Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 517.518+517.54

ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА — ОРЛИЧА

А. В. Меновщиков

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия, при которых гомеоморфизм областей в евклидовом пространстве порождает ограниченный оператор вложения пространств Соболева — Орлича, определенных специальным классом N-функций.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.514

Ключевые слова: оператор композиции, пространство Соболева — Орлича, N-функция.

Введение

Статья посвящена проблеме описания аналитических свойств гомеоморфизмов областей в евклидовом пространстве, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича L^1_M, определенных (возможно, различными) N-функциями M (их свойства формулируются ниже). Исследование пространств Соболева — Орлича мотивировано их применением к решению некоторых прикладных задач.

Основной задачей является нахождение необходимых и достаточных условий, при которых гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, где D, D' — области в $\mathbb{R}^n$, порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$, действующий по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$. Заметим, что если N-функции M, M_1, определяющие пространства Соболева — Орлича, задаются равенством $M(u) = u^q$, $M_1(u) = u^p$, где $1 \leq q \leq p < \infty$, то задача сводится к случаю пространств Соболева L^1_p, хорошо изученному в [1–6].

Впервые аналогичную задачу в пространствах Соболева для случая, когда оператор φ^* изоморфен, рассмотрел С. Л. Соболев в [7]. Дальнейшее развитие этих идей представлено в [8–10].

Как уже отмечалось, изучению случая, когда оператор φ^* ограниченный, посвящены работы [1–5]. В [1] доказан следующий результат: *гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, индуцирует ограниченный оператор $\varphi^* : L^1_p(\Omega') \to L^1_p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, по формуле замены переменной тогда и только тогда, когда $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и существует постоянная $K < \infty$ такая, что $|D\varphi(x)|^p \leq K|\det D\varphi(x)|$ для почти всех $x \in \Omega$.* В [2] аналогичная задача решена для функциональных пространств, определенных на произвольных однородных группах. Статья [3] посвящена описанию гомеоморфизмов $\varphi : \Omega \to \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$,

Работа выполнена при частичной поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029) и гранта РФФИ (код проекта № 14–01–00552).

индуцирующих ограниченный оператор $\varphi^* : L^1_p(\Omega') \to L^1_q(\Omega), 1 \le q < p < \infty$. В [4] результат из [3] обобщен для случая гомеоморфизмов областей групп Карно. В [5] рассматривается аналогичная задача, но при этом не предполагается, что отображение $\varphi : \Omega \to \Omega'$ является гомеоморфизмом.

Способ решения задачи, поставленной в данной работе, основан на применении схемы из [1–6]. Кроме того, для получения представленных в работе результатов использовались формула замены переменной в интеграле Лебега, теорема Лебега о дифференцировании интеграла, свойства счетно аддитивных функций множества, а также аналог неравенства Гёльдера для функций из пространств Орлича.

Авторы работы [11] изучали операторы композиции пространств Соболева — Орлича W^1_M, определенных специальным классом N-функций. В результате в [11] были получены необходимые условия, при которых такой оператор является ограниченным. Сравнение результатов, полученных в [11], с результатами настоящей работы приведено в конце данной статьи.

Автор настоящей работы благодарит Сергея Константиновича Водопьянова за постановку задачи, плодотворное сотрудничество и консультации, без которых написание данной статьи было бы невозможным.

1. Предварительные сведения

Напомним основные определения из теории пространств Орлича (формулируемые определения и утверждения читатель сможет найти в [12]).

Определение 1. Непрерывная выпуклая функция $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ называется *N-функцией*, если она четная и удовлетворяет условиям

$$\lim_{u\to 0} \frac{M(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u\to\infty} \frac{M(u)}{u} = \infty.$$

Для N-функции $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ вводится дополнительная функция $M^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, определяемая формулой

$$M^*(v) = \sup\{u|v| - M(u) : u \ge 0\}.$$

Нетрудно видеть, что $M^*(v)$ также является N-функцией.

Пользуясь соображениями, которые обычно применяются при выводе неравенства Гёльдера, можно получить неравенство Юнга, которое играет важную роль при изучении N-функций: для всех u, v справедливо неравенство

$$uv \le M(u) + M^*(v). \tag{1}$$

Случай равенства в неравенстве (1) достигается при $v = p(|u|)\operatorname{sign} u$, где $p(u)$ — правая производная функции $M(u)$.

Следствием из (1) является неравенство

$$u < M^{-1}(u)M^{*-1}(u) \le 2u.$$

Для N-функции $M(u)$ определим функцию $H(u)$ равенством

$$H(u) = \frac{1}{M\left(\frac{1}{u}\right)}.$$

Выпуклую функцию $Q(u)$ будем называть *главной частью N-функции $M(u)$*, если $Q(u) = M(u)$ при больших значениях аргумента.

Будем писать $M = M_1$, если функции M и M_1 совпадают, и $M < M_1$, если $M < M_1$ при больших значениях аргумента.

Существенную роль играет скорость роста N-функции $M(u)$ при $u \to \infty$. Поэтому удобно рассматривать специальные классы N-функций, характер поведения которых удовлетворяет некоторым условиям.

