Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 517.518.1+514.747

ПОВЕРХНОСТИ–ГРАФИКИ НА ПЯТИМЕРНЫХ СУБЛОРЕНЦЕВЫХ СТРУКТУРАХ

М. Б. Карманова

Аннотация. Исследованы пространственноподобные поверхности-графики коразмерности два на пятимерных сублоренцевых структурах с двумя отрицательными направлениями разных степеней: установлены дифференциальные свойства отображений-графиков и доказана формула площади для соответствующих поверхностей-образов.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.113

Ключевые слова: пятимерная сублоренцева структура, полиномиальная субриманова дифференцируемость, внутренняя мера, формула площади.

В статье исследованы пространственноподобные поверхности-графики на пятимерных сублоренцевых структурах глубины 2. В данной статье впервые рассмотрены

1) поверхности-графики коразмерности 2 на неголономных структурах;

2) сублоренцевы структуры с двумя «отрицательными» направлениями (вдоль которых квадрат длины отрицателен);

3) двуступенчатые группы Карно с сублоренцевой структурой на обоих касательных подрасслоениях (т. е. имеющих «отрицательные» направления и степени 1, и степени 2).

Сублоренцева геометрия — новая малоизученная область в неголономной геометрии. Ее можно интерпретировать как субриманово обобщение геометрии Минковского (см., например, [1]). Статья [2] является одной из первых работ, в которых исследовались подобные структуры. Позже [3–8] даны описание и свойства достижимых множеств на классах сублоренцевых структур, исследованы геодезические [9] и выведены глобальные свойства структур [10]. Некоторые свойства сублоренцевых структур установлены на группах $\mathbb{H}$-типа, в частности, изучены геодезические и их связь с описанием движения релятивистской частицы в постоянном равномерном электромагнитном поле [11, 12]. Применение сублоренцевых структур к задачам физики описано в [13, 14]. Обратим внимание, что в [13] рассматриваются пятимерные структуры.

Опишем основную исследуемую в статье сублоренцеву структуру и поверхности на ней. Для этого сначала введем неголономную структуру на пятимерном пространстве и опишем способ построения графиков отображений.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

Пример 1. Рассмотрим $\mathbb{R}^5$ с координатами $(x_1, \dots, x_5)$ и построим на нем следующие векторные поля:

$$X_1 = \partial_{x_1} + \frac{x_2}{2}\partial_{x_3} + \frac{x_4}{2}\partial_{x_5}, \quad X_2 = \partial_{x_2} - \frac{x_1}{2}\partial_{x_3}, \quad X_3 = -\partial_{x_3},$$
$$X_4 = \partial_{x_4} - \frac{x_1}{2}\partial_{x_5}, \quad X_5 = -\partial_{x_5}.$$

В этом случае $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_4] = X_5$, а остальные коммутаторы равны нулю. Следовательно, оба распределения $\{X_1, X_2, X_3\}$ и $\{X_1, X_4, X_5\}$ интегрируемы. Обозначим проходящее через начало координат интегральное многообразие распределения $\{X_1, X_2, X_3\}$ символом $\mathbb{H}_1$, а интегральное многообразие $\{X_1, X_4, X_5\}$, проходящее через начало координат, — символом $\mathbb{H}_2$. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ класса C^1_H, т. е. такое, горизонтальные производные которого существуют всюду, непрерывны и принадлежат горизонтальному подрасслоению $\mathbb{H}_2$.

Заметим, что любое отображение групп Гейзенберга топологической размерности три можно представить в аналогичном виде: достаточно в образе и прообразе перейти в координаты в $\mathbb{R}^3$ и отождествить (при необходимости с масштабированием) первую координату в образе и прообразе. Поэтому будем считать случай, описанный в примере 1, основным.

Определение 2. Пусть $\varphi : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ — отображение групп Гейзенберга топологической размерности три. Представим его в виде отображения подмножеств $\mathbb{R}^5$, как описано в примере 1, и обозначим его координатные функции относительно базиса $\{X_1, X_4, X_5\}$ символами φ_1, φ_4 и φ_5 соответственно. Положим значение *графика отображения* φ_Γ на элементе $x = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{3} x_j X_j\right)$ равным

$$\varphi_\Gamma(x) = \exp(\varphi_1(x)X_1 + \varphi_4(x)X_4 + \varphi_5(x)X_5)(x).$$

