Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 510.64

СТРОЕНИЕ СЛОЕВ НАД МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКОЙ

Л. Л. Максимова

Аннотация. В [1] введена классификация расширений минимальной логики J Йохансона с помощью слоев, доказана разрешимость классификации. В этой статье найдены достаточно простые необходимые условия максимальности логик в слоях, сформулированные в терминах шкал. Это дает возможность описания эффективной процедуры вычисления номера слоя любой конечно аксиоматизируемой логики над J. В явном виде выписаны максимальные логики верхних слоев.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.513

Ключевые слова: минимальная логика, шкала Крипке, разрешимость, слои.

Введение

Статья посвящена исследованию логик, содержащих минимальную логику J Йохансона. В [1] мы ввели классификацию расширений минимальной логики [2], продолжающую широко известную классификацию суперинтуиционистских логик, предложенную Хосои [3].

В [1] доказано, что номер слоя любой конечно аксиоматизируемой логики над J эффективно вычислим. Однако слои над J имеют существенно более сложную структуру, чем слои Хосои, где каждый слой содержит наименьшую и наибольшую логики. Доказано, что бесконечный слой имеет две максимальных логики, а именно линейные логики LC и NC. Поэтому несложно отличить бесконечнослойные логики от конечнослойных. Сложнее обстоит дело с определением номеров конечных слоев, и в [1] была доказана лишь теоретическая возможность вычисления номера слоя. Для нахождения номера конечного слоя требуется описание максимальных логик в конечных слоях. В [1] доказано, что каждый слой имеет конечное число максимальных логик, причем максимальные логики конечных слоев табличны. Доказательство использовало алгебраические методы и не давало явных конструкций.

Алгебраическая семантика логики J строится с помощью алгебр Йохансона [4, 5]. В [1] была построена теория дуальности для алгебр Йохансона, аналогичная теории дуальности для гейтинговых алгебр из [6].

В § 4 этой статьи мы найдем некоторые необходимые условия максимальности логик в конечных слоях в терминах шкал Крипке. В § 5 получим наглядные критерии принадлежности логики тому или иному слою и методы вычисления номера слоя конечно аксиоматизируемой логики. В заключительном § 6 в явном виде опишем максимальные логики верхних слоев с номерами 1–3.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–860.2014.1).

© 2016 Максимова Л. Л.

1. Классификация J-логик

Язык логики J содержит в качестве исходных связок $\&$, $\vee$, $\to$, $\bot$, $\top$; отрицание определяется как сокращение: $\neg A = A \to \bot$; $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$. Формула называется *позитивной*, если она не содержит вхождений константы $\bot$. Логика J может быть задана исчислением, которое имеет те же самые схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление Int^+, и единственное правило вывода modus ponens: $A, A \to B/B$.

Под J-*логикой* мы понимаем любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно modus ponens и правила подстановки. Если A — произвольная формула, то через $(L + A)$ обозначаем наименьшую логику, содержащую $L \cup \{A\}$. Будем использовать обозначения

$$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + (\bot \to p), \quad \mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \bot, \quad \mathrm{For} = \mathrm{J} + p,$$

$$\mathrm{LC} = \mathrm{Int} + ((p \to q) \vee (q \to p)), \quad \mathrm{NC} = \mathrm{Neg} + ((p \to q) \vee (q \to p)).$$

Логика называется *нетривиальной*, если она не совпадает с множеством всех формул For. *Суперинтуиционистской логикой* (*с.и.л.*) называется J-логика, содержащая интуиционистскую логику Int, а *негативной* — J-логика, содержащая логику Neg. Для любой J-логики L обозначаем через $E(L)$ семейство всех J-логик, содержащих L.

Конечно аксиоматизируемая логика $L_1 \supseteq L_0$ *узнаваема над* L_0, если существует алгоритм, который по любой формуле A узнает, верно ли равенство $(L_0 + A) = L_1$. Например, логики Int, Neg и For узнаваемы над J [7].

Семейство J-логик разбивается на слои [1]. Определим формулы

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n).$$

Будем говорить, что L есть логика $(n+1)$-*го слоя*, $n \geq 0$, если $L \vdash \pi_{n+1}$ и $L \nvdash \pi_n$; For — это единственная логика нулевого слоя. L — логика *конечного слоя*, если $L \vdash \pi_n$ для некоторого n, и логика *бесконечного слоя* в противном случае.