Говорят, что N-функция *удовлетворяет* Δ_2*-условию* (глобально), если существует такая постоянная $k > 0$, что

$$M(2u) \leq kM(u) \quad \text{для всех } u.$$

Можно показать, что N-функции, удовлетворяющие Δ_2-условию, растут не быстрее степенных.

Говорят, что N-функция *удовлетворяет* Δ'*-условию* (глобально), если существует такая постоянная $c > 0$, что

$$M(uv) \leq cM(u)M(v) \quad \text{для всех } u, v.$$

Если N-функция удовлетворяет Δ'-условию, то она удовлетворяет и Δ_2-условию. Например, рассмотрим N-функцию

$$\Phi_1(u) = |u|^q(\ln(|u| + 1)) \quad (q > 1).$$

Эта функция удовлетворяет как Δ_2-условию, так и Δ'-условию. Функция

$$\Phi_2(u) = \frac{u^2}{\ln(e + |u|)}$$

также удовлетворяет Δ_2-условию, но при этом не удовлетворяет Δ'-условию.

Напомним определение пространств Орлича. Через $\widetilde{L}_M(D)$ обозначим класс таких вещественных измеримых функций $u : D \to \mathbb{R}$ (D — область в $\mathbb{R}^n$), для которых

$$\rho(u; M) = \int\limits_D M(u(x))\, dx < \infty.$$

Определение 2. *Пространство Орлича* $L_M(D)$ — это совокупность измеримых функций $u : D \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$(u, v) = \int\limits_D u(x)v(x)\, dx < \infty$$

при всех $v : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \in \widetilde{L}_{M^*}(D)$.

Если функция $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет Δ_2-условию, то $\widetilde{L}_M(D)$ совпадает с $L_M(D)$.

Также заметим, что пространства Орлича, определенные N-функциями, эквивалентными при $u \to \infty$, совпадают.

В пространстве Орлича рассмотрим две нормы:

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v;M^*)\leq 1} \left| \int\limits_D u(x)v(x)\, dx \right|, \quad \|u\|_{(M)} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int\limits_D M\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right)\, dx \leq 1 \right\}.$$

Эти нормы эквивалентны в следующем смысле: $\|u\|_{(M)} \leq \|u\|_M \leq 2\|u\|_{(M)}$.

Заметим, что если N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то имеет место равенство

$$\rho\left(\frac{u}{\|u\|_{(M)}}; M\right) = \int\limits_D M\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right)dx = 1.$$

Если функция $M(u)$ удовлетворяет также Δ'-условию, то из этого равенства и Δ'-условия непосредственно следуют неравенства

$$H(\|u\|_M) \leq c \int\limits_{\operatorname{supp} u} M(u(x))\,dx, \quad M(\|u\|_M) \geq \frac{1}{c} \int\limits_{\operatorname{supp} u} M(u(x))\,dx.$$

Далее потребуется аналог неравенства Гёльдера для функций из пространств Орлича [13] следующего вида:

$$\|uv\|_M \leq 2\|u\|_{M_1}\|v\|_{M_2}, \tag{2}$$

где M, M_1, M_2 — N-функции такие, что

$$M_1(u) = M(2M_3(u)), \quad M_2(u) = M(2M_3^*(u)). \tag{3}$$

В качестве примера приведем вид функций M_2, M_3, M_3^* для случая, когда функции M и M_1 степенные. Пусть $M(u) = u^q$, $M_1(u) = u^p$, $q < p$. Тогда из первого равенства можно определить функцию $M_3(u) = \frac{1}{2}u^{p/q}$. Найдем функцию $M_3^*(u)$, являющуюся дополнительной к $M_3(u)$. В данном случае

$$M_3^*(u) = \frac{p-q}{q}\left(\frac{2q}{p}\right)^{q/(p-q)} u^{p/(p-q)} = Cu^{p/(p-q)}.$$

Таким образом, $M_2(u) = C^q u^{pq/(p-q)}$.

Для произвольных наборов чисел нельзя получить аналог неравенства Гёльдера для сумм. Но при условии, что для всех чисел из этих наборов выполняются равенства в неравенстве (1), можно получить следующее соотношение, верное для произвольной N-функции M:

$$\sum_{i=1}^N u_i v_i \geq M^{-1}\left(\sum_{i=1}^N M(u_i)\right) M^{*-1}\left(\sum_{i=1}^N M^*(v_i)\right). \tag{4}$$

Действительно, пусть

$$U = M^{-1}\left(\sum_{i=1}^N M(u_i)\right), \quad V = M^{*-1}\left(\sum_{i=1}^N (M^*(v_i))\right).$$

Используя неравенство Юнга и принимая во внимание, что условия для случая равенства предполагаются выполненными, получаем

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^N u_i v_i}{UV} = \frac{\sum\limits_{i=1}^N M(u_i) + \sum\limits_{i=1}^N M^*(v_i)}{UV} = \frac{M(U) + M^*(V)}{UV} \geq 1.$$

Из этого неравенства следует требуемое.