Как видно из определения, обе координаты при X_1 влияют на определение графика. Тем не менее случай образа такого отображения-графика, а именно поверхности-графика в пятимерной неголономной структуре над трехмерной, наиболее интересен для изучения. Действительно, дополнение трехмерной структуры группы Гейзенберга топологической размерности три $\mathbb{H}_1$ двумя горизонтальными полями $\{Y_1, Y_2\}$ и построение графика отображения $\varphi : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{R}^2$ по принципу

$$x \mapsto \exp(\varphi_1(x)Y_1 + \varphi_2(x)Y_2)(x)$$

принципиально не отличаются от задачи в [15]. Далее, если определить на $\mathbb{R}^2$ два векторных поля степеней 1 и 2 и предположить, что контактные отображения $\mathbb{H}_1$ в $\mathbb{R}^2$ с такими полями существуют, то их неголономные дифференциалы должны быть тривиальны (как горизонтальные гомоморфизмы). Поэтому данный случай также интерес не представляет.

Введем сублоренцеву структуру на $\mathbb{R}^5$ следующим образом.

Определение 3. Для векторного поля с постоянными коэффициентами $V = \sum\limits_{j=1}^{5} x_j X_j$ положим

$$\mathbf{d}_\infty^{SL^2}(V) = \max\bigl\{\max\left\{x_1^2, x_2^2\right\} - x_4^2, |x_3| - |x_5|\bigr\}.$$

Обозначим $n_1(V) = \max\left\{x_1^2, x_2^2\right\} - x_4^2$ и $n_2(V) = |x_3| - |x_5|$ и определим *сублоренцеву норму*

$$\mathbf{d}_\infty^{SL}(V) = \begin{cases} \max\{\sqrt{n_1(V)}, \sqrt{n_2(V)}\}, & n_1(V) \geq 0,\ n_2(V) \geq 0, \\ \sqrt{n_1(V)}, & n_1(V) \geq 0,\ n_2(V) \leq 0, \\ \sqrt{n_2(V)}, & n_2(V) \geq 0,\ n_1(V) \leq 0, \\ i\max\{\sqrt{|n_1(V)|}, \sqrt{|n_2(V)|}\}, & n_1(V) \leq 0,\ n_2(V) \leq 0. \end{cases}$$

Сублоренцева норма $\mathbf{d}_\infty^{SL}(V(x_0))$ вектора $V(x_0) = \sum\limits_{j=1}^{5} x_j X_j(x_0)$ определяется аналогично.

Замечание 4. Величину $\mathbf{d}_\infty^{SL^2}$ можно интерпретировать как квадрат скалярного произведения. Тем не менее в общем случае $\left(\mathbf{d}_\infty^{SL}(V)\right)^2 \neq \mathbf{d}_\infty^{SL^2}(V)$.

Определение 5. Пусть $w = \exp(V)(v)$, где $V = \sum\limits_{j=1}^{5} x_j X_j$. Положим

$$d_\infty^{SL^2}(v, w) = \mathbf{d}_\infty^{SL^2}(V), \quad d_\infty^{SL}(v, w) = \mathbf{d}_\infty^{SL}(V).$$

Величина $d_\infty^{SL}(v, w)$ называется *сублоренцевым расстоянием.*

Обозначение 6. Полученную структуру ($\mathbb{R}^5$ с системой полей $\{X_j\}_{j=1}^5$, функциями $\mathbf{d}_\infty^{SL^2}$, $\mathbf{d}_\infty^{SL}$, $d_\infty^{SL^2}$ и d_∞^{SL} и групповой операцией, определяемой коммутаторами базисных полей) обозначим символом ${}^s\mathbb{L}$.

Определение 7. *Шар* относительно d_∞^{SL} с центром в точке v и радиуса r — это множество $\mathrm{Box}^{SL}(v, r) = \left\{x \in {}^s\mathbb{L} : d_\infty^{SL^2}(v, x) < r^2\right\}$.

Замечание 8. Особенность, описанная в замечании 4, не влияет на определение сублоренцева шара. Действительно, шар можно эквивалентно определить как множество $\left\{x \in {}^s\mathbb{L} : \left(d_\infty^{SL}(v, x)\right)^2 < r^2\right\}$.

Обозначение 9. Здесь и далее в статье символ θ_v обозначает экспоненциальное отображение относительно точки v, действующее из окрестности нуля евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ в окрестность точки v нильпотентной градуированной группы Ли топологической размерности N:

$$(w_1, \ldots, w_N) \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^{N} w_j X_j\right)(v).$$

Замечание 10. Прообраз $\theta_v^{-1}(\mathrm{Box}^{SL}(v, r))$ — это декартово произведение множеств $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \max\left\{x_1^2, x_2^2\right\} - x_3^2 < r^2\right\}$ и $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |y_1| - |y_2| < r^2\}$.