Очевидно, что $\mathrm{J} \vdash \pi_n \to \pi_{n+1}$. Напротив, формула π_n невыводима в $\mathrm{J}\pi_{n+1} = (\mathrm{J} + \pi_{n+1})$. Поэтому все слои непусты и попарно не пересекаются.

Ясно, что $\mathrm{J}\pi_n = (\mathrm{J} + \pi_n)$ есть наименьшая логика n-го слоя, J — наименьшая логика бесконечного слоя. Кроме того, объединение цепи логик некоторого слоя принадлежит тому же слою. По лемме Цорна получаем

Предложение 1.1. *Любая J-логика содержится в максимальной логике того же слоя.*

Каждый слой в семействе суперинтуиционистских логик имеет наибольший элемент. Напротив, все ненулевые слои над J имеют как минимум две максимальные логики. В [1] установлено, что бесконечный слой имеет две максимальные логики LC и NC; число максимальных логик в каждом конечном слое конечно, и все они табличны. Показано, что минимальные и максимальные логики всех слоев узнаваемы над J. Кроме того, доказано существование алгоритма, вычисляющего номер слоя любой конечно аксиоматизируемой J-логики.

Для нахождения более или менее обозримых алгоритмов, пригодных для описания максимальных логик в слоях и вычисления номера слоя, используем реляционную семантику.

2. Реляционная семантика

В [8] была доказана теорема о полноте логики J и некоторых ее расширений относительно семантики типа Крипке. В [9] была предложена модификация этой семантики, удобная для наших целей.

Подмножество X частично упорядоченного множества W называем *конусом*, если оно удовлетворяет условию

$$x \in X, \quad x \leq y \Rightarrow y \in X.$$

Под J-*шкалой* (или просто *шкалой*) понимаем тройку $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$, где W — непустое множество, частично упорядоченное отношением $\leq$ и имеющее наибольший элемент ∞, Q — конус множества W, содержащий ∞.

Элементы, отличные от ∞, называем *существенными*, элементы из $(W - Q)$ — *нормальными*, а из Q — *ненормальными.* Элемент y называем *последователем* элемента x, если $y > x$; минимальные последователи элемента x называем *покрытиями* элемента x.

Шкала называется *главной*, если она конечна и имеет наименьший элемент.

Шкалу $(W_1, \leq_1, Q_1)$ будем называть *конусом шкалы* $(W, \leq, Q)$, если W_1 — конус множества W, $\leq_1 = \leq \cap W_1^2$ и $Q_1 = Q \cap W_1$.

Моделью называется четверка $M = (W, \leq, Q, \models)$, где $(W, \leq, Q)$ — шкала, $\models$ — отношение между элементами множества W и формулами, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $x \models p$, $x \leq y \Rightarrow y \models p$ для любой переменной p;
(2) $\infty \models p$ для любой переменной p;
(3) $x \models \bot \iff x \in Q$;
(4) $x \models (A \& B) \iff (x \models A$ и $x \models B)$;
(5) $x \models (A \vee B) \iff (x \models A$ или $x \models B)$;
(6) $x \models (A \to B) \iff (\forall y)(x \leq y \Rightarrow (y \models A \Rightarrow y \models B))$.

Лемма 2.1. *Для любой модели M верно*
(1) *$\infty \models A$ для любой формулы A;*
(2) *$x \models A$, $x \leq y \Rightarrow y \models A$ для любой формулы A.*

Доказательство проводится индукцией по длине формулы.

Формула A называется *истинной*, или *общезначимой, в модели M*, если $x \models A$ для любого $x \in M$. В этом случае пишем $M \models A$.

Говорим, что формула A *общезначима в шкале* $\mathbf{W}$ (и пишем $\mathbf{W} \models A$), если $M \models A$ для любой модели M, основанной на $\mathbf{W}$.

Заметим, что модифицированные модели отличаются от моделей Сегерберга [8] лишь добавлением элемента ∞. Это усложнение позволяет нам определить понятие p-морфизма и установить соответствие между p-морфизмами и подалгебрами J-алгебр, аналогичное соответствию для гейтинговых алгебр [6, 10].

