Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 517.53

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

Ф. А. Шамоян

Аннотация. В терминах преобразования Фурье получено необходимое и достаточное условие, при котором аналитическая функция ограниченного вида в трубчатой области принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}^n_+)$.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.617

Ключевые слова: функция ограниченного вида, весовая функция, преобразование Фурье, трубчатая область.

Пусть $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство, G — некоторая область в $\mathbb{C}^n$, $H(G)$ — множество всех аналитических функций в G, $H^\infty(G) := H(G) \cap L^\infty(G)$. Обозначим через $N(G)$ множество аналитических функций ограниченного вида в G, т. е.

$$N(G) = \left\{ f : f(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)},\ h_j \in H^\infty(G),\ j = 1, 2,\ h_2(z) \neq 0,\ z \in G \right\}.$$

В одномерном случае класс $N(G)$ совпадает с известным классом Неванлинны аналитических функций в G, т. е. таких, что $\ln|f|$ имеет гармоническую мажоранту в G (см. [1, 2]). В многомерном случае классы функций ограниченного вида и классы Неванлинны совершенно разные (см. [3, 4]). Известно, что если функция f принадлежит классу В. И. Смирнова $N^+(\mathbb{C}_+)$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ (см. [1]) и ее граничные значения на вещественной оси $\mathbb{R}$ принадлежат $L^1(\mathbb{R})$, то f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}_+)$ и тем самым преобразование Фурье этой функции:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx}\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

обращается в нуль на полуоси $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$ (см. [1, 5]).

Простые примеры показывают, что если $f \in N(\mathbb{C}_+)$, при этом ее граничные значения принадлежат классу $L^1(\mathbb{R})$, то, вообще говоря, $f \notin H^1(\mathbb{C}_+)$, т. е. $\hat{f}$ не обращается в нуль на $\mathbb{R}_-$.

В [6] (см. также [7]) установлено, что если преобразование Фурье функции f достаточно сильно стремится к нулю при $x \to -\infty$, то оно тождественно

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта 1.1704.2014К) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–97508).

равно нулю на $\mathbb{R}_-$, при этом в [6] найдено необходимое и достаточное условие на скорость убывания преобразования Фурье указанных функций, при которых справедливо упомянутое утверждение. С учетом важной роли преобразования Фурье во многих вопросах анализа и других разделах математики (см. [8, 9]) возникает вопрос обобщения этих результатов на многомерный случай. Отметим также, что при доказательстве основного результата в одномерном случае существенно использовалось факторизационное представление функции класса Неванлинны. Хорошо известно, что в многомерном случае такие представления отсутствуют (см. [3]).

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 сформулируем основной результат и приведем вспомогательные утверждения. В § 2 дано доказательство основного результата.

§ 1. Формулировка основного результата статьи и вспомогательные утверждения

Для изложения основных результатов работы нам потребуются следующие обозначения:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j > 0,\ j = 1, \dots, n\},$$

$$\mathbb{R}^n_- = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \le 0,\ j = 1, \dots, n\},$$

$\mathbb{C}^n_+$, $\mathbb{C}^n_-$ — трубчатые области (см. [4, 8]):

$$\mathbb{C}^n_+ = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n) \in \mathbb{R}^n_+\},$$

$$\mathbb{C}^n_- = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n) \in \mathbb{R}^n_-\}.$$

Пусть p_j, $1 \le j \le n$, — неотрицательные монотонно возрастающие функции на $(0, +\infty)$, если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, то $P(x) = (p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_n(x_n))$, если $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n_+$, то $P(|z|) := (p_1(|z_1|), p_2(|z_2|), \dots, p_n(|z_n|))$. Для любого $z \in \mathbb{C}^n$ обозначим

$$\exp(-P(|z|)) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} p_j(|z_j|)\right).$$

Кроме того, в дальнейшем будем предполагать, что

$$p_j(x) = \int_1^x \frac{\omega_j(t)}{t}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}_+,\ j = 1, \dots, n,$$

где ω_j определена на $\mathbb{R}_+$, причем $\omega_j(t) \uparrow +\infty (t \to +\infty)$.

Функции p_j назовем *весовыми*, а вектор-функции $P = (p_1, \dots, p_n)$ — *весовыми вектор-функциями*. Множество всех весовых вектор-функций обозначим через Ω. Для $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ преобразование Фурье функции f обозначим через $\hat{f}$.

В дальнейшем для краткости используем обозначения $\mathbb{C} := \mathbb{C}^1$, $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^1_+$, $\mathbb{R}_- = \mathbb{R}^1_-$, $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C}^1_+$, dm_{2n} — $2n$-мерная мера Лебега на $\mathbb{C}^n$, dm_n — n-мерная мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $H^p(\mathbb{C}^n_+)$, $0 < p < +\infty$, класс Харди аналитических функций в $\mathbb{C}^n_+$, а через $h^p(\mathbb{C}^n_+)$ — класс Харди плюригармонических в $\mathbb{C}^n_+$ функций (см. [3, 4]), $N := N(\mathbb{C}^n_+)$ — класс функций ограниченного вида в $\mathbb{C}^n_+$.

Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $f \in N(\mathbb{C}^n_+)$, при этом граничные значения функции f на $\mathbb{R}^n$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}^n)$ и почти всюду совпадают с граничными значениями некоторой функции из $h^1(\mathbb{C}^n_+)$. Предположим, что*

$$\varlimsup_{y_j\to+\infty}\frac{\ln|f(iy_1,\dots,iy_{j-1},iy_j,iy_{j+1},\dots,iy_n)|}{y_j}\le 0,\quad j=1,\dots,n, \tag{1}$$

при всех $(y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_n)\in\mathbb{R}^{n-1}_+$.

Пусть для любого $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ преобразование Фурье

$$\hat f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac n2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-itx}\,dt$$

функции f удовлетворяет оценке

$$|\hat f(x_1,\dots,x_n)|\le \exp(-P(|x|))=\exp\Bigg(-\sum_{j=1}^n p_j(|x_j|)\Bigg), \tag{2}$$

$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_-$, $P\in\Omega$.

Тогда если

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{p_j(t)}{t^{\frac32}}\,dt=+\infty,\quad j=1,\dots,n, \tag{3}$$

то $\hat f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}^n_-$, а функция f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}^n_+)$.

Обратно, если $P\in\Omega$ и хотя бы один из интегралов (3) сходится или не выполняется условие (1), то можно построить функцию $f\in N(\mathbb{C}^n_+)$ такую, что граничные значения функции f на $\mathbb{R}^n$ принадлежат классу $L^1(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье удовлетворяет оценке (2), при этом $\hat f(x)\ne 0$ не при всех $x\in\mathbb{R}^n_-$, т. е. $f\notin H^1(\mathbb{C}^n_+)$.

Замечание 1. Ясно, что при $n=1$ любая функция из $L^1(\mathbb{R})$ почти всюду совпадает с граничным значением плюригармонической (т. е. гармонической) функции из $h^1(\mathbb{C}_+)$ (см. [1, 2]), но при $n\ge 2$ это не так. Отметим также, что условие $f\in h^1(\mathbb{C}^n_+)$ необходимо для справедливости утверждения теоремы.

Замечание 2. В утверждении теоремы условие (1) нельзя отбросить. Простым примером, удовлетворяющим всем условиям теоремы, кроме (1), является функция вида

$$f_a(z_1,\dots,z_n)=\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^n e^{ia_jz_j}(iN+z_j)^2}, \tag{4}$$

$a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n_+$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n_+$. Ясно, что $\operatorname{supp}\hat f\cap\mathbb{R}^n_-\ne\varnothing$.