Определим пространства Соболева — Орлича.

Определение 3 [14]. *Пространство Соболева — Орлича* $W^1_M(D)$ (D — область в $\mathbb{R}^n$) — это совокупность классов эквивалентности функций из пространства Орлича $L_M(D)$, имеющих первые обобщенные производные, градиент которых принадлежит пространству Орлича $L_M(D)$.

В пространстве Соболева — Орлича $W^1_M(D)$ рассматривается норма

$$\left\|f \mid W^1_M\right\| = \|f \mid L_M\| + \|\nabla f \mid L_M\|.$$

Определение 4 [14]. *Пространство Соболева — Орлича* $L^1_M(D)$ (D — область в $\mathbb{R}^n$) — совокупность классов эквивалентности локально суммируемых функций с первыми обобщенными производными, градиент которых принадлежит пространству Орлича $L_M(D)$.

В пространстве Соболева — Орлича $L^1_M(D)$ рассматривается полунорма

$$\left\|f \mid L^1_M\right\| = \|\nabla f \mid L_M\|.$$

Символом $\overset{\circ}{L}{}^1_M(D)$ ($\overset{\circ}{W}{}^1_M(D)$) будем обозначать замыкание множества финитных гладких функций в пространстве $L^1_M(D)$ ($W^1_M(D)$).

При изучении вопросов, связанных с пространствами Соболева, важную роль играют теоремы вложения. Ниже потребуется аналог следующей теоремы.

Теорема 5 (теорема вложения Соболева). *Пусть область D удовлетворяет условию конуса. Тогда*

1) *вложение $W^1_p(D) \to L_{p^*}(D)$, где $p^* = np/(n-p)$, непрерывно, если $p < n$;*

2) *вложение $W^1_p(D) \to L_\infty(D) \cap C(D)$ непрерывно, если $p > n$;*

Будем называть область D *допустимой*, если заключения теоремы 5 верны для случая $p = 1$.

Сформулируем аналог приведенной выше теоремы для пространств Соболева — Орлича, доказанный Дональдсоном.

Теорема 6 [15]. *Пусть D — ограниченная допустимая область в n-мерном евклидовом пространстве, $M(t)$ — некоторая N-функция, $\overline{M}(t)$ — функция, сопряженная $M(t)$ и определяемая равенством*

$$(\overline{M}(u))^{-1} = \int\limits_1^{|u|} \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/n}}\,dt.$$

Тогда

1) *вложение $W^1_M(D) \to L_{\overline{M}}(D)$ непрерывно, если*

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/n}}\,dt = \infty,$$

2) *вложение $W^1_M(D) \to L_\infty(D) \cap C(D)$ непрерывно, если*

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/n}}\,dt < \infty.$$

Заметим, что данный результат справедлив также и для пространств Соболева — Орлича L^1_M.

2. Основной результат

Будем говорить, что *гомеоморфизм* $\varphi : D \to D'$, где D, D' — области в $\mathbb{R}^n$, *порождает ограниченный оператор композиции* $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$, действующий по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$, если существует постоянная $K < \infty$ такая, что

$$\|\varphi^* f \mid L^1_M(D)\| \leq K \|f \mid L^1_{M_1}(D')\|$$

для любой функции $f \in L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D')$.

Далее будем рассматривать пространства Соболева — Орлича L^1_M и $L^1_{M_1}$, определенные N-функциями M, M_1, удовлетворяющими Δ'-условию.

Неотрицательная функция Φ, определенная на открытых множествах из области D и принимающая конечные значения, называется *квазиаддитивной* (*аддитивной*), если для всякого набора открытых попарно не пересекающихся множеств $\{A_i\}$, $A_i \subset A \subset D$, $i \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \Phi(A_i) \leq \Phi(A)$ (равенство $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \Phi(A_i) = \Phi\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A'_i\Big)$).

Лемма 7. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$. Тогда*

$$\Phi(A') = \sup_{f \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')} M_2\biggl(C \frac{\|\varphi^* f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_M(\varphi^{-1}(A'))\|}{\|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')\|}\biggr),$$

где C — некоторая постоянная, является ограниченной аддитивной функцией, определенной на открытых множествах из области D'.

Доказательство. Пусть A'_i, $i \in N$, — открытые попарно не пересекающиеся множества в D', $A'_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A'_i$, $A_i = \varphi^{-1}(A'_i)$, $i = 0, 1, \dots$. Рассмотрим такую функцию $f_i \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A'_i)$, что одновременно выполняются условия

$$\|\varphi^* f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_M(A_i)\| \geq M_2^{-1}\left(\Phi(A'_i)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right)\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A'_i)\|,$$

$$H\bigl(\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A'_i)\|\bigr) = \hat{p}^*_3\left(H\left(M_2^{-1}\left(\Phi(A'_i)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right)\right)\right),$$