Даны шкалы $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_0$. Отображение θ из W_1 на W_0 называется *p-морфизмом шкал*, если удовлетворяет следующим условиям:

(p1) $x, y \in W_1$, $x \leq_1 y \Rightarrow \theta(x) \leq_0 \theta(y)$;
(p2) $x \in W_1$, $y \in W_0$, $\theta(x) \leq_0 y \Rightarrow (\exists z \in W_1)(x \leq_1 z \wedge \theta(z) = y)$;
(p3) $x \in Q_1 \iff \theta(x) \in Q_2$.

Говорим, что шкала $\mathbf{W}$ *удовлетворяет логике* L, и пишем $\mathbf{W} \models L$, если все формулы из L общезначимы в $\mathbf{W}$. Далее, L есть логика шкалы $\mathbf{W}$, если L есть множество формул, общезначимых в $\mathbf{W}$; эту логику обозначаем через $L(\mathbf{W})$.

Для главных шкал $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ пишем $\mathbf{W}_1 \preceq \mathbf{W}_2$, если существует p-морфизм из некоторого конуса шкалы $\mathbf{W}_2$ на шкалу $\mathbf{W}_1$.

Следующая лемма — это переписанное на языке шкал следствие известной теоремы Йонсона о конгруэнц-дистрибутивных многообразиях [11].

Лемма 2.2. *Для любых главных шкал* $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$
(1) $\mathbf{W}_1 \preceq \mathbf{W}_2 \iff L(\mathbf{W}_2) \subseteq L(\mathbf{W}_1)$;
(2) $L(\mathbf{W}_1) = L(\mathbf{W}_2) \iff \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ *изоморфны.*

3. Характеризация слоев

Напомним, что L — логика конечного слоя, если $L \vdash \pi_n$ для некоторого n, где

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n).$$

Для данной шкалы $\mathbf{W}$ обозначаем через $h(\mathbf{W})$ супремум длин конечных цепей в множестве $W - \{\infty\}$. Линейно упорядоченные шкалы высоты n обозначаем через $\mathbf{Z}_n^k$, $k \leq n$. Здесь $\mathbf{Z}_n^k = (Z_n \cup \{\infty\}, \leq, Q_k)$, $Z_n = \{1, \ldots, n\}$, $1 < \cdots < n < \infty$, $Q_k = \{(k+1), \ldots, n, \infty\}$.

Лемма 3.1 [1]. *Для любой шкалы* $\mathbf{W}$ *и* $n < \omega$

$$\mathbf{W} \models \pi_n \iff h(\mathbf{W}) \leq n.$$

Предложение 3.2 [1]. *Все* J*-логики конечных слоев полны относительно подходящих классов конечных шкал.*

Из леммы 3.1 и предложения 3.2 легко получаем

Следствие 3.3. *Любая логика n-го слоя, $n < \omega$, полна относительно подходящего класса главных шкал высоты не более чем n, содержащего шкалу высоты n.*

Следующая теорема показывает, что бесконечный слой имеет точно две максимальные логики.

Теорема 3.4 [1]. L — *логика бесконечного слоя* $\iff L \subseteq \mathrm{LC}$ *или* $L \subseteq \mathrm{NC}$.

Логики LC и NC разрешимы [12, 4]. Теорема 3.4 позволяет для данной конечно аксиоматизируемой логики узнать, является ли она конечнослойной или нет. Проверку можно осуществить, например, с помощью широко известной леммы.

Лемма 3.5. *Пусть A — формула от n переменных. Тогда*
(1) $\mathrm{LC} \vdash A \iff \mathbf{Z}_{n+1}^t \models A$,
(2) $\mathrm{NC} \vdash A \iff \mathbf{Z}_{n+1}^0 \models A$.

Здесь $\mathbf{Z}_n^t = \mathbf{Z}_n^n$.

Теорема 3.4 показывает, что бесконечный слой имеет точно две максимальных логики. Лемма 3.5 позволяет отделить бесконечнослойные логики от конечнослойных.

4. Максимальные логики конечных слоев

Перейдем к описанию максимальных логик конечных слоев.