Доказательство теоремы основано на нескольких вспомогательных утверждениях. Для их формулировки и доказательства введем дополнительные обозначения. В дальнейшем, если не оговорено иное, через $C=C(\dots)$ будем обозначать положительные константы, зависящие только от $(\dots)$. Далее, если вещественнозначные функции f и g определены на множестве $E\subset\mathbb{C}^n$, то оценка $g(\zeta)\lesssim f(\zeta)$, $\zeta\in E$, означает, что существует положительное число A такое, что $g(\zeta)\le Af(\zeta)$ для любого $\zeta\in E$, а оценка $g(\zeta)\approx f(\zeta)$, $\zeta\in E$, означает, что $f(\zeta)\lesssim g(\zeta)$ и $g(\zeta)\lesssim f(\zeta)$, $\zeta\in E$.

Если $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, то

$$(\zeta - z)^s = \prod_{j=1}^{n} (\zeta_j - z_j)^{s_j}, \quad (\zeta \cdot z)^s = \prod_{j=1}^{n} (\zeta_j \cdot z_j)^{s_j},$$

где выбраны главные ветви степенной функции.

Если $s, \alpha \in \mathbb{R}^n$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то запись $s \geq \alpha$ означает, что $s_j \geq \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$.

Пусть далее $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Символом $A(m_1, \dots, m_n) := A(m)$ обозначим следующие пространства голоморфных функций в $\mathbb{C}_+^n$:

$$A(m) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}_+^n) : \|f\|_{A(m)} = \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} |f(z)| (\operatorname{Im} z)^m \, dm_{2n}(z) < +\infty \right\}. \tag{5}$$

Очевидно, что относительно указанной нормы $A(m)$ является банаховым пространством.

Следующее интегральное представление в одномерном случае легко следует из формулы Коши — Грина (см. [6, 10]), а в случае $n \geq 2$ его нетрудно вывести из одномерного случая.

Лемма 1. *Пусть $f \in A(m)$ и $s > m$. Тогда справедливо интегральное представление*

$$f(z) = C(s) \int\limits_{\mathbb{C}_+^n} \frac{(\operatorname{Im} \zeta)^s f(\zeta)}{(\bar{\zeta} - z)^{s+2}} \, dm_{2n}(\zeta), \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n. \tag{6}$$

Для формулировки леммы 2 введем обозначение $C_A^{(p)}(G) = C^{(p)}(G \cup \partial G) \cap H(G)$, где G — произвольная область в $\mathbb{C}^n$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $C_A(G) := C_A^{(0)}(G)$.

Лемма 2. *Пусть $g \in C_A(\mathbb{C}_-^n)$. Предположим, что*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}_-^n} \left\{ \left| \frac{\partial^{|s+1|} g(z)}{\partial z^{s+1}} \right| (|\operatorname{Im} z|)^{s-m} \right\} < +\infty,$$

$s, m \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда существует предел

$$\Phi(f) = \lim_{y \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x + iy) g(x - iy) \, dx \quad \forall f \in A(m), \tag{7}$$

при этом Φ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $A(m)$, норма которого удовлетворяет оценке

$$\|\Phi\| \leq C(m, s) \sup_{z \in \mathbb{C}_-^n} \left\{ \left| \frac{\partial^{|s+1|} g(z)}{\partial z^{s+1}} \right| (|\operatorname{Im} z|)^{s-m} \right\} < +\infty.$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что если $f \in A(m)$, то $f \in H^1(\mathbb{C}_\eta^n)$ для произвольного $\eta > 0$, где

$$\mathbb{C}_\eta^n = \{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_+^n : \operatorname{Im} z_j > \eta, \ j = 1, \dots, n \}.$$

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_+^n$, $z_j = x_j + iy_j$, $\frac{y_j}{4} \leq \rho_j \leq \frac{y_j}{2}$, $j = 1, \dots, n$. Используя n-субгармоничность функции $|f|$ (см. [3, 4]), имеем

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\pi \rho^2} \int\limits_{K_\rho(z)} |f(\zeta)| \, dm_{2n}(\zeta) \leq \frac{1}{\pi \rho^2} \int\limits_{Q_\rho(z)} |f(\zeta)| \, dm_{2n}(\zeta), \tag{8}$$

где $K_\rho(z)$ — поликруг радиуса ρ с центром в точке z, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, ρ_j удовлетворяют вышеуказанным оценкам, $Q_\rho(z)$ — куб с центром в точке z с ребрами длиной $2\rho_j$, $1 \le j \le n$.

Очевидно, что оценка (8) эквивалентна следующему неравенству:

$$|f(x+iy)| \le \frac{1}{\pi^n \rho^2} \int\limits_{y_n-\rho_n}^{y_n+\rho_n} \cdots \int\limits_{y_1-\rho_1}^{y_1+\rho_1} \int\limits_{x_n-\rho_n}^{x_n+\rho_n} \cdots \int\limits_{x_1-\rho_1}^{x_1+\rho_1} |f(t+is)|\, dt_1 \dots dt_n ds_1 \dots ds_n,$$

$t = (t_1, \dots, t_n)$.

Напомним, что $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $\rho^2 = \prod\limits_{j=1}^{n} \rho_j^2$. Во внутреннем интеграле произведем замену: положим $t_j - x_j = \tau_j$, $j = 1, \dots, n$, $\rho_j = \frac{y_j}{2}$, $j = 1, \dots, n$. Тогда из последней оценки следует, что

$$|f(x+iy)| \le \frac{1}{\pi^n \rho^2} \int\limits_{\frac{y_n}{2}}^{\frac{3}{2}y_n} \cdots \int\limits_{\frac{y_1}{2}}^{\frac{3}{2}y_1} \int\limits_{\frac{-y_n}{2}}^{\frac{y_n}{2}} \cdots \int\limits_{\frac{-y_1}{2}}^{\frac{y_1}{2}} |f(x+\tau+is)|\, d\tau_1 \dots d\tau_n ds_1 \dots ds_n, \quad (9)$$

где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Интегрируя неравенство (9) по $\mathbb{R}^n$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|\, dx \le \frac{2^{2n}}{\pi^n y} \int\limits_{\frac{y_n}{2}}^{\frac{3}{2}y_n} \cdots \int\limits_{\frac{y_1}{2}}^{\frac{3}{2}y_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+is)|\, dx ds. \quad (10)$$

Учитывая пределы интегрирования в (10), имеем

$$\left(\frac{y_j}{2}\right)^{m_j} \le s_j^{m_j} \le \left(\frac{3}{2}y_j\right)^{m_j}, \quad m_j \in Z_+,\ j = 1, \dots, n.$$

Тогда оценка (10) примет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|\, dx \lesssim \frac{1}{y^{1+m}} \int\limits_{\frac{y_n}{2}}^{\frac{3}{2}y_n} \cdots \int\limits_{\frac{y_1}{2}}^{\frac{3}{2}y_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+is)| s^m\, dx_1 \dots dx_n ds_1 \dots ds_n. \quad (11)$$

Таким образом, если $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y_j > \eta > 0$, $j = 1, \dots, n$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|\, dx \lesssim \frac{1}{y_1^{1+m_1} \dots y_n^{1+m_n}} \lesssim \frac{\|f\|_{A(m)}}{\eta^{n+|m|}},$$