где $\hat{p}^*_3$ — правая производная функции $\widehat{M}^*_3$, определяемой ниже, $\varepsilon \in (0,1)$. Такая функция существует в силу того, что норма в пространстве L_M однородна, из чего следует, что умножение на положительную константу не изменит знака приведенного выше неравенства и, подбирая константу соответствующим образом, всегда сможем добиться выполнения последнего равенства. Полагая

$f_N = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i$ и используя неравенство (4), получаем

$$\left\|\varphi^* f_N \mid \overset{\circ}{L}{}^1_M\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)\right\| \geq M^{-1}\left(\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{N} H\big(\|\varphi^* f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_M(A_i)\|\big)\right)$$
$$\geq M^{-1}\left(\frac{1}{c^3}\sum_{i=1}^{N} H\left(M_2^{-1}\left(\Phi(A_i')\left(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right)\right) H\big(\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A_i')\|\big)\right)$$
$$\geq M^{-1}\left(\frac{1}{c^3}\widehat{M}_3^{*-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\widehat{M}_3^*\left(H\left(M_2^{-1}\left(\Phi(A_i')\left(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right)\right)\right)\right)\right.$$
$$\left.\times\,\widehat{M}_3^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\widehat{M}_3\big(H\big(\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A_i')\|\big)\big)\right)\right),$$

где функции $\widehat{M}_3$ и $\widehat{M}_3^*$ определяются из равенств

$$M_1(u) = \widehat{M}_3(M(u)), \quad M_2(u) = \widehat{M}_3^*(M(u)).$$

Функции $\widehat{M}_3$ и $\widehat{M}_3^*$ не обязательно дополнительны друг другу, но для них выполняется неравенство (1) в силу их определения. Следовательно, для них верно и неравенство (4).

Теперь рассмотрим N-функцию $\widehat{M}(u)$, эквивалентную $M(u)$, такую, что $\widehat{M}^{-1}(H(u)) \geq Cu$, где C — некоторая константа. Для такой функции может нарушаться глобальность Δ'-условия, но так как мы не будем его применять для функции $\widehat{M}(u)$, это не повлияет на дальнейшие рассуждения. Более того, $M^{-1}(\widehat{M}(u)) \geq C_1 u$ (подробную информацию о свойствах классов эквивалентных N-функций можно найти в [12, 14]). В результате получим следующее неравенство:

$$M^{-1}(H(u)) = M^{-1}(\widehat{M}(\widehat{M}^{-1}(H(u)))) \geq Cu.$$

Используя это неравенство и определение функций $\widehat{M}_3$ и $\widehat{M}_3^*$, приходим к соотношениям

$$M^{-1}\left(\frac{1}{c^3}\widehat{M}_3^{*-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\widehat{M}_3^*\left(H\left(M_2^{-1}\left(\Phi(A_i')\left(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right)\right)\right)\right)\right.$$
$$\left.\times\,\widehat{M}_3^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\widehat{M}_3\big(H\big(\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A_i')\|\big)\big)\right)\right)$$
$$\geq c_1 M_2^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\Phi(A_i')\left(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right) M_1^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} M_1\big(c_2\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A_i')\|\big)\right)$$
$$\geq c_1 M_2^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\Phi(A_i')\left(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right) H_1^{-1}\left(H_1\left(c_2\left\|f_N \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i'\right)\right\|\right)\right)$$
$$\geq C M_2^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\Phi(A_i') - \varepsilon\Phi(A_0')\right)\left\|f_N \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i'\right)\right\|,$$

где C — константа, зависящая только от конкретного вида N-функций M и M_1.

Отсюда следует, что

$$M_2^{-1}(\Phi(A_0')) \geq \sup C \frac{\left\| \varphi^* f_N \mid \overset{\circ}{L}{}^1_M\left(\bigcup\limits_{i=1}^N A_i\right)\right\|}{\left\| f_N \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^N A_i'\right)\right\|} \geq M_2^{-1}\left(\sum_{i=1}^N \Phi(A_i') - \varepsilon\Phi(A_0')\right),$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $f_N \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^N A_i'\right)$ указанного выше вида. Так как N и ε произвольны, квазиаддитивность функции Φ доказана. $\square$

Теорема 8. *Пусть функции M и M_1 такие, что функция M_2 из равенств (3) удовлетворяет Δ'-условию. Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \operatorname{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $\varphi \in \operatorname{ACL}(D)$ (*абсолютно непрерывно на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси и имеющих непустое пересечение с* D)*;*

2) *отображение* φ *имеет конечное искажение* ($\varphi \in \operatorname{ACL}(D), \nabla\varphi(x) = 0$ *почти всюду на множестве* $Z = \{x \in D : J(x, \varphi) = 0\}$)*;*

3) *конечна величина* $K = \left\| \frac{|\nabla\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2}\right\|$ ($K = \left\| \frac{|\nabla\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_\infty\right\|$ *при* $M = M_1$)*.*

Норма оператора $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$ *эквивалентна величине* K*, а именно* $\alpha K \leq \|\varphi^*\| \leq K$*, где* α *— положительная постоянная.*

Доказательство. В [5] приводится доказательство того, что отображение φ, порождающее ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D), 1 \leq q \leq p \leq \infty$, по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $f \in L^1_p$, принадлежит классу $\operatorname{ACL}(D)$. Метод доказательства ACL-свойства применим также и к пространствам Соболева — Орлича.