Лемма 4.1. *Любая максимальная логика n-го слоя характеризуется главной шкалой высоты n.*

Доказательство. Пусть L — максимальная логика n-го слоя. По следствию 3.3 она содержится в логике $L_1 = L(\mathbf{W}_1)$ для некоторой главной шкалы $\mathbf{W}_1$ высоты n. Ясно, что L_1 — снова логика n-го слоя, поэтому $L = L(\mathbf{W}_1)$. □

Установим критерий максимальности конечнослойной логики.

Предложение 4.2. *Для любого натурального n логика главной шкалы $\mathbf{W}$ является максимальной логикой m-го слоя, если и только если $\mathbf{W}$ — шкала высоты n и любой ее p-морфный образ высоты n изоморфен $\mathbf{W}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{W}$ — главная шкала и $L = L(\mathbf{W})$. Если L — максимальная логика n-го слоя, то по лемме 4.1 L есть логика главной шкалы $\mathbf{W}_1$ высоты n. По лемме 2.2 $\mathbf{W}$ изоморфна $\mathbf{W}_1$. Если есть p-морфизм из $\mathbf{W}$ на шкалу $\mathbf{W}_2$ высоты n, то по лемме 2.2 $L \subseteq L(\mathbf{W}_2)$, причем $L(\mathbf{W}_2)$ тоже логика n-го слоя. Поэтому $L = L(\mathbf{W}_2)$ и $\mathbf{W}_2$ изоморфна $\mathbf{W}$.

Обратно, пусть $\mathbf{W}$ — шкала высоты n такая, что любой ее p-морфный образ изоморфен $\mathbf{W}$. Берем максимальную логику L_1 n-го слоя, содержащую L. По лемме 4.1 L_1 — логика главной шкалы $\mathbf{W}_1$ высоты n. По лемме 2.2 $\mathbf{W}_1$ является p-морфным образом некоторого конуса шкалы $\mathbf{W}$. Единственный конус высоты n — это сама шкала $\mathbf{W}$, поэтому $\mathbf{W}_1$ есть p-морфный образ $\mathbf{W}$, а значит, $\mathbf{W}_1$ изоморфна $\mathbf{W}$ и $L_1 = L$. □

Лемма 4.3. *Любая линейно упорядоченная шкала высоты n порождает максимальную логику n-го слоя.*

Доказательство следует из предложения 4.2. □

Таким образом, для любого n логики шкал $\mathbf{Z}_n^k$, $0 \le k \le n$, являются максимальными логиками n-го слоя, т. е. n-й слой содержит по меньшей мере $(n+1)$ максимальных логик. Однако, как увидим ниже, уже в 3-м слое есть максимальные логики, которые не порождаются линейно упорядоченными шкалами. В теореме 4.9 найдем необходимые условия максимальности логик в слоях. Предварительно докажем ряд лемм.

Лемма 4.4. *Пусть в шкале $\mathbf{W} = (W, \le, Q)$ есть конечная цепь длины n, состоящая из нормальных элементов. Тогда существует p-морфизм из $\mathbf{W}$ на $\mathbf{Z}_n^t$.*

Доказательство. Пусть $x_1 < \dots < x_n$ — цепь нормальных элементов в $\mathbf{W}$. Нетрудно проверить, что следующее отображение есть требуемый p-морфизм:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < x_2, \\ k, & \text{если } x \not< x_k,\ x < x_{k+1},\ 1 \le k < n, \\ n, & \text{если } x \not< x_n,\ x \notin Q, \\ \infty, & \text{если } x \in Q. \end{cases} \qquad \square$$

Лемма 4.5 (о продолжении p-морфизма). *Пусть* $\mathbf{X}$ — *конус* J-*шкалы* $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$, θ — p-*морфизм из* $\mathbf{X} = (X, \leq, X \cap Q)$ *на* $\mathbf{Y} = (Y, \leq_{\mathbf{Y}}, Q_{\mathbf{Y}})$, *где* $(W - X) \cap Y = \varnothing$, $W_1 = (W - X) \cup Y$, $Q_1 = (Q - X) \cup Q_{\mathbf{Y}}$, $\mathbf{W}_1 = (W_1, \leq_1, Q_1)$, *где для* $x, y \in W_1$

$$x \leq_1 y \iff [(x, y \in (W - X) \text{ и } x \leq y) \text{ или } (x, y \in Y \text{ и } x \leq_{\mathbf{Y}} y) \\ \text{или } (x \in W \text{ и } \exists v (y = \theta(v) \text{ и } x \leq v))].$$