поэтому функция f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}^n_\eta)$ при всех $\eta > 0$. Используя интегральное представление функции f из (6), получаем, что если $g \in C_A(\mathbb{C}^n_-)$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+iy) g(x-iy)\, dx = C(s) \int\limits_{\mathbb{C}^n_+} f(\zeta)(\operatorname{Im}\zeta)^s \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{g(x-iy)}{(\bar\zeta - z)^{s+2}}\, dm_n(x) \dots dm_{2n}(\zeta)$$

$$= C(s) \int\limits_{\mathbb{C}^n_+} f(\zeta)(\operatorname{Im}\zeta)^s \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{g(x-iy)}{(x+iy-\bar\zeta)^{s+2}}\, dm_n(x)$$

$$= C(s)(-1)^s \int\limits_{\mathbb{C}^n_+} f(\zeta)(\operatorname{Im}\zeta)^s \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{g_y(x)}{(x-(\bar\zeta - iy))^{s+2}}\, dx. \quad (12)$$

По формуле Коши для полупространства $\mathbb{C}^n_-$ последний интеграл равен

$$C_1(s)\frac{\partial^{|s+1|}g_y(z)}{\partial z_1^{s_1+1}\dots\partial z_n^{s_n+1}}\bigg|_{z=\bar\zeta-iy}.$$

Следовательно, учитывая равенство (12), окончательно получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+iy)g(x-iy)\,dx = C_1(s)\int\limits_{\mathbb{C}^n_+} f(\zeta)\frac{\partial^{|s+1|}g(\bar\zeta-2iy)}{\partial\zeta_1^{s_1+1}\dots\partial\zeta_n^{s_n+1}}(\operatorname{Im}\zeta)^s\,dm_{2n}(\zeta). \quad (13)$$

Если $s\geq m$ и

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{C}^n_-}\left\{\left|\frac{\partial^{|s+1|}g(\zeta)}{\partial\zeta^{s+1}}\right||\operatorname{Im}\zeta|^{s-m}\right\}<+\infty,$$

то легко заметить, что в равенстве (13) можно переходить к пределу, при этом

$$\Phi(f)=\lim_{y\to0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+iy)g(x-iy)\,dx,$$

этот предел существует и равен

$$C_1(s)\int\limits_{\mathbb{C}^n_+} f(\zeta)\frac{\partial^{|s+1|}g(\bar\zeta)(\operatorname{Im}\zeta)^s}{\partial\zeta^{s+1}}\,dm_{2n}(\zeta),$$

следовательно,

$$|\Phi(f)|\lesssim\|f\|_{A(m)}\sup_{\zeta\in\mathbb{C}^n_+}\left\{\left|\frac{\partial^{|s+1|}g(\bar\zeta)}{\partial\zeta^{s+1}}(\operatorname{Im}\zeta)^{s-m}\right|\right\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n_-$ *и*

$$\tau_z(x)=\begin{cases}(-1)^n e^{ixz}, & x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_-,\\ 0, & x=(x_1,\dots,x_n)\notin\mathbb{R}^n_-.\end{cases}$$

Тогда

$$\hat\tau_z(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}i)^n(x-z)},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $\hat\tau_z$ *— преобразование Фурье функции* τ_z.

Доказательство непосредственно следует из определения преобразования Фурье.

Справедлив также следующий аналог леммы 3 в том случае, когда $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n_+$.

Лемма 3′. *Пусть* $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n_+$ *и*

$$\tau_z(x)=\begin{cases}e^{ixz}, & x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+,\\ 0, & x=(x_1,\dots,x_n)\notin\mathbb{R}^n_+.\end{cases}$$

Тогда для преобразования Фурье функций τ_z *справедливо равенство*

$$\hat\tau_z(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}i)^n(x-z)},\quad x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Лемма 4. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ почти всюду совпадает с граничным значением некоторой плюригармонической функции из класса $h^1(\mathbb{C}^n_+)$, а преобразование Фурье этой функции удовлетворяет условиям теоремы. Тогда f можно представить в виде $f = f_+ + f_-$, где $f_- \in C^\infty_A(\mathbb{C}^n_-)$, а f_+ является граничным значением некоторой функции из класса Харди $H^1(\mathbb{C}^n_+)$.*

Доказательство. Пусть $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n_-$. Положим

$$f_-(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t)}{t - z}\, dt. \tag{14}$$

Учитывая равенство Парсеваля (см. [9])

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x)\, dx$$

и лемму 3, имеем

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t)}{t - z}\, dt = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \hat{f}(t) e^{itz}\, dt. \tag{15}$$

Таким же образом, применяя лемму $3'$, получаем, что если $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n_+$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t)}{t - z}\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \hat{f}(t) e^{itz}\, dt. \tag{16}$$

Так как $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $|\hat{f}(x)| \le e^{-P(|x|)}$, $x \in \mathbb{R}^n_-$, из равенства (15) следует, что

$$\frac{\partial^{|m|} f_-(z)}{\partial z^m} = \frac{(m)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t)}{(t - z)^{m+1}}\, dt = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \hat{f}(t) e^{itz} (it)^m\, dt.$$

Стало быть,

$$\left| \frac{\partial^{|m|} f_-(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} \right| \lesssim \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} |\hat{f}(t)|\, |t|^m\, dt \lesssim \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} |t^m| e^{-P(|t|)}\, dt$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} |t_1|^{m_1} \dots |t_n|^{m_n} e^{-p_1(|t_1|) \dots - p_n(|t_n|)}\, dt_1 \dots dt_n < +\infty.$$

Поскольку $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ — произвольный мультииндекс из $\mathbb{Z}^n_+$, получим, что $f_- \in C^\infty_A(\mathbb{C}^n_-)$. Функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, является граничным значением плюригармонической функции из $h^1(\mathbb{C}^n_+)$, поэтому $f_+(t) = f(t) - f_-(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, имеет аналитическое продолжение в $\mathbb{C}^n_+$ и

$$f_+(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t)}{(t - z)}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}^n_+. \tag{17}$$

Остается учесть, что f почти всюду совпадает с граничными значениями некоторой функции из класса Харди $h^1(\mathbb{C}^n_+)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $f \in H^\infty(\mathbb{C}^n_+)$, причем $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}^n_+$. Тогда существует неотрицательная мера μ на $\mathbb{R}^n$ такая, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(t)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)} < +\infty, \quad t = (t_1, \dots, t_n),$$

$$\ln|f(z)| = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y_1 \dots y_n}{|t-z|^2}\, d\mu(t) - \sum_{j=1}^n a_j y_j + C, \tag{18}$$

$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n_+$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, где C — некоторое вещественное число.

Доказательство леммы непосредственно следует из хорошо известных представлений неотрицательных n-гармонических функций в полупространстве (см., например, [3, 8]).

Лемма 6. *Пусть $f \in H^\infty(\mathbb{C}^n_+)$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}^n_+$. Тогда для произвольного $m = (m_1 \dots m_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ существует функция $\Psi_m \in H(\mathbb{C}^n_+)$ такая, что*

$$\frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n} f(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_1^{m_1} \partial z_2^{m_2} \dots \partial z_n^{m_n}} = f(z_1, \dots, z_n)\Psi_m(z_1, \dots, z_n), \tag{19}$$

$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n_+$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, причем существуют положительные числа $s = s(m)$ и $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{Z}^m_+$, $l = l(m)$, для которых справедлива оценка

$$|\Psi_m(z_1, \dots, z_n)| \leq c(m,s)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y_1 \dots y_n\, d\mu(t)}{|t_1 - z_1|^2 \dots |t_n - z_n|^2}\right)^s \frac{1}{y_1^{l_1} \dots y_m^{l_m}}, \tag{20}$$

где μ — представляющая мера функции $u = \ln|f|$ из леммы 5.