Необходимость. По доказанной лемме для любой функции $f \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A) \cap \operatorname{Lip}(A)$ выполняется неравенство

$$\left\| \varphi^* f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_M(\varphi^{-1}(A))\right\| \leq C M_2^{-1}(\Phi(A)) \left\| f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A)\right\|,$$

где $A \subset D'$ — открытое подмножество (при $M = M_1$ полагаем $M_2^{-1}(\Phi(A)) = \|\varphi^*\|$). Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную единице на $B(0,1)$ и нулю вне $B(0,2)$. Подставляя в это неравенство функции $f_i(y) = (y_i - y_{0,i})\eta\left(\frac{y-y_0}{r}\right)$, получаем

$$M^{-1}\left(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|\nabla\varphi|)\,dx\right) \leq C M_2^{-1}(\Phi(B(y_0, 2r))) M^{-1}(r^n). \tag{5}$$

Если гомеоморфизм φ не обладает N-свойством, то по теореме о замене переменной [16] существует борелевское множество E нулевой меры такое, что справедлива формула

$$\int\limits_{D\setminus E} (g \circ \varphi)|J(x,\varphi)|\,dx = \int\limits_{D'} g(y)\,dy. \tag{6}$$

Пусть $Z = \{x \in D \setminus E \mid J(x,\varphi) = 0\}$. Покажем, что

$$\int\limits_{Z} M(|\nabla\varphi|)\,dx = 0. \tag{7}$$

По формуле (6) $|\varphi(Z \setminus E)| = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и открытое множество $U \supset \varphi(Z \setminus E)$, $|U| < \varepsilon$. Существует конечнократное покрытие множества U шарами $\{B(x_i, r_i)\}$ такое, что шары $\{B(x_i, 2r_i)\}$ также образуют конечнократное покрытие множества U и $\sum r_i^n < N\varepsilon$ (кратность N покрытия не зависит от множества U). Тогда из неравенства (5), используя тот факт, что функция M удовлетворяет Δ'-условию и что функции, удовлетворяющие Δ_2-условию, растут не быстрее некоторой степенной функции, получаем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(Z)} M(|\nabla\varphi|)\,dx \le \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))} M(|\nabla\varphi|)\,dx \le CM(\|\varphi^*\|)\sum_{i=1}^{\infty} r_i^n \text{ при } M = M_1;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))} M(|\nabla\varphi|)\,dx \le C\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{M}_3^{*-1}(\Phi(B(y_i,2r_i)))\widehat{M}_3^{-1}(r_i^n)$$
$$\le C(\Phi(D'))^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} r_i^n\right)^{\frac{1}{q}} < C(\Phi(D'))^{\frac{1}{p}}(N\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \quad \text{при } M < M_1.$$

Так как $\Phi(D') < \infty$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число, (7) доказано и, следовательно, $|\nabla\varphi| = 0$ почти всюду на множестве Z.

Рассмотрим случай, когда $M = M_1$. Применим к левой части (5) формулу (6). Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла вытекает, что

$$\frac{M(|\nabla\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|} \le CM(\|\varphi^*\|) \qquad \text{почти всюду в } D' \setminus \varphi(E \cup Z).$$

Пусть $S \subset D' \setminus \varphi(E \cup Z)$ — множество, где последнее неравенство неверно. Тогда по формуле (6) $|J(x,\varphi)| = 0$ почти всюду на множестве $\varphi^{-1}(S)$. Поэтому $\varphi^{-1}(S) \subset Z$ и $M(|\nabla\varphi|) \le CM(\|\varphi^*\|)|J(x,\varphi)|$ почти всюду в D.

При $M < M_1$ из неравенства (5), следствия из неравенства Юнга и Δ'-условия получим

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|\nabla\varphi|)\,dx$$
$$\le CM\left(M_2^{-1}(\Phi(B(y_0,2r)))M_2^{-1}\left(\frac{1}{|B(y_0,2r)|}\right)H_2^{-1}(r^n)M_1^{-1}(r^n)\right)$$
$$\le C_1M\left(M_2^{-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)M_2^{-1}(r^n)M_1^{-1}(r^n)\right)$$
$$\le C_2\widehat{M}_3^{*-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)M\big(M_2^{-1}(r^n)M_1^{-1}(r^n)\big)$$
$$\le C_3\widehat{M}_3^{*-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)M\big(M_3^{*-1}(M^{-1}(r^n))M_3^{-1}(M^{-1}(r^n))\big)$$
$$\le C_3\widehat{M}_3^{*-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)M(M^{-1}(r^n)) \le C_3\widehat{M}_3^{*-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)r^n.$$

Применим к левой части этого неравенства формулу (6) замены переменной:

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|\nabla\varphi|)\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\setminus Z} M(|\nabla\varphi|)\,dx$$

$$= \int\limits_{B(y_0,r)} \frac{M(|\nabla\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\,dy \le C\widehat{M}_3^{*-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right) r^n.$$

Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла и свойств производной счетно аддитивной функции множества вытекает, что

$$\widehat{M}_3^{*}\left(\frac{M(|\nabla\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\right) \le C\Phi'(y) \qquad \text{почти всюду в } D'.$$

Интегрируя неравенство по области D' и используя следствие из неравенства Юнга и Δ'-условие, получаем

$$M_2(K) \le C \int\limits_{D\setminus Z} M_2\left(\frac{|\nabla\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)}\right) dx$$

$$= C \int\limits_{D\setminus Z} M_2\left(\frac{|\nabla\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)}\frac{M_2^{-1}(|J(x,\varphi)|)}{M_2^{-1}(|J(x,\varphi)|)}\right) dx$$

$$\le C \int\limits_{D\setminus Z} M_2\left(\frac{|\nabla\varphi|}{M^{-1}(|J(x,\varphi)|)}M_2^{-1}(|J(x,\varphi)|)\right) dx$$

$$\le C_1 \int\limits_{D\setminus Z} M_2\left(\frac{|\nabla\varphi|}{M^{-1}(|J(x,\varphi)|)}\right)|J(x,\varphi)|\,dx$$

$$\le C_1 \int\limits_{D'} \widehat{M}_3^{*}\left(M\left(\frac{|\nabla\varphi|(\varphi^{-1}(y))}{M^{-1}(|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|)}\right)\right) dy$$

$$\le C_2 \int\limits_{D'} \widehat{M}_3^{*}\left(M(|\nabla\varphi|)(\varphi^{-1}(y))M\left(H^{-1}\left(\frac{1}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\right)\right)\right) dy$$

$$\le C_3 \int\limits_{D'} \widehat{M}_3^{*}\left(\frac{M(|\nabla\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\right) dy$$

$$\le C \int\limits_{D'} \Phi'(y)\,dy \le C\Phi(D') \le CM_2(\|\varphi^*\|).$$

Достаточность. Покажем, что неравенство

$$\left\|\varphi^* f \mid L^1_M(D)\right\| \le K\left\|f \mid L^1_{M_1}(D')\right\|$$

выполняется для любой функции $f \in L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D')$.

Используя аналог неравенства Гёльдера (2), получаем

$$\left\|\varphi^* f \mid L^1_M(D)\right\| \le \left\||\nabla f||\nabla\varphi|\frac{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_M(D)\right\|$$

$$\le 2\left\|\frac{|\nabla\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2}(D)\right\| \left\||\nabla f|M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|) \mid L_{M_1}(D)\right\|.$$

Рассмотрим второй сомножитель:

$$\big\||\nabla f|M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|) \mid L_{M_1}(D)\big\| \le \lambda\bigg(\int\limits_{D\setminus Z} \frac{1}{\lambda}|\nabla f|(\varphi(x))M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)z(x)\,dx+\varepsilon\bigg),$$

где $z(x)$ — функция, для которой $\int\limits_{D\setminus Z} M_1^*(z(x))\,dx \le 1$, $\varepsilon > 0$ произвольное, а значение λ будет определено ниже. Из неравенства Юнга и Δ'-условия имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D\setminus Z} \frac{1}{\lambda}|\nabla f|(\varphi(x))M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)z(x)\,dx \\
&\quad\le \bigg(\int\limits_{D\setminus Z} M_1\left(\frac{|\nabla f|(\varphi(x))M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)}{\lambda}\right)dx + \int\limits_{D\setminus Z} M_1^*(z(x))\,dx\bigg) \\
&\quad\quad\le \bigg(\int\limits_{D\setminus Z} M_1\left(\frac{|\nabla f|(\varphi(x))M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)}{\lambda}\right)dx + 1\bigg) \\
&\quad\quad\quad\le \bigg(C\int\limits_{D\setminus Z} M_1\left(\frac{|\nabla f|(\varphi(x))}{\lambda}\right)|J(x,\varphi)|\,dx + 1\bigg).
\end{aligned}$$

Применяя формулу (3) и полагая $\lambda = \|\nabla f \mid L_{M_1}(D')\|$, приходим к неравенству

$$\||\nabla f|M^{-1}(|J(x,\varphi)|) \mid L_{M_1}(D)\| \le C\||\nabla f| \mid L_{M_1}(D')\|.$$

Подставив полученное неравенство в исходное, выводим требуемый результат. При этом $K = C\big\|\frac{|\nabla\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2}\big\|$. В случае, когда функции M и M_1 совпадают, $K = C\big\|\frac{|\nabla\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_\infty\big\|$. $\square$

Замечание 9. Заметим, что для доказательства леммы 7 и достаточного условия теоремы 8 не требуется, чтобы функция M_2 удовлетворяла Δ'-условию. В качестве примера N-функций M и M_1, удовлетворяющих Δ'-условию, для которых функция M_2 также удовлетворяет этому условию, рассмотрим функции, главные части которых имеют следующий вид:

$$Q(u) = C_1u^q(\ln u)^{a_1}(\ln\ln u)^{a_2}\dots(\ln\dots\ln u)^{a_n} \quad (a_i \ge 0),$$

$$Q_1(u) = C_2u^p(\ln u)^{b_1}(\ln\ln u)^{b_2}\dots(\ln\dots\ln u)^{b_n} \quad (b_i \ge 0).$$