Тогда $\mathbf{W}_1$ *является* J-*шкалой и следующее отображение* θ_1 *есть* p-*морфизм из* $\mathbf{W}$ *на* $\mathbf{W}_1$:

$$\theta_1(x) = x \text{ при } x \in (W - X), \quad \theta_1(x) = \theta(x) \text{ при } x \in X.$$

Доказательство легко следует из определения p-морфизма. $\square$

Лемма 4.6. *Пусть в шкале* $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$ *есть конечная цепь длины* n, *состоящая из ненормальных существенных элементов. Тогда существует* p-*морфизм из* $\mathbf{W}$ *на* $\mathbf{W}_1 = (W_1, \leq_1, Q_1)$, *где* $W_1 - Q_1 = W - Q$, *а* Q_1 *есть цепь длины* $n + 1$.

Доказательство. Пусть $x_1 < \dots < x_n < \infty$ — цепь ненормальных элементов в $\mathbf{W}$. Пусть $Q_1 = \{b_1, \dots, b_n, \infty\}$, $b_1 < \dots < b_n < \infty$. Положим

$$\theta(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in (W - Q), \\ b_1, & \text{если } x \in Q,\ x < x_2, \\ b_k, & \text{если } x \in Q,\ x \not< x_k,\ x < x_{k+1},\ 1 \leq k < n, \\ b_n, & \text{если } x \in Q,\ x \not< x_n,\ x < \infty, \\ \infty, & \text{если } x = \infty. \end{cases}$$

Тогда $\theta(x_k) = b_k$. Нетрудно проверить, что ограничение отображения θ на конус Q является p-морфизмом на Q_1. По лемме 4.5 θ есть требуемый p-морфизм. $\square$

Лемма 4.7. *Если в шкале есть существенные ненормальные элементы, то существует* p-*морфизм из этой шкалы на шкалу, содержащую не более одного нормального элемента, не имеющего существенных ненормальных последователей.*

Доказательство. Берем конус X, состоящий из всех нормальных элементов, не имеющих существенных ненормальных последователей, и элемента ∞. Тогда отображение θ, где $\theta(x) = b$ при $x \neq \infty$ и $\theta(\infty) = \infty$, является p-морфизмом на шкалу $\mathbf{Y}$ с единственным существенным элементом b, причем этот элемент нормальный. По лемме 4.5 продолжаем θ до требуемого p-морфизма. $\square$

Лемма 4.8. (1) *Если два нормальных элемента имеют одинаковые множества покрытий, то их можно склеить с помощью* p-*морфизма.*

(2) *Если нормальный элемент имеет лишь одно покрытие, причем оно нормально, то его можно склеить с этим покрытием с помощью* p-*морфизма.*

Доказательство. (1) Пусть нормальные элементы x и y имеют одинаковые множества покрытий. Берем конус $\mathbf{X}$, состоящий из x, y и их последователей. По лемме 4.5 продолжаем p-морфизм из $\mathbf{X}$, склеивающий x и y и оставляющий на месте остальные элементы конуса $\mathbf{X}$, до требуемого p-морфизма.

(2) Очевидно. $\square$

Заметим, что в результате склеивания элемента с его покрытием высота шкалы может уменьшиться. В связи с этим введем следующее определение.

Пусть $\mathbf{W}$ — шкала высоты n. Нормальный элемент $x \in \mathbf{W}$ назовем *дублером* нормального элемента y, если y является единственным покрытием элемента x и после склеивания x с y высота шкалы не изменится.

Докажем, что имеет место

Теорема 4.9. *Любая максимальная логика n-го слоя, $n < \omega$, — это логика главной шкалы $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$ высоты n, удовлетворяющей следующим условиям.*

(1) *Если в шкале $\mathbf{W}$ есть цепь длины n, состоящая из нормальных элементов, то шкала линейно упорядочена.*

(2) *Множество Q ненормальных элементов есть цепь.*

(3) *Все цепи длины $n+1$ содержат Q.*

(4) *Если есть существенные ненормальные элементы, то существует не более одного нормального элемента, не имеющего существенных ненормальных последователей.*

(5) *Различные нормальные элементы имеют разные множества покрытий.*

(6) *В шкале нет дублеров.*

Доказательство. Пусть L — максимальная логика n-го слоя. По лемме 4.1 L — логика главной шкалы $\mathbf{W}$ высоты n. По леммам 4.4–4.8 строим p-морфизм из этой шкалы на главную шкалу высоты n, удовлетворяющую условиям (1)–(6). Тогда L совпадает с логикой полученной шкалы.