Доказательство. Согласно лемме 5

$$\ln|f(z_1, z_2, \dots, z_n)| = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y_1 \dots y_n}{|t_1 - z_1|^2 \dots |t_n - z_n|^2}\, d\mu(t) - \sum_{j=1}^n a_j y_j + C,$$

$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n_+$, $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leq j \leq n$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $a_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, поэтому

$$\begin{aligned} f^{-1}(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_j} \ln|f(z)|^2 \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y_1 \dots y_{j-1} y_{j+1} \dots y_n\, d\mu(t)}{|t_1 - z_1|^2 \dots (t_j - z_j)^2 |t_{j+1} - z_{j+1}|^2 \dots |t_n - z_n|^2}, \end{aligned} \tag{21}$$

$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n_+$.

Так как $f(z)$ не имеет нулей в $\mathbb{C}^n_+$, то $\Psi_j(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} f^{-1}(z)$ принадлежит классу $H(\mathbb{C}^n_+)$, т. е.

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_j} = f(z)\Psi_j(z), \tag{22}$$

$z \in \mathbb{C}^n_+$, $\Psi_j \in H(\mathbb{C}^n_+)$, $1 \leq j \leq n$.

Отметим, что равенство (21) получается из тождества

$$\frac{y_j}{|t_j - z_j|^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\bar{z}_j - t_j} - \frac{1}{z_j - t_j}\right)$$

с учетом $\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{1}{\bar z_j - t_j} = 0$, $z_j \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^n$.

Ясно, что

$$|\Psi_j(z)| \le \frac{1}{y_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y_1\dots y_n\, d\mu(t)}{|t_1 - z_1|^2\dots|t_n - z_n|^2}, \tag{23}$$

$t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n_+$.

Дифференцируя по z_k равенство (22), получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_k} = \frac{\partial f}{\partial z_k}\Psi_j + f\frac{\partial \Psi_j}{\partial z_k} = f\Psi_k\Psi_j + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z_k} f = f\left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial z_k} + \Psi_k\Psi_j\right).$$

Положим

$$\Psi_{k,j}(z) = \Psi_k(z)\Psi_j(z) + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z_k}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n_+. \tag{24}$$

Очевидно, что $\Psi_{k,j}(z) = \Psi_{j,k}(z)$, $z \in \mathbb{C}^n_+$, $k, j = 1, \dots, n$.

Приступим к оценке функций Ψ_j и $\Psi_{j,k}$. Используя равенства (21) и (22), имеем

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial z_k}(z) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\prod\limits_{p=1,\, p\ne j,k}^{n} y_p}{(t_j - z_j)^2(t_k - z_k)^2\cdots\prod\limits_{p=1,\, p\ne j,k}^{n}|t_p - z_p|^2}\, d\mu(t), \tag{25}$$

где, как и выше, $t = (t_1, \dots, t_n)$. Следовательно,

$$\left|\frac{\partial \Psi_j}{\partial z_k}(z)\right| \lesssim \frac{1}{y_k y_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{|t - z|^2}\, d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C}^n_+. \tag{26}$$

Из неравенства (21) следует, что

$$|\Psi_k(z)\Psi_j(z)| \le \frac{1}{y_k y_j}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{|t - z|^2}\, d\mu(t)\right)^2.$$

Объединяя оценки (23) и равенство (26), окончательно получаем

$$|\Psi_{k,j}(z)| \lesssim \frac{1}{y_j y_k}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{|t - z|^2}\, d\mu(t)\right)^2, \quad z \in \mathbb{C}^n_+. \tag{27}$$

Таким образом, лемма доказана в случае $|m| = m_1 + \dots + m_n = 2$, $s = 2$, $l = (0, \dots, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Перейдем к общему случаю. Докажем его методом математической индукции. Предположим, что лемма доказана для $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, и докажем ее при $\widetilde{m} = (m_1, \dots, m_{k-1}, m_k + 1, \dots, m_n)$.

Итак, пусть представление (19) и оценка (20) установлены для всех $k = (k_1, \dots, k_n)$ таких, что $k_j \le m_j$, $j = 1, \dots, n$, докажем их для $\widetilde{m}$. Не умаляя общности, можно предположить, что $\widetilde{m} = (m_1 + 1, m_2, \dots, m_n)$. Тогда из представления (19) имеем

$$\frac{\partial^{|\widetilde{m}|} f}{\partial z^{\widetilde{m}}}(z) = f(z)\left(\Psi_1(z)\Psi_{m_1,\dots,m_n}(z) + \frac{\partial \Psi_{m_1,\dots,m_n}}{\partial z_1}(z)\right). \tag{28}$$

Положим

$$\Psi_{\widetilde{m}}(z) := \Psi_1(z)\Psi_{m_1,\dots,m_n}(z) + \frac{\partial \Psi_{m_1,\dots,m_n}(z)}{\partial z_1}, \quad z \in \mathbb{C}^n_+. \tag{29}$$

Перейдем к оценке функции $\Psi_{\widetilde{m}}$. Из индукционного предположения следует, что

$$|\Psi_1(z)||\Psi_{m_1,\dots,m_n}(z)| \lesssim \frac{1}{(y_1\dots y_n)^s}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{y\,d\mu(t)}{|t-z|^2}\Bigg)^s\frac{1}{y_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{y_1\dots y_n}{|t-z|^2}\,d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{y_1^{s+1}}\frac{1}{y_2^{l_2}\dots y_2^{l_m}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{y\,d\mu(t)}{|t-z|^2}\Bigg)^{s+1}. \quad (30)$$

Остается получить аналогичную оценку для функции $\frac{\partial\Psi_{m_1,\dots,m_n}(z)}{\partial z_1}$, $z\in\mathbb{C}_+^n$.

Пусть $z_1 = x_1+iy_1\in\mathbb{C}_+$, и пусть $K(z_1) = \big\{\zeta\in\mathbb{C} : |\zeta-z_1| < \frac{1}{2}y_1\big\}$. Положим $\tilde{z} = (z_2,\dots,z_n)\in\mathbb{C}_+^{n-1}$. Используя формулу Коши, имеем

$$\frac{\partial\Psi_m(z_1,z_2,\dots,z_n)}{\partial z_1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_1-z_1|=\frac{1}{2}y_1}\frac{\Psi_m(\zeta_1,\tilde{z})}{(\zeta_1-z_1)^2}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\partial\Psi_m(z_1,z_2,\dots,z_n)}{\partial z_1}\right| \le 2\max_{|\zeta_1-z_1|<\frac{1}{2}y_1}\frac{|\Psi_m(\zeta_1,\tilde{z})|}{y_1}, \quad \tilde{z}\in\mathbb{C}_+^{n-1}. \quad (31)$$

Снова воспользуемся индукционным предположением, согласно которому

$$|\Psi_m(z_1,\dots,z_n)| \lesssim \frac{1}{y_1^{l_1}y_2^{l_2}\dots y_2^{l_m}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{y\,d\mu(t)}{|t-z|^2}\Bigg)^s \quad (32)$$

при некотором $s\in\mathbb{R}_+$ и $l = (l_1,\dots,l_m)\in\mathbb{Z}_+^m$. Учитывая (31), продолжим доказательство леммы. Сначала заметим, что если $t_1\in\mathbb{R}$, $\zeta\in K(z_1)$, то

$$|t_1-\zeta| = |t_1-z_1+z_1-\zeta| \ge |t_1-z_1| - |z_1-\zeta|$$

$$\ge |t_1-z_1| - \frac{y_1}{2} \ge |t_1-z_1| - \frac{1}{2}|t_1-z_1| = \frac{|t_1-z_1|}{2}.$$

Поэтому с учетом (31) и (32) приходим к оценке

$$\left|\frac{\partial\Psi_m(z_1,\dots,z_n)}{\partial z_1}\right| \lesssim \frac{1}{y_1^{s+1}y_2^{l_2}\dots y_m^{l_m}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{y\,d\mu(t)}{|t-z|^2}\Bigg)^s.$$

В силу (29) окончательно получаем

$$|\Psi_{m_1+1,m_2,\dots,m_n}(z)| \lesssim \frac{1}{y_1^{l_1+1}y_2^{l_2}\dots y_m^{l_m}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{y\,d\mu(t)}{|t-z|^2}\Bigg)^{s+1},$$

$s\in\mathbb{Z}_+$, $l = (l_1,\dots,l_m)\in\mathbb{Z}_+^m$, $z\in\mathbb{C}_+^n$. Лемма доказана.