Определение 11 (см. [1]). Если сублоренцева норма $\mathbf{d}_\infty^{SL}(V(x_0))$ вектора $V(x_0) = \sum\limits_{j=1}^{5} x_j X_j(x_0)$ положительна, то он называется *пространственноподобным*, если нулевая, то *светоподобным* а если мнимая — то *времениподобным.*

Определение 12 (см. [1]). Поверхность называется *пространственноподобной*, если ее касательные векторы только пространственноподобные. Если в каждой точке среди ее касательных векторов есть времениподобные, то поверхность называется *времениподобной.*

Определение 13. Пусть $v \in {}^s\mathbb{L}$. Множество

$$\left\{x = \exp\left(\sum_{j=1}^{5} x_j X_j\right)(v) \in {}^s\mathbb{L} : \max\left\{x_1^2, x_2^2\right\} - x_4^2 = |x_3| - |x_5| = 0\right\}$$

называется *световым конусом* с центром в v.

Замечание 14 (см. также [16]). На исследуемом пространстве ${}^s\mathbb{L}$ сублоренцева структура введена глобально, т. е. на всех подрасслоениях полей. В случае четырехмерной группы, где сублоренцева структура введена только на горизонтальном подрасслоении из трех базисных полей Y_1, Y_2 и Y_3 (см. [15]), в качестве светового конуса принимается множество

$$\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^{4} y_j Y_j\right)(v) : \max\left\{y_1^2, y_2^2\right\} - y_3^2 = 0\right\},$$

где на четвертую координату (как на соответствующую подрасслоению без направлений с отрицательным квадратом длины) нет никаких ограничений.

Подчеркнем, что в определениях 11–13 рассматривается исходный базис. Однако аналогичные понятия можно ввести и для любого другого базиса. Поэтому при необходимости далее будем говорить, что введенные выше термины понимаются относительно определенного базиса.

Напомним одно из ключевых понятий — определение субримановой дифференцируемости.

Определение 15 [17]. Отображение $\varphi : U \to \widetilde{\mathbb{L}}$, $U \subset \mathbb{L}$, где $\mathbb{L}$ и $\widetilde{\mathbb{L}}$ — произвольные пространства Карно — Каратеодори, *hc-дифференцируемо* в точке $x \in U$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathscr{L}_x : \mathscr{G}^x\mathbb{L} \to \mathscr{G}^{\varphi(x)}\widetilde{\mathbb{L}}$ локальных однородных групп такой, что

$$d_\infty(\varphi(w), \mathscr{L}_x\langle w\rangle) = o(d_\infty(x, w)), \quad U \ni w \to x.$$

hc-Дифференциал $\mathscr{L}_x$ в точке x обозначается символом $\widehat{D}\varphi(x)$.

Так как группы Гейзенберга и Карно являются частными случаями пространств Карно — Каратеодори, липшицевы (в субримановом смысле) отображения таких групп hc-дифференцируемы [17] почти всюду. В этом случае локальные однородные группы совпадают с самими группами.

Введем понятие отображения класса C_H^1 и напомним его свойства.

Определение 16 (см., например, [17]). Пусть Ω — область в $\mathbb{H}_1$, а $\varphi : \Omega \to \mathbb{H}_2$. Отображение φ *принадлежит классу* C_H^1, если горизонтальные производные $X_1\varphi$ и $X_2\varphi$ существуют всюду на Ω, непрерывны и принадлежат горизонтальному подрасслоению в образе.

В данной статье мы исследуем графики отображений с непрерывными горизонтальными производными; класс C_H^1 таких отображений является субримановым аналогом класса C^1, и обычно рассуждения для липшицевых (в субримановом смысле) отображений отличаются от изучаемых наличием некоторых выкладок технического характера (см., например, доказательство основного результата в [18]). Известно [17], что отображения класса C_H^1 непрерывно hc-дифференцируемы всюду.