Если в исходной шкале есть цепь длины n, состоящая из нормальных элементов, то результат сразу получается по лемме 4.4. В противном случае выбираем в $\mathbf{W}$ цепь C длины $n+1$, у которой кусок ненормальных элементов имеет наименьшую длину $k+1$. Применяем лемму 4.6. Берем p-морфизм θ из Q на этот кусок и продолжаем до p-морфизма всей шкалы. В результате получаем шкалу $\mathbf{W}_1$ высоты n, где Q_1 — цепь $b_1 < \dots < b_k < \infty$.

Пусть $u_1 < \dots < u_n < \infty$ — произвольная цепь длины $n+1$ в W_1. Тогда в $\mathbf{W}$ существует цепь $x_1 < \dots < x_n < \infty$ такая, что $u_i = \theta(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Пусть m — число ненормальных элементов в этой цепи. По выбору цепи C имеем $m \geq (k+1)$, а значит, число нормальных элементов $n-m$ не превосходит $n-k$. С другой стороны, $m \leq (k+1)$, поэтому $m = (k+1)$ и $u_{n-k+1} = b_1, \dots, u_n = b_k$. Таким образом, $h(\mathbf{W}_1) = n$, и $\mathbf{W}_1$ удовлетворяет условиям (2), (3).

Если в $\mathbf{W}_1$ существуют нормальные элементы, не предшествующие b_k, то склеиваем их в один элемент по лемме 4.7. Высота шкалы при этом не изменится, так как сохранятся цепи, содержащие Q_1. Получаем шкалу $\mathbf{W}_2$ высоты n, удовлетворяющую условиям (1)–(4).

Далее с помощью p-морфизмов, построенных в лемме 4.8, последовательно удаляем лишние элементы. Высота шкалы при этом не меняется. Множество ненормальных элементов не затрагивается. Кроме того, любая цепь длины $n+1$ в p-морфном образе является образом некоторой $(n+1)$-элементной цепи, поэтому условия (2), (3) сохраняются. Сохраняется и условие (4). В итоге получаем требуемую шкалу. $\square$

Таким образом, найдены необходимые условия максимальности логик в конечных слоях. Скорее всего эти условия и достаточны, однако мы этого не утверждаем. Тем не менее теорема 4.9 дает возможность для построения индикатора формулы π_n и вычисления номера слоя для логик конечных слоев.

5. Вычисление номера слоя

В [1] введено понятие индикатора формулы в терминах J-алгебр. Здесь дадим равносильное определение в терминах шкал.

Конечное множество S конечных шкал называем *индикатором формулы* B, если для любой формулы A

$(\mathrm{J}+A)\vdash B \iff A$ опровержима во всех шкалах из S.

Формула B *надежно разрешима над* J, если она имеет индикатор.

В [1] доказана надежная разрешимость всех формул π_n. Здесь построим более или менее обозримые индикаторы, пользуясь теоремой 4.9.

Для $n>0$ обозначим через $I(n-1)$ множество всех, с точностью до изоморфизма главных шкал высоты n, удовлетворяющих условиям (1)–(6) теоремы 4.9.

Теорема 5.1. *Для любого $n>0$ множество $I(n-1)$ главных шкал высоты n, удовлетворяющих условиям* (1)–(6) *теоремы* 4.9, *является индикатором формулы π_{n-1}.*

Доказательство. Заметим, что множество $I(n-1)$ конечно. В самом деле, любая шкала из $I(n-1)$ имеет не более двух максимальных существенных элементов по условиям (1), (2), (4), и по (5) количество ее элементов ограничено некоторым числом $f(n)$, а значит, ограничено и число шкал в $I(n-1)$.