Для формулировки леммы 7 введем еще некоторые обозначения. Пусть $f\in A_q(\mathbb{C}_+^n)$, $q = (q_1,\dots,q_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, $z\in\mathbb{C}_+^n$, $f(z)\ne 0$. Обозначим через $E_q(f)$ замыкание множества $H^1(\mathbb{C}_+^n)\cap H^\infty(\mathbb{C}_+^n)f$ в пространстве $A_q(\mathbb{C}_+^n)$. Если $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}_+^n$, то

$$e_\lambda(z) = \exp\Bigg(i\sum_{j=1}^n\lambda_j z_j\Bigg), \quad z = (z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}_+^n.$$

Сужение этой функции на $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через $e_\lambda(x)$.

Лемма 7. *Пусть $m=(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, $\delta>1$, $S\in H^\infty(\mathbb{C}_+^n)$, $S(z)\neq 0$, $z\in\mathbb{C}_+^n$. Тогда функция*

$$\varphi_{m,N,p}(z):=\frac{\partial^m}{\partial z_1^{m_1}\dots\partial z_n^{m_n}}(\widetilde{\varphi}_{N,p}(z)S^\delta(z)e_\lambda(z)),\quad z\in\mathbb{C}_+^n,$$

принадлежит множеству $E_q(S)$ при достаточно больших q_j, $j=1,\dots,n$, где $\widetilde{\varphi}_{N,p}(z)=\prod\limits_{j=1}^n\frac{1}{(z_j+iN)^p}$.

Доказательство. Используя формулу Лейбница, достаточно установить принадлежность функции вида $\prod\limits_{j=1}^n\frac{1}{(z_j+iN)^{p+\tau}}\frac{e_\lambda(z)\partial^{|k|}S^\delta(z)}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_n^{k_n}}$ подпространству $E_q(S)$, где $\tau\in\mathbb{Z}_+$, $0\le\tau\le|m|$, $k=(k_1\dots k_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, $|k|\le|m|$. Для этого применим лемму 6, согласно которой

$$\frac{\partial^{|k|}S^\delta(z)}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_n^{k_n}}=S^\delta(z)\Psi_{k_1,\dots,k_n}(z),\quad z\in\mathbb{C}_+^n,$$

где $\Psi_{k_1,\dots,k_n}$ — функция, построенная в лемме 5 по функции S^δ.

Пусть $\{f_j\}_1^\infty$ — произвольная последовательность из $H^\infty(\mathbb{C}_+^n)\cap H^1(\mathbb{C}_+^n)$,

$$\left\|f_jS-e_\lambda\widetilde{\varphi}_{N,p}\frac{\partial^{|k|}S^\delta}{\partial z^k}\right\|_{A_q(\mathbb{C}_+^n)}=\|f_jS-S^\delta\Psi_k\widetilde{\varphi}_{N,p}e_\lambda\|_{A_q(\mathbb{C}_+^n)},\tag{33}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_{N,p}(z):=\prod_{j=1}^n\frac{1}{(z_j+iN)^{p+\tilde{\tau}}}.$$

Имеем

$$\left\|f_jS-e_\lambda\widetilde{\varphi}_{N,p}\frac{\partial^{|k|}S^\delta}{\partial z^k}\right\|_{A_q(\mathbb{C}_+^n)}\lesssim\|S\|_\infty\|f_j-e_\lambda\Psi_k\widetilde{\varphi}_{N,p}S^{\delta-1}\|_{A_q(\mathbb{C}_+^n)}.$$

Поскольку множество всех функций из $H^\infty(\mathbb{C}_+^n)\cap H^1(\mathbb{C}_+^n)$ всюду плотно в пространстве $A_q(\mathbb{C}_+^n)$, достаточно доказать, что функция $e_\lambda\Psi_k\widetilde{\varphi}_{N,p}S^{\delta-1}$ принадлежит классу $A_q(\mathbb{C}_+^n)$.

В силу того, что $\|e_\lambda\|_\infty\le 1$, достаточно доказать принадлежность функции $\widetilde{\varphi}_{N,p}S^{\delta-1}\Psi_k$ классу $A_q(\mathbb{C}_+^n)$. Используя лемму 6, имеем

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\varphi}_{N,p}\Psi_kS^{\delta-1}\|_{A_q(\mathbb{C}_+^n)}&\lesssim\int\limits_{\mathbb{C}_+^n}|\widetilde{\varphi}_{N,p}(z)||\Psi_k(z)S^{\delta-1}(z)|(\operatorname{Im}z)^q\,dm_{2n}(z)\\&\lesssim\int\limits_{\mathbb{C}_+^n}|\widetilde{\varphi}_{N,p}(z)|S^{\delta-1}(z)\Bigg(\int\limits_{R^n}\frac{y\,d\mu(t)}{|t-z|^2}\Bigg)^s(\operatorname{Im}z)^{q-l}\,dm_{2n}(z),\end{aligned}\tag{34}$$

где $l\in\mathbb{Z}_+^n$.

Заметим, что

$$|S^{\delta-1}(z)|=\exp\Bigg(-(\delta-1)\int\limits_{R^n}\frac{y\,d\mu(t)}{|t-z|^2}\Bigg),\quad\delta>1,\ z\in\mathbb{C}_+^n.$$

Учитывая элементарную оценку $e^{-Y}Y^m \lesssim C(m)$, $Y \geq 0$, $C(m) > 0$, приходим к неравенству

$$|S^{\delta-1}(z)|\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y\,d\mu(t)}{|t-z|^2}\right)^l \lesssim C(l), \quad z \in \mathbb{C}^n_+.$$

Следовательно, из (34) и последней оценки имеем

$$\|\widetilde{\varphi}_{N,p}\Psi_k S^{\delta-1}\|_{A_q(\mathbb{C}^n_+)} \lesssim \int\limits_{\mathbb{C}^n_+} |\widetilde{\varphi}_{N,p}(z)|(\operatorname{Im} z)^{q-l}\,dm_{2n}(z) < +\infty, \tag{35}$$

где $q = (q_1, \dots, q_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, $p > q_j - l_j + 2$, $1 \leq j \leq n$. Лемма доказана.

Следующее утверждение установлено в [6].

Лемма 8. *Пусть P — весовая функция, для которой*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{P(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt < +\infty.$$

Тогда можно построить функцию $G \in N(\mathbb{C}_+) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{G}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, $\widehat{G}(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}_-$, при этом $|\widehat{G}(x)| \leq \exp(-P(|x|))$, $x \in \mathbb{R}_-$.