Теорема 17 [17]. *Пусть $\mathbb{L}$ — многообразие Карно, $D \subset \mathbb{L}$ — открытое множество, $\widetilde{\mathbb{L}}$ — пространство Карно — Каратеодори и $\varphi \in C^1_H(D, \widetilde{\mathbb{L}})$. Тогда φ непрерывно hc-дифференцируемо всюду на D.*

Для изучения свойств графиков напомним

Определение 18 [19, 20]. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа Ли, $E \subset \mathbb{G}$, $\psi : E \to \widetilde{\mathbb{G}}$, и $\widetilde{\mathfrak{d}} : \psi(E) \times \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{R}_+$. Отображение ψ *полиномиально hc-дифференцируемо в точке $x \in E$ относительно $\tilde{\mathfrak{d}}$*, если существует отображение $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такое, что

1) $\tilde{\mathfrak{d}}(\psi(w), \mathscr{L}_x\langle w\rangle) = o(d_\infty(x, w))$, $E \ni w \to x$;

2) $\mathscr{L}_x(w) = \theta_{\psi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w)$; где L_x — оператор с полиномиальными по $\{w_j\}_{j=1}^N$ коэффициентами, $\exp\biggl(\sum\limits_{j=1}^N w_j X_j\biggr)(x) = w$, а N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Отображение $\mathscr{L}_x$ называется *полиномиальным hc-дифференциалом* отображения ψ в точке x и обозначается символом $\widehat{D}_P\psi(x)$.

Определение 19 (см., например, [17]). Пусть $\mathbb{L}$ — пространство Карно — Каратеодори с базисом $\{X_j\}_{j=1}^N$ и $v, w \in \mathbb{L}$. Набор $\theta_v^{-1}(w) \in \mathbb{R}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* точки w относительно v (в базисе $\{X_j\}_{j=1}^N$).

Замечание 20. Из описания структуры ${}^s\mathbb{L}$ следует, что всякое φ, описанное в определении 2, отображает «плюсовые» координаты (x_1, x_2, x_3) в «минусовые» (x_4, x_5) (см. также определения 3 и 5).

Теорема 21 (ср. с [19, 20]). *График φ_Γ, описанный в определении 2, отображения φ, принадлежащего классу C^1_H, непрерывно полиномиально hc-дифференцируем всюду. В качестве $\tilde{\mathfrak{d}}$ используется квазиметрика d_∞.*

Доказательство. Как в случае с поверхностями-графиками, лежащими в четырехмерном пространстве, и другими задачами, для доказательства полиномиальной hc-дифференцируемости рассмотрим близкие точки $x, y \in {}^s\mathbb{L}$ и выразим $\varphi_\Gamma(y)$ в терминах координат y относительно x. Имеем (см. определение 2) $x = \exp(-\varphi_1(x)X_1 - \varphi_4(x)X_4 - \varphi_5(x)X_3)(\varphi_\Gamma(x))$, $y = \exp(y_1X_1 + y_2X_2 + y_3X_3)(x)$; тогда

$$y = \exp((y_1 - \varphi_1(x))X_1 + y_2X_2 + \bar{y}_3X_3 - \varphi_4(x)X_4 + \bar{y}_5X_5)(\varphi_\Gamma(x)),$$

где

$$\bar{y}_3 = y_3 - \frac{1}{2}y_2\varphi_1(x), \quad \bar{y}_5 = -\varphi_5(x) + \frac{1}{2}y_1\varphi_4(x).$$

Аналогично для $\varphi_\Gamma(y) = \exp(\varphi_1(y)X_1 + \varphi_4(y)X_4 + \varphi_5(y)X_5)(y)$ получаем

$$\begin{aligned}\varphi_\Gamma(y) = \exp((y_1 + \varphi_1(y) - \varphi_1(x))X_1 + y_2X_2 + \tilde{y}_3X_3 \\ + (\varphi_4(y) - \varphi_4(x))X_4 + \tilde{y}_5X_5)(\varphi_\Gamma(x)),\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\tilde{y}_3 = y_3 - \frac{1}{2}y_2\varphi_1(x) - \frac{1}{2}y_2\varphi_1(y) = y_3 - \frac{1}{2}y_2(\varphi_1(x) + \varphi_1(y))$$

и

$$\begin{aligned}\tilde{y}_5 &= \varphi_5(y) - \varphi_5(x) + \frac{1}{2}y_1\varphi_4(x) + \frac{1}{2}(\varphi_4(x)\varphi_1(y) + (y_1 - \varphi_1(x))\varphi_4(y)) \\ &= \varphi_5(y) - \varphi_5(x) + \frac{1}{2}y_1(\varphi_4(x) + \varphi_4(y)) + \frac{1}{2}(\varphi_4(x)\varphi_1(y) - \varphi_1(x)\varphi_4(y)).\end{aligned}$$