Пусть $L=\mathrm{J}+A$, $L\nvdash\pi_{n-1}$. Если L — логика бесконечного слоя, то она содержится в LC или NC по теореме 3.4, а значит, A общезначима в $\mathbf{Z}_n^t$ или $\mathbf{Z}_n^0$, изоморфной шкале из $I(n-1)$. Если L — логика k-го слоя, $k<\omega$, то $k\geq n$ и по следствию 3.3 A общезначима в некоторой шкале высоты k, а значит, и в ее конусе высоты n. Логика последней шкалы принадлежит n-му слою и содержится в максимальной логике n-го слоя. Поэтому A общезначима в некоторой шкале из $I(n-1)$.

Обратное очевидно. Теорема доказана. □

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что любое конечное множество конечных шкал высоты n, содержащее все попарно не изоморфные минимальные шкалы высоты n, является индикатором формулы π_{n-1}.

Следующая теорема позволяет вычислить номер слоя конечно аксиоматизируемой логики.

Теорема 5.2. *Пусть $L=(\mathrm{J}+A)$, где A — формула от k переменных. Тогда*

(1) *L является логикой бесконечного слоя, если и только если A общезначима в $\mathbf{Z}_{k+1}^t$ или $\mathbf{Z}_{k+1}^0$;*

(2) *L является логикой нулевого слоя, если и только если A опровержима в $\mathbf{Z}_1^t$ и $\mathbf{Z}_1^0$;*

(3) *L является логикой n-го слоя для $n>0$, если и только если A общезначима в некоторой шкале из $I(n-1)$ и опровергается во всех шкалах из $I(n)$.*

Доказательство. (1) Следует по теореме 3.4 и лемме 3.5.

(2) $I(0)$ является индикатором формулы π_0 и состоит из двух шкал $\mathbf{Z}_1^t$, $\mathbf{Z}_1^0$.

(3) Сразу вытекает из теоремы 5.1. □

Таким образом, для вычисления номера слоя достаточно сначала применить п. (1), затем пп. (2), (3).

6. Максимальные логики верхних слоев

Опишем в явном виде максимальные логики в слоях с небольшими номерами. Отметим, что две из шести максимальных логик 3-го слоя не порождаются линейными шкалами.

Теорема 6.1. (1) *Максимальные логики* 1*-го слоя порождаются шкалами*

$$\mathbf{Z}_1^t, \quad \mathbf{Z}_1^0.$$

(2) *Максимальные логики* 2*-го слоя порождаются шкалами*

$$\mathbf{Z}_2^t, \quad \mathbf{Z}_2^1, \quad \mathbf{Z}_2^0.$$

(3) *Максимальные логики* 3*-го слоя порождаются шкалами*

$$\mathbf{Z}_3^t, \quad \mathbf{Z}_3^2, \quad \mathbf{Z}_3^1, \quad \mathbf{Z}_3^0, \quad \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{F}_2,$$

где $\mathbf{F}_1 = (F, R, Q_1)$, $F = \{0, 1, 2, 3, \infty\}$, $Q_1 = \{3, \infty\}$,

$$xRy \iff (x = 0 \text{ или } y = \infty \text{ или } x = y \text{ или } (x = 2 \text{ и } y = 3)),$$

$\mathbf{F}_2 = (F, R, Q_2)$, $Q_2 = \{2, 3, \infty\}$.

Доказательство. Для доказательства применим предложение 4.2 и теорему 4.9.

(1) Существуют только две (с точностью до изоморфизма) главных шкалы высоты 1. Логики этих шкал максимальны по предложению 4.2.

(2) В самом деле, пусть $\mathbf{W}$ — главная шкала высоты 2. Если наименьший элемент ненормальный, то по условиям (2), (3) теоремы 4.9 эта шкала изоморфна $\mathbf{Z}_2^0$.

Если наименьший элемент нормальный и есть другие нормальные элементы, то по (1) шкала изоморфна $\mathbf{Z}_2^t$. В противном случае шкала изоморфна $\mathbf{Z}_2^1$ по (2), (3). Логики этих шкал несравнимы по лемме 2.2 и максимальны по предложению 4.2.

(3) Логики всех шести шкал попарно не сравнимы по лемме 2.2 и максимальны по предложению 4.2.

Покажем, что нет других максимальных логик.