§ 2. Доказательство основной теоремы

Пусть f — функция ограниченного вида в $\mathbb{C}^n_+$, граничные значения которой на $\mathbb{R}^n$принадлежит классу $L^1(\mathbb{R}^n)$, причем преобразование Фурье этой функции удовлетворяет условиям теоремы. Согласно определению класса ограниченного вида в $\mathbb{C}^n_+$ функция f допускает представление

$$f(z) = \frac{\Psi(z)}{S(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n_+,\ \Psi, S \in H^\infty(\mathbb{C}^n_+). \tag{36}$$

Не умаляя общности, можно считать, что функции S и Ψ удовлетворяют оценкам

$$|\Psi(z)| \lesssim \frac{1}{(1+|z|^2)^p}, \quad |S(z)| \lesssim \frac{1}{(1+|z|^2)^p}, \quad z \in \mathbb{C}^n_+, \tag{37}$$

где p — достаточно большое положительное число. Действительно, если Ψ и S в представлении (36) принадлежат классу $H^\infty(\mathbb{C}^n_+)$, то

$$f(z) = \frac{\Psi(z)\widetilde{\varphi}_{N,p}(z)}{S(z)\widetilde{\varphi}_{N,p}(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n_+,$$

где

$$\widetilde{\varphi}_{N,p}(z) = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^n (z_j + iN)^p}, \quad z \in \mathbb{C}^n_+. \tag{38}$$

Ясно, что в новом представлении функции $\widetilde{\Psi} = \Psi\widetilde{\varphi}_{N,p}$ и $\widetilde{S} = S\widetilde{\varphi}_{N,p}$ удовлетворяют оценкам (37). Продолжим доказательство теоремы. Учитывая равенство (36) и оценки (37), получим тождество $S(z)f(z) = \Psi(z)$, $z \in \mathbb{C}^n_+$, при этом функции S, Ψ, $S \cdot f$ принадлежат классу Харди $H^1(\mathbb{C}^n_+)$. Следовательно, для произвольного $g \in H^\infty(\mathbb{C}^n_+)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)e_\lambda(x)S(x)f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)e_\lambda(x)\Psi(x)\,dx = 0, \tag{39}$$

где, как и прежде,

$$e_\lambda(z) = \exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_j\right),$$

$$z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}_+^n \cup \mathbb{R}^n, \quad \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Используя леммы 3 и 4, из равенства (39) получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)e_\lambda(x)S(x)f_-(x)\,dx = 0 \tag{40}$$

для произвольного $g \in H^\infty(\mathbb{C}_+^n)$.

Заметим, что по лемме 4 $f_- \in C_A^\infty(\mathbb{C}_+^n)$. Поэтому по той же самой лемме f_- по формуле

$$\Phi(G) = \lim_{y\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x+iy)f_-(x-iy)\,dx, \quad G \in A_q(\mathbb{C}_+^n), \tag{41}$$

порождает линейный непрерывный функционал на $A_q(\mathbb{C}_+^n)$ при всех $q \in \mathbb{Z}_+^n$. Ясно, что $e_\lambda Sg \in A_q(\mathbb{C}_+^n)$ при всех $g \in H^\infty(\mathbb{C}_+^n)$ и $q \le p$, где p — число, удовлетворяющее оценке (35). Поэтому равенство (41) можно записать в виде

$$\Phi(e_\lambda Sg) = \lim_{y\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x+iy)S(x+iy)e_\lambda(x+iy)f_-(x-iy)\,dx = 0, \tag{42}$$

$g \in H^\infty(\mathbb{C}_+^n)$.

Зафиксируем p и q, $q \le p$. Равенства (41) и (42) показывают, что функционал Φ, порожденный функцией f_- на пространстве $A_q(\mathbb{C}_+^n)$, аннулирует множество $H^\infty(\mathbb{C}_+^n)S^\delta e_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, и, следовательно, замыкание этого множества в $A_q(\mathbb{C}_+^n)$.

Из леммы 7 следует, что если $E_q(S)$ — замыкание множества $H^\infty(\mathbb{C}_+^n)S$, то функции вида $\frac{\partial^{|m|}}{\partial z^m}(S^\delta e_\lambda)$ принадлежат $E_q(S)$ при выбранных q. Следовательно, Φ ортогонален множеству $\frac{\partial^{|m|}}{\partial z^m}(S^\delta e_\lambda)$ при всех $m \in Z_+^n$.

Итак,

$$\Phi\left(\frac{\partial^{|m|}S^\delta e_\lambda}{\partial z^m}\right) = \lim_{y\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_-(x-iy)\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}$$
$$\times\,(S^\delta(x+iy)e_\lambda(x+iy))\,dx = 0. \tag{43}$$

Для удобства положим

$$S_{\lambda,\delta}(z) = S^\delta(z)e_\lambda(z), \quad z \in \mathbb{C}_+^n. \tag{44}$$

Обозначим преобразование Фурье функции $S_{\lambda,\delta}$ через $\widehat{S}_{\lambda,\delta}(z)$, а преобразование Фурье функции f_- — через $\hat{f}_-$. Тогда, учитывая хорошо известное равенство (см. [9])

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x)G(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{F}(x)\widehat{G}(-x)\,dx, \quad F,G \in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{45}$$

получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \hat{f}_-(t)\widehat{S}_{\lambda,\delta}(-t)t_1^{m_1}t_2^{m_2}\dots t_n^{m_n}\,dt = 0, \tag{46}$$

$m = (m_1,\dots,m_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\delta > 1$.

Зафиксируем $t \in \mathbb{R}_+$, $\widetilde{m} = (m_2,\dots,m_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}_+$ и положим

$$\Psi_1(t) := \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} \hat{f}_-(-t,-t_2,\dots,-t_n)\widehat{S}_{\lambda,\delta}(t,\dots,t_n)t_2^{m_2}\dots t_n^{m_n}\,dt_2\dots dt_n. \tag{47}$$

Тогда равенство (46) можно записать в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Psi_1(t)t^m\,dt = 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{48}$$

Ясно, что все эти интегралы абсолютно сходятся. Применим известный метод из теории весовых приближений многочленами (см. [11, 12]). Положим

$$F_1(z) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Psi_1(t)}{t+z^2}\,dt, \quad z \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}. \tag{49}$$

Докажем, что в условиях теоремы $F_1(z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$. Представим функцию F_1 в виде

$$F_1(z) = \int\limits_0^1 \Psi_1(t)\left(\sum_{k=0}^{m_1} \frac{(-1)^k t^k}{z^{2k+z}} + \frac{(-1)^{m_1+1}t^{m_1+1}}{z^{2(m_1+1)}(t+z^2)}\right)dt, \quad m_1 \in \mathbb{Z}_+.$$

Учитывая равенство (48), получим

$$F_1(z) = \frac{(-1)^{m_1+1}}{z^{2(m_1+1)}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Psi_1(t)t^{m_1+1}}{t+z^2}\,dt. \tag{50}$$

Повторяя выкладки, приведенные при доказательстве теоремы 1 из [6], докажем, что $F_1(z) = 0$, $z \notin \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$. Для полноты изложения приведем эти рассуждения.

Оценим функцию F_1 в полуплоскостях $\mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \geq 1\}$. Используя условие теоремы, имеем

$$|\Psi_1(t)| \lesssim \exp(-p_1(t)) \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} \exp(-\widetilde{P}(\tilde{t}))|\widehat{S}_{\lambda,\delta}(t_1,\dots,t_n)| \cdot t_2^{m_2}\dots t_n^{m_n}\,dt_2\dots dt_n, \tag{51}$$

$t \in \mathbb{R}_+$, где $\widetilde{P}(\tilde{t}) = (p_2(t_2), p_3(t_3),\dots,p_n(t_n))$, $\tilde{t} = (t_2,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^{n-1}_+$.

