, можно считать, что

$$u(z) \geq \mathrm{const} > 1. \tag{7}$$

Обозначим через $v(z)$ гармоническую функцию, сопряженную к функции $u(z)$, и рассмотрим голоморфную в D функцию $\Lambda(z) = u(z) + iv(z)$. В силу (7) $|\Lambda(z)| \geq \mathrm{const} > 1$, $z \in D$, $\arg \Lambda(z)$ ограничен в D, а ввиду (6)

$$\lim_{r \to 1-0} |\Lambda(re^{is})| = +\infty, \quad s \in G.$$

В связи с этим голоморфная в D функция $\Psi(z) = \ln \Lambda(z)$ однозначна и

$$\lim_{r \to 1-0} \operatorname{Re} \Psi(re^{is}) = +\infty, \quad s \in G.$$

Очевидно, что голоморфная в D функция $\Phi(z) = e^{i\Psi(z)}$ удовлетворяет условиям теоремы. Теорема 5 доказана.

3.3. Доказательство теоремы 2.

Лемма 1. *Существует K-квазиконформный гомеоморфизм $\zeta(z)$ единичного круга $\overline{D}_z$ на единичный круг $\overline{D}_\zeta$, $\zeta(1) = 1$, $\zeta(0) = 0$, с вполне сингулярным граничным соответствием.*

Доказательство леммы 1. В [11, п. 7] установлено, что существует квазиконформное отображение верхней полуплоскости на себя такое, что граничная ось абсцисс x отображается на граничную вещественную ось посредством вполне сингулярной функции $\mu(x)$ (монотонно возрастающей непрерывной функцией с равной почти всюду нулю производной). Так как суперпозиция K-квазиконформного отображения и конформного есть K-квазиконформное отображение [12, гл. 2, разд. B], аналогичное отображение единичных кругов получается посредством конформного отображения верхней полуплоскости на единичный круг. Лемма 1 доказана.

Пусть $\zeta = \zeta(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (2) с вполне сингулярным граничным соответствием $s = s(\theta)$ (коэффициент $q(z)$ является его комплексной характеристикой). Покажем, что функция $s = s(\theta)$ множество $l \subset \Gamma_z$ с $\operatorname{mes} l = 2\pi$, на котором $s'(\theta) = 0$, отображает в множество $G = \zeta(l) \subset \Gamma_\zeta$ нулевой меры.

Поскольку функция $s = s(\theta)$ монотонно возрастает, определен интеграл Лебега — Стилтьеса $\int_0^\theta ds(\nu) = s(\theta)$, где $ds(\nu)$ — элемент *сингулярной* меры Лебега — Стилтьеса $s(B)$, $B \subset [0, 2\pi]$, сосредоточенной в точках множества нулевой лебеговой меры $[0, 2\pi] \setminus l$ (см. [15, гл. 6, § 6]). При этом

$$2\pi = \operatorname{mes} s([0, 2\pi]) = \int_0^{2\pi} ds(\nu) = \int_l ds(\nu) + \int_{[0,2\pi]\setminus l} ds(\nu) \\ = \operatorname{mes} \zeta(l) + \operatorname{mes} \zeta([0, 2\pi] \setminus l).$$

Но так как мера $s(B)$ сосредоточена в точках множества $[0, 2\pi] \setminus l$, то

$$\operatorname{mes} G = \int_l ds(\nu) = 0.$$

Как упоминалось выше (см. (4)), любое решение $w(z)$ уравнения (2) в D может быть представлено в виде

$$w(z) = \Phi(\zeta(z)),$$

где $\zeta(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (2), а $\Phi(\zeta)$ — голоморфная в круге $|\zeta| < 1$ функция.

Если в этом представлении в качестве $\Phi(\zeta)$ возьмем функцию, построенную в доказательстве теоремы 5 для множества $\zeta(l) = G \subset \Gamma_\zeta$, то в силу теоремы 4 функция $w(z)$ не имеет некасательных пределов в точках множества l. Теорема 2 доказана.

3.4. Доказательство теоремы 3. В [10, гл. 4, § 3] показано, что существует функция $\Phi(\zeta) \in H_\infty$, $\Phi(\zeta) \not\equiv 0$, имеющая в точках множества G, упоминаемого в доказательстве теоремы 2, нулевые некасательные предельные значения. Если, как и в доказательстве теоремы 2, $\zeta = \zeta(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (2) с вполне сингулярным граничным соответствием, то $w(z) = \Phi(\zeta(z)) \in H_\infty(q)$, $w(z) \not\equiv 0$, и в силу теоремы 4 $w(z)$ имеет в точках множества l нулевые некасательные предельные значения. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Каляниченко С. И., Климентов С. Б.* Классы Харди решений уравнения Бельтрами // Изв. вузов. Северо-Кавк. регион. Естеств. науки. 2008. № 1. С. 7–10.
3. *Климентов С. Б.* Представления «второго рода» для классов Харди решений уравнения Бельтрами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 324–340.
4. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
5. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975.
6. *Мусаев К. М.* Некоторые классы обобщенных аналитических функций // Изв. Акад. наук Азерб. ССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук. 1971. № 2. С. 40–46.
7. *Климентов С. Б.* Граничные свойства обобщенных аналитических функций. Владикавказ, 2014. (Итоги науки. Юг России. Сер. Математическая монография; Вып. 7).
8. *Baratchart L., Leblond J., Rigat S., Russ E.* Hardy spaces of the conjugate Beltrami equation // J. Func. Anal. 2010. V. 259, N 2. P. 384–427.
9. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. 1957. Т. 43, № 4. С. 451–503.
10. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
11. *Beurling A., Ahlfors L.* The boundary correspondence under quasiconformal mappings // Acta Math. 1956. V. 96. P. 125–142.
12. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
13. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.
14. *Agard S. B., Gehring F. W.* Angles and quasiconformal mappings // Proc. London Math. Soc. 1965. V. 14A, N 3. P. 1–21.
15. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 12 октября 2015 г.

Климентов Сергей Борисович
Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8-а, Ростов-на-Дону 344090;
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
sklimentov@pochta.ru