Пусть $\mathbf{W}$ — главная шкала высоты 3, $a < b < c < \infty$ — цепь длины 4 в этой шкале. Если c — нормальный элемент, то $\mathbf{W}$ изоморфна $\mathbf{Z}_3^t$ по условию (1) теоремы 4.9. Если a — ненормальный элемент, то $\mathbf{W}$ изоморфна $\mathbf{Z}_3^0$ по условиям (2), (3).

Пусть a — нормальный, а c — ненормальный элементы и шкала не является линейно упорядоченной, т. е. содержит элемент d, отличный от a, b, c, ∞. Имеем $a < d < \infty$, $d \not< b$. Элемент d нормальный по условию (3). Он не может иметь нормальных последователей по (1).

Кроме того, d не может иметь ненормальных существенных последователей. В самом деле, по (2), (3) Q есть $\{b, c, \infty\}$ или $\{c, \infty\}$. В первом случае $d \not< c$ по (3), т. е. d имеет единственного последователя ∞. По условию (4) такое d единственно и $\mathbf{W}$ изоморфна $\mathbf{F}_2$. Во втором случае $d \not< c$ по (5), поэтому $\mathbf{W}$ изоморфна $\mathbf{F}_1$. $\square$

Из этой теоремы сразу вытекает

Следствие 6.2. *Множества шкал* $\{\mathbf{Z}_1^t, \mathbf{Z}_1^0\}$, $\{\mathbf{Z}_2^t, \mathbf{Z}_2^1, \mathbf{Z}_2^0\}$, $\{\mathbf{Z}_3^t, \mathbf{Z}_3^2, \mathbf{Z}_3^1, \mathbf{Z}_3^0, \mathbf{F}_1, F_2\}$ *являются минимальными индикаторами формул* π_0, π_1, π_2 *соответственно.*

В следующих слоях картина существенно усложняется. Ввиду теоремы 4.9 существует лишь одна минимальная шкала высоты n, все существенные элементы которой нормальны, — это линейно упорядоченная шкала $\mathbf{Z}_n^t$. Аналогично существует лишь одна минимальная шкала высоты n, все элементы которой ненормальны, — это линейно упорядоченная шкала $\mathbf{Z}_n^0$. Кроме того, любая минимальная шкала содержит не более двух максимальных элементов.

Число линейно упорядоченных шкал высоты n фиксировано. Однако уже в четвертом слое есть минимальная шкала, содержащая две цепи длины 5. Приведем пример такой шкалы. Положим $\mathbf{F}_3 = (W, \leq, Q)$, где $W = \{1, 2, 3, 4, a, b, \infty\}$, $1 < 2 < 3 < 4 < \infty$, $1 < a < b < \infty$, $a < 3$, $Q = \{3, 4, \infty\}$. Здесь $1 < a < 3 < 4 < \infty$, $1 < 2 < 3 < 4 < \infty$. Нетрудно проверить, что эта шкала не имеет собственных p-морфизмов на шкалы высоты 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Слои над минимальной логикой // Алгебра и логика (сдана в печать).
2. *Johansson I.* Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compos. Math. 1937. V. 4. P. 119–136.
3. *Hosoi T.* On intermediate logics. I // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. Ia. 1967. V. 14. P. 293–312.
4. *Rautenberg W.* Klassische und nichtklassiche Aussagenlogik. Wiesbaden: Vieweg-Verl., 1979.
5. *Odintsov S.* Constructive negations and paraconsistency. Dordrecht: Springer-Verl., 2008. (Ser. Trends Logic; V. 26).
6. *Максимова Л. Л.* Предтабличные суперинтуиционистские логики // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 5. С. 558–570.
7. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Узнаваемые логики // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 2. С. 252–274.
8. *Segerberg K.* Propositional logics related to Heyting's and Johansson's // Theoria. 1968. V. 34. P. 26–61.
9. *Максимова Л. Л.* Метод доказательства интерполяции в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 627–648.
10. *Gabbay D. M., Maksimova L.* Interpolation and definability: modal and intuitionistic logics. Oxford: Clarendon Press, 2005.
11. *Jonsson B.* Algebras whose congruence lattices are distributive // Math. Scand. 1967. V. 21. P. 110–121.
12. *Dummett M.* A propositional calculus with denumerable matrix // J. Symb. Logic. 1959. V. 24. P. 97–106.

Статья поступила 28 сентября 2015 г.

Максимова Лариса Львовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
lmaksi@math.nsc.ru