Применим в последнем интеграле неравенство Коши — Буняковского. В результате получим

$$|\Psi_1(t)| \leq \exp(-p_1(t))\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} e^{-2\widetilde{P}(\tilde{t})}t_2^{2m_2}t_3^{2m_3}\dots t_n^{2m_n}\,dt_2\dots dt_n\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} |\widehat{S}_{\lambda,\delta}(t_1,\dots,t_n)|^2\,dt_2\dots dt_n\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{52}$$

Вспомним, что $S_{\lambda,\delta}(t) = S^{\delta}(t)e_{\lambda}(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, при этом S удовлетворяет оценке (37). Учитывая, что $\widehat{S}_{\lambda,\delta}(t) = \widehat{S}^{\delta}(t-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$, а также теорему Планшереля, выводим, что последний интеграл сходится, причем равномерно ограничен по $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$. Поэтому из (20) и условия теоремы вытекает, что

$$|\Psi_1(t)| \lesssim e^{-p_1(t)}. \tag{53}$$

Подставляя эту оценку в (50), окончательно получаем

$$|F_1(z)| \leq \frac{c}{|z|^{2(m_1+1)}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{|\Psi_1(t)|t^{m_1+1}}{|t+z^2|}\, dt \leq \frac{c_1}{|z|^{2(m_1+1)}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-p_1(t)}t^{m_1+1}}{|t+z^2|}\, dt,\ z \in \mathbb{C}\backslash iR.$$

Если $z \in \mathbb{C}_1$, то

$$|F_1(z)| \leq \frac{c_1}{|z|^{2(m_1+1)}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-p_1(t)}t^{m_1} dt, \quad z \in \mathbb{C}_1.$$

Следовательно,

$$|F_1(z)| \leq c_1 \frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} (\exp(-p_1(t))) \cdot t^{m_1}(t+1)^2}{|z|^{2(m_1+1)}}.$$

Стало быть,

$$|F_1(z)| \leq c_2 \frac{M^{(1)}_{m_1+2}}{|z|^{2(m_1+1)}}, \quad z \in \mathbb{C}_1,\ m_1 \in Z_+, \tag{54}$$

где $M^{(1)}_{m_1} = \sup\limits_{t\geq 0}(\exp(-p_1(t)) \cdot t^{m_1})$.

Из оценки (54) непосредственно следует, что

$$\frac{|F_1(z)|}{|z|^2} \leq c_2 \frac{1}{T_1(|z|^2)},$$

где $T_1(r) = \sup\limits_{n\geq 1} \frac{r^n}{M^{(1)}_n}$, поэтому, положив $z = 1+iy$, получим $\ln|F_1(1+iy)| \leq -\ln T_1(1+y^2) + c_3$. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|F_1(1+iy)|}{1+y^2}\, dy \leq -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln T_1(1+y^2)}{1+y^2}\, dy + c_3\pi. \tag{55}$$

Произведя в последнем интеграле замену $t = y^2+1$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln T_1(1+y^2)}{1+y^2}\, dy = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln T_1(1+y^2)}{1+y^2}\, dy \geq \frac{1}{2}\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln T_1(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt.$$

Используя условия теоремы и хорошо известные свойства весовых функций p_j, $j = 1,\dots,n$ (см. [11, 12]), получим

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln T_1(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt = +\infty.$$

Из теоремы единственности Карлемана для полуплоскостей (см. [1, 2]) $\mathbb{C}_1^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ и $\mathbb{C}_1^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < -1\}$ следует, что $F_1(z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}_1$, тем самым для любого $z \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$. Используя теорему Сохоцкого, получим, что $\Psi_1(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, а значит, при всех $t_1 \in \mathbb{R}_+$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \hat{f}_-(-t_1, -t_2, \dots, -t_n)\widehat{S}_{\lambda,\delta}(t_1, \dots, t_n)t_2^{m_2} \dots t_n^{m_n}\, dt_2 \dots dt_n = 0.$$

Фиксируем точку $t_1 \in \mathbb{R}_+$ и снова рассмотрим функцию

$$\Psi_2(t) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n-2}} \hat{f}_-(-t_1, -t, \dots, -t_n)\widehat{S}_\lambda(t_1, t, \dots, t_n)t_3^{m_3} \dots t_n^{m_n}\, dt_3 \dots dt_n, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Копируем вышеуказанные рассуждения для $\Psi_2(t)$. Для аналитической функции

$$F_2(z) = \int\limits_R \frac{\Psi_2(t)}{t + z^2}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R},$$

имеем $F_2(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}$. Снова применяя теорему Сохоцкого, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}_-(-t_1, -t_2, -t_3, \dots, -t_n)\widehat{S}_{\lambda,\delta}(t_1, \dots, t_n)t_3^{m_3} \dots t_n^{m_n}\, dt_3 \dots dt_n = 0$$

для всех $(m_3, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^{n-2}$. Повторяя эти рассуждения еще $n-2$ раз, получим, что

$$\hat{f}_-(-t_1, -t_2, -t_3, \dots, -t_n)\widehat{S}_{\lambda,\delta}(t_1, \dots, t_n) = 0 \tag{56}$$

для всех $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$.

Докажем, что из равенства (56) следует, что $f_-(t_1, \dots, t_n) = 0$ при всех $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_-^n$. Сначала заметим, что по теореме Пэли — Винера (см. [5, 13])

$$\widehat{S}_{\lambda,\delta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} S_{\lambda,\delta}(t)e^{-itx}\, dt = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} S^\delta(t_1 \dots t_n)e^{i\lambda t}e^{-ixt}\, dt, \tag{57}$$

где по условию теоремы $S \in H^2(\mathbb{C}_+^n) \cap H^\infty(\mathbb{C}_+^n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Напомним, что $H^2(\mathbb{C}_+^n)$ — класс Харди в $\mathbb{C}_+^n$. Поэтому функция S_λ^δ тоже принадлежит классу $H^2(\mathbb{C}_+^n)$, поскольку $\delta > 1$, ввиду представления

$$e_\lambda(z) = \exp\left(i\sum_{j=1}^n \lambda_j z_j\right) \in H^\infty(\mathbb{C}_+^n), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Не ограничивая общности, можно предполагать, что $1 < \delta \le 2$. Из представления (57) следует, что $\widehat{S}_{\lambda,\delta}(x) = \widehat{S}_\delta(x - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$.

Учитывая, что $S_\delta(z) \in H^2(\mathbb{C}_+^n)$, и применяя теорему Пэли — Винера, получаем, что

$$\widehat{S}_\delta(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^n\backslash\mathbb{R}_+^n. \tag{58}$$

Таким образом, из равенства (56) вытекает, что

$$\hat{f}_-(-x_1, \dots, -x_n)\widehat{S}_\delta(x_1 - \lambda_1, x_2 - \lambda_2, \dots, x_n - \lambda_n) = 0, \tag{59}$$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$.

В последнем равенстве можно предполагать, что $x_j \geq \lambda_j$, $j = 1, \dots, n$, поскольку если $\lambda_{j_0} \geq x_{j_0}$ при некотором j_0, то равенство (59) тривиально ввиду тождества (58).

Предположим, что существует такая точка $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, что

$$\widehat{S}_\delta(a_1, \dots, a_n) \neq 0. \tag{60}$$

Положим в равенстве (59) $x_j = a_j + \lambda_j$, $j = 1, \dots, n$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Тогда из (59) имеем

$$\hat{f}_-(-a_1 - \lambda_1, -a_2 - \lambda_2, \dots, -a_n - \lambda_n)\widehat{S}_\delta(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Следовательно,

$$\hat{f}_-(-a_1 - \lambda_1, \dots, -a_n - \lambda_n) = 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+.$$

Поэтому

$$\hat{f}_-(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_- : x_j \leq -a_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Учитывая последнее равенство, получаем

$$\begin{aligned} f_-(z_1, \dots, z_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{-a_n}^{0} \cdots \int\limits_{-a_1}^{0} \hat{f}_-(t_1, \dots, t_n) \exp\Big(i \sum z_j t_j\Big)\, dt_1 \dots dt_n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{0}^{a_n} \cdots \int\limits_{0}^{a_1} \hat{f}_-(-t_1, -t_2, \dots, t_n) \exp\Big[-i \sum z_j t_j\Big]\, dt_1 \dots dt_n. \end{aligned} \tag{61}$$

Из этого равенства следует, что f_- является целой функцией экспоненциального типа в $\mathbb{C}^n$ (см. [13]). Используя равенство $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, по теореме единственности получим, что

$$f(z) = f_+(z) + f_-(z) \tag{62}$$

при всех $z \in \mathbb{C}^n_+$.