В этом случае главная часть функции M_2 будет выглядеть так:

$$Q_2(u) = C_3u^{\frac{pq}{p-q}}(\ln u)^{\frac{pa_1-qb_1}{p-q}}(\ln\ln u)^{\frac{pa_2-qb_2}{p-q}}\dots(\ln\dots\ln u)^{\frac{pa_n-qb_n}{p-q}}.$$

Можно показать, что если выполняется условие $pa_i \ge qb_i$, $i = 1,\dots,n$, то функция M_2 удовлетворяет Δ'-условию.

Оператор $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ теоремы 8 можно распространить на все пространство $L^1_{M_1}(D')$ при условии, что функция M, определяющая пространство Соболева — Орлича, удовлетворяет некоторым условиям. Эти условия сформулируем ниже.

Для того чтобы доказать этот факт, воспользуемся схемой доказательства из [6], теоремой вложения для пространств Соболева — Орлича [15], приведенной в начале статьи, и дополнительной леммой, являющейся аналогом теоремы 4 в [5].

Лемма 10. *Пусть отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$, где функции $M(u)$ и $M_1(u)$ растут медленнее, чем u^n ($\frac{M_1(u)}{u^n} \to 0$ при $u \to \infty$), и, кроме того, удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме* 8. *Тогда φ обладает N^{-1}-свойством Лузина.*

Доказательство этой леммы повторяет доказательство теоремы 4 из [5] с незначительными изменениями. Вместо неравенства Пуанкаре, используемого в [5], необходимо применить вариант этого неравенства, приведенный ниже. Кроме того, так как не можем использовать неравенство Гёльдера непосредственно, для завершения доказательства необходимо провести рассуждения, аналогичные рассуждениям, примененным при доказательстве конечности искажения отображения φ теоремы 8.

Нам потребуется использовать неравенство Пуанкаре для функций из пространства Соболева — Орлича (доказательство этого неравенства читатель см., например, в [17]).

Предложение 11 [17]. *Пусть $B = B(x, r)$. Тогда существует постоянная $C = C(n)$ такая, что*

$$\int\limits_B M\left(\frac{|u - \bar{u}_B|}{r}\right) dx \le C \int\limits_B M(|\nabla u|)\, dx$$

для всех $u \in W^1_M(B)$, где $\bar{u}_B = \frac{1}{|B|} \int\limits_B u\, dx$.

Используя приведенное неравенство Пуанкаре, можно получить следующий его вариант (для случая пространств Соболева данный результат доказан в [18]).

Предложение 12. *Пусть F — измеримое подмножество шара $B = B(0, r)$ положительной меры. Для всех $v \in W^1_M(B)$, $v|_F = 0$, выполняется неравенство*

$$\int\limits_B M(|v|)\, dx \le C \int\limits_B M(|\nabla v|)\, dx,$$

где $C = C(n, M, r, |F|)$ — некоторая постоянная.

Предложение 13. *Пусть отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$. Тогда распространение этого оператора по непрерывности совпадает с оператором суперпозиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$ при условии, что N-функция $M_1(u)$ либо растет медленнее, чем u^n, либо удовлетворяет условию* 2 *теоремы* 6.

Доказательство. Покажем, что $f \circ \varphi$ — локально суммируемая в D функция. Для случая пространств Соболева этот факт доказан в [6], а так как в рассматриваемом в настоящей работе случае N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, также можно воспользоваться неравенством Пуанкаре [17] и применить схему доказательства шага 3 теоремы 5 из [6].

Фиксируем шар $B \Subset D$. Заметим, что $|B \setminus Z| > 0$ (множество Z определено в теореме 8). Суммируемость композиции $f \circ \varphi$ на B очевидна, если функция f ограничена в D. Приведем случай с произвольной функцией к ограниченной снизу функции f такой, что $f \circ \varphi(x) = 0$ на некотором множестве $F \subset B \setminus Z$ положительной меры. Множество $\{z \in \varphi(B \setminus Z) \mid f(z) - k_0 \le 0\}$ будет иметь положительную меру при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$. Тогда вместо f можно рассмотреть функцию $\max(f(z)-k_0,0)\in L^1_{M_1}(D')$. Фиксируем функцию $f\in L^1_{M_1}(D')$, для которой множество $F=\{x\in B\setminus Z\mid f\circ\varphi(x)=0\}$ имеет положительную меру. Последовательность функций $u_m=g_m\circ\varphi\in L^1_M(D)$, где $g_m=\min(f,m)$, монотонно возрастая, сходится на B к функции $u=f\circ\varphi$ при $m\to\infty$. Ввиду ограниченности функций u_m можно применить для них неравенство Пуанкаре предложения 12. В результате получим

$$\int\limits_B M(|u_m|)\,dx\le C\int\limits_B M(|\nabla u_m|)\,dx\le C\int\limits_B M(|\nabla u|)\,dx.$$

Так как последовательность функций $u_m=g_m\circ\varphi$, монотонно возрастая, сходится на B к функции $u=f\circ\varphi$, по теореме Беппо Леви $u=f\circ\varphi$ принадлежит $L_M(B)$. Поскольку шар $B\Subset D$ произволен, композиция $f\circ\varphi$ локально суммируема в D.