По условию теоремы $\hat{f}_- \in L^s(\mathbb{R}^n_-) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_-)$ для всех $1 \leq s < +\infty$. Для фиксированного $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ положим

$$\begin{aligned} F_{\tilde{z}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_{0}^{a_n - 1} \int\limits_{0}^{a_n - 2} \cdots \int\limits_{0}^{a_1} \hat{f}_-(-t_1, \dots, -t_{n-1}, -t) \\ \times \exp\Bigg(-i \sum_{j=1}^{n-1} t_j z_j\Bigg)\, dt_1 \dots dt_{n-1}. \end{aligned}$$

Тогда представление (61) можно записать в виде

$$f_-(z_1, \dots, z_{n-1}, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a_n} F_{\tilde{z}}(t) e^{-itz}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{63}$$

$\tilde{z} := (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Зафиксируем точку $i\tilde{y} := (iy_1, \dots, iy_{n-1}) \in i\mathbb{R}_+^{n-1}$. Учитывая равенство (62) и условие теоремы, получаем для функции $\tilde{f}(iy) := f_-(i\tilde{y}, iy)$ оценку

$$\ln|\tilde{f}(iy)| \le c\left(\ln\frac{1}{y} + \ln|f(iy_1, \dots, iy_{n-1}, iy)|\right),$$

где c — некоторое положительное число. Следовательно,

$$\varlimsup_{y\to+\infty} \frac{\ln|\tilde{f}(iy)|}{y} \le c\left(\varlimsup_{y\to+\infty} \frac{\ln\frac{1}{y} + \ln|f(iy_1, \dots, iy_{n-1}, iy)|}{y}\right).$$

По условию теоремы последний предел — не положительное число, т. е.

$$\varlimsup_{y\to+\infty} \frac{\ln|\tilde{f}(iy)|}{y} \le 0. \tag{64}$$

Используя теорему Пэли — Винера (см [5, 13]) и представление (63), получим $a_n \le 0$. Учитывая, что $a = (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, имеем $a_n = 0$. Повторяя эти рассуждения $n-1$ раз, приходим к равенству $a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_1 = 0$, т. е. $\hat{f}_-(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_-^n$. Следовательно, $f_-(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^n$. Итак, $f(t) = f_+(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$. Поэтому $f \in H^1(\mathbb{C}_+^n)$, и первая часть теоремы доказана.

Перейдем к доказательству второй части. Будем предполагать, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{p_j(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt < +\infty, \quad j = 1, \dots, n. \tag{65}$$

Используя лемму 8, можем построить функции f_j, $j = 1, \dots, n$, такие, что граничные значения на вещественной оси $\mathbb{R}$ суммируемы, f_j имеют ограниченный вид в $\mathbb{C}_+$, причем преобразование Фурье функции f_j удовлетворяет условиям

$$|f_j(x)| \le \exp(-p_j(|x|)), \quad \hat{f}_j(x) \ne 0,\ x \in \mathbb{R}_-,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Более того, $\hat{f}_j(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда искомая функция имеет вид

$$f(z) = \prod_{j=1}^n f_j(z_j), \quad z = (z_1 \dots z_n) \in \mathbb{C}_+^n.$$

Очевидно, что f имеет ограниченный вид в $\mathbb{C}_+^n$, граничные значения этой функции на $\mathbb{R}^n$ принадлежат классу $L^1(\mathbb{R}^n)$ и, кроме того, справедлива оценка

$$|\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)| \le \exp\left(-\sum_{j=1}^n p_j(|x_j|)\right), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_-^n,$$

$$\hat{f}(x) \ne 0,\ x \in \mathbb{R}_-^n, \quad \hat{f}(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}_-^n.$$

Предположим, что существует некоторое натуральное число m, $1 \le m < n$, для которого выполняются условия

$$\int_1^{+\infty} \frac{P_{n_k}(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt < +\infty,\ k = 1, \dots, m, \quad \int_1^{+\infty} \frac{P_{n_k}(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt = +\infty,\ k = m+1, \dots, n.$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $n_k = k$, $k = 1, \dots, n$, т. е.

$$\int_1^{+\infty} \frac{P_j(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt < +\infty,\ j = 1, \dots, m, \quad \int_1^{+\infty} \frac{P_j(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt = +\infty,\ j = m+1, \dots, n. \tag{66}$$

Искомую функцию построим следующим образом:

$$f(z) = G(z_1), \dots, G(z_m)\widetilde{\varphi}_{N,p}(z_{m+1})\widetilde{\varphi}_{N,p}(z_{m+2})\dots\widetilde{\varphi}_{N,p}(z_n), \tag{67}$$

$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_+^n$, G — функция, построенная в лемме 8. Следовательно, преобразование Фурье функции f определяется так:

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \widehat{G}(x_1)\cdot\widehat{G}(x_2)\cdot\ldots\cdot\widehat{G}(x_m)\widehat{\widetilde{\varphi}}_{N,p}(x_{m+1})\widehat{\widetilde{\varphi}}_{N,p}(x_{m+2})\dots\widehat{\widetilde{\varphi}}_{N,p}(x_n). \tag{68}$$

Ясно, что $f \in N(\mathbb{C}_+^n)$, поскольку $G \in N(\mathbb{C}_+)$, $\widetilde{\varphi}_{N,p} \in H^\infty \cap H^2(\mathbb{C}_+)$. По теореме Пэли — Винера (см. [5]) $\widehat{\widetilde{\varphi}}_{N,p}(x) = 0$, если $-\infty \le x < 0$, поэтому $\hat{f}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_-^n$. Следовательно,

$$|\hat{f}(x)| \le \exp(-P(|x|)), \tag{69}$$

если $x \in \mathbb{R}_-^n$.

Но по лемме 8 $f \notin H^p(\mathbb{C}_+)$ ни при каких $p > 0$, поэтому $f \notin H^1(\mathbb{C}_+^n)$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Duren P.* Theory of H^p spaces. New York: Acad. Press, 1970.
2. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
3. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974.
4. *Бохнер С., Мартин У.* Функции многих комплексных переменных. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.
5. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной плоскости. М.: Наука, 1964.
6. *Шамоян Ф. А.* О преобразовании Фурье функций класса Р. Неванлинны в полуплоскости // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 4. С. 218–240.
7. *Шамоян Ф. А.* Характеристика скорости убывания коэффициентов Фурье функций ограниченного вида и классы аналитических функций с бесконечно дифференцируемыми граничными значениями // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 943–953.
8. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
9. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
10. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
11. *Koosis P.* The logarithmic integral. I. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
12. *Мергелян С. Н.* Весовые приближения многочленами // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 5. С. 102–152.
13. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.

Статья поступила 15 декабря 2015 г.

Шамоян Файзо Агитович
Брянский гос. университет им. И. Г. Петровского,
ул. Бежицкая, 14, Брянск 241036
shamoyanfa@yandex.ru