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть N-функция $M(u)$ растет медленнее, чем u^n, при $u\to\infty$. Заметим, что все такие функции удовлетворяют условию 1 теоремы 6. Рассмотрим последовательность функций $f_k\in L^1_{M_1}(D')\cap \mathrm{Lip}(D')$, сходящуюся к f не только в $L^1_{M_1}(D')$, но и почти всюду в области D'. Тогда последовательность композиций $f_k\circ\varphi$ сходится в $L^1_M(D)$ и, кроме того, сходится почти всюду в D, так как по лемме 10 в рассматриваемом случае отображение φ обладает N^{-1}-свойством Лузина.

Случай 2. Пусть N-функция $M(u)$ удовлетворяет условию 2 теоремы 6. В этом случае из последовательности функций $f_k\in L^1_{M_1}(D')\cap \mathrm{Lip}(D')$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к f не только в $L^1_{M_1}(D')$, но и поточечно в области D'. Тогда последовательность композиций $f_k\circ\varphi$ сходится в $L^1_M(D)$ и поточечно к $f\circ\varphi$ в D. Заметим, что в данном случае в определении оператора композиции $\varphi^*f=f\circ\varphi$ функция f должна быть непрерывным представителем класса эквивалентных функций из $f_k\in L^1_{M_1}(D')$. $\square$

Неизвестно, верно ли утверждение сформулированного выше предложения для N-функций, растущих быстрее u^n, но при этом не удовлетворяющих условию 2 теоремы 6.

Замечание 14. Как отмечалось во введении, в [11] уже проводилось исследование оператора композиции пространств Соболева — Орлича, но рассматривались операторы $\varphi^*: W^1_M(D')\to W^1_M(D)$ в нормированных пространствах $W^1_M(D)=\{f: f,|\nabla f|\in L_M(D)\}$ ($\|f\mid W^1_M(D)\|=\|f\mid L_M(D)\|+\|\nabla f\mid L_M(D)\|$) ($D$ — область в $\mathbb{R}^n$), а не полунормированных L^1_M. Кроме того, на N-функции, определяющие эти пространства, накладывались более жесткие ограничения: рассматриваемые в [11] N-функции $M:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ удовлетворяют условию

$$\lim_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u^q\ln^\alpha u}=1$$

для $q\ge n$ и $\alpha\ge 0$ или $q\le n$ и $\alpha\le 0$. В [11] было доказано, что если гомеоморфизм порождает ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича W^1_M, то он является q-квазиконформным отображением ($\varphi\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$, $|\nabla\varphi(x)|^q\le K|J(x,\varphi)|$ для почти всех $x\in D$). Предложенное в [11] необходимое условие не совпадает с необходимым и достаточным условием настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К.* Формула Тейлора и функциональные пространства. Новосибирск: НГУ, 1988.

2. *Водопьянов С. К.* Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 25–41.

3. *Ухлов А. Д.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 185–192.

4. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 771–795.

5. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 11–33.

6. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 1012. Т. 203, № 10. С. 3–32.

7. *Соболев С. Л.* О некоторых группах преобразований n-мерного пространства // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 6. С. 380–382.

8. *Мазья В. Г.* Классы множеств и теоремы вложения функциональных классов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1961.

9. *Gehring F. W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of rings in n-space // Advances in the theory of Riemann surfaces. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1971. P. 175–193. (Stony Brook, NY, 1969).

10. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.

11. *Hencl S., Kleprlik L.* Composition of q-quasiconformal mappings and functions in Orlicz–Sobolev spaces // Illinois J. Math. 2012. V. 56, N 3. P. 931–955.

12. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

13. *Чернов А. В.* Об аналоге обобщенного неравенства Гельдера в пространствах Орлича // Вестн. Нижегор. ун-та. 2013. Т. 6, № 1. С. 157–161.

14. *Rao M. M., Ren Z. D.* Theory of Orlicz spaces. New York: Marcel Dekker, 1991. (Pure Appl. Math.).

15. *Donaldson T. K., Trudinger N. S.* Orlicz–Sobolev spaces and imbedding theorems // J. Funct. Anal. 1971. V. 8, N 1. P. 52–75.

16. *Hajłasz P.* Change of variables formula under minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64, N 1. P. 93–101.

17. *Maly J., Swanson D., Ziemer W. P.* Fine behavior of functions whose gradients are in an Orlicz space // Stud. Math. 2009. V. 190, N 1. P. 33–71.

18. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. II // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 1. С. 13–49.

Статья поступила 28 декабря 2015 г.

Меновщиков Александр Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
antikoerper@mail.ru