Рассмотрим точку z с координатами $(z_1, \dots, z_5)$ в базисе $\{X_i\}_{i=1}^5$ относительно $\varphi_\Gamma(x)$, где

$$z_1 = y_1 + (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_1, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3 - y_2\varphi_1(x) - \frac{y_2}{2}(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_1,$$

$$z_4 = (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_4, \quad z_5 = y_1\varphi_4(x) + \frac{y_1}{2}(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_4 + (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_5$$

(здесь координатные функции hc-дифференциала $\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle$, как и φ, имеют номера 1, 4 и 5). Полиномиальный hc-дифференциал отображения-графика φ_Γ в точке x — это отображение $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)$, сопоставляющее точке с координатами первого рода (y_1, y_2, y_3) относительно x элемент с координатами $(z_1, \dots, z_5)$ относительно $\varphi_\Gamma(x)$. Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что

$$\tilde{y}_5 = y_1\varphi_4(x) + \frac{y_1}{2}\varphi_4(y) + \Delta_5(\varphi, x, y),$$

где $\Delta_5(\varphi, x, y)$ — координата с номером 5 точки $\varphi(y)$ относительно $\varphi(x)$, а

$$z_5 = y_1\varphi_4(x) + \frac{y_1}{2}(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_4 + \Delta_5(\widehat{D}\varphi, x, y),$$

здесь $\Delta_5(\widehat{D}\varphi, x, y)$ — координата с номером 5 точки $\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle$ относительно $\varphi(x)$. Поэтому выполнение соотношения из определения полиномиальной субримановой дифференцируемости проверяется непосредственными вычислениями. Теорема доказана. □

Для дальнейшего доказательства формулы площади потребуются некоторые ограничения на субриманов дифференциал φ, чтобы поверхность-график не пересекала световой конус, а также на вторые производные координатной функции φ_1 для верной формулировки свойства полиномиальной дифференцируемости в адекватном базисе (см. далее предположение 23).

Обозначение 22. Далее в статье символами d_{11}, d_{12} и d_{22} обозначены коэффициенты соответственно при y_1^2, y_1y_2 и y_2^2 в разложении φ_1 в ряд Тейлора до второго порядка.

Предположение 23. *Далее будем считать, что*

1) $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}^1$ *— группа Гейзенберга,* $\Omega \subset \mathbb{H}_1$ *— открытое множество,*
2) $\varphi : \Omega \to \mathbb{H}_2$ *— отображение класса* C_H^1,
3) *первая координатная функция* $\varphi_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ *— отображение класса* C^2,
4) $|X_1\varphi_1|, |X_2\varphi_1|, |X_3\varphi_1|, |X_1\varphi_4|, |X_2\varphi_4| \le \frac{1}{2} - c$, $|(\widehat{D}\varphi)_{53}| \le \frac{1}{4} - c$, $c > 0$,
5) $\left|\frac{\varphi_4(x)}{1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(x)}\right| \le \frac{1}{3} - c$, $c > 0$,
6) *всюду верно* $|d_{11}(x)| + |d_{12}(x)| + |d_{22}(x)| \le \frac{1}{2} - c$, $c > 0$, *где*

$$\varphi_1(y) = \varphi_1(x) + \widehat{D}\varphi_1(x)\langle y\rangle + (D\varphi_1(x))_3 y_3 \\ + d_{11}(x)y_1^2 + d_{12}(x)y_1y_2 + d_{22}(x)y_2^2 + o(d_\infty(x,y)^2)$$

для $y = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{3} y_j X_j\right)(x)$.

Определение 24. Фиксируем $x \in {}^s\mathbb{L}$ и рассмотрим новый базис:

$$\widetilde{X}_1^x = X_1(1 + (\widehat{D}\varphi)_{11}(x)) + \varphi_4(x)X_5, \quad \widetilde{X}_2^x = X_2 + (\widehat{D}\varphi)_{12}(x)X_1 - \varphi_1(x)X_3,$$

$$\widetilde{X}_3^x = X_3 - \frac{\varphi_4(x)}{1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(x)}(D\varphi_1(x))_3 X_5, \quad \widetilde{X}_4^x = X_4, \quad \widetilde{X}_5^x = X_5.$$

Этот базис называется *внутренним*, или *адаптированным*, в точке x.

Замечание 25. При выполнении условий предположения 23 определение адаптированного базиса корректно, так как замена невырожденна.

Определение 26. На ${}^s\mathbb{L}$ нормальные координаты точки q относительно точки p (в базисе $\{\widetilde{X}_j^x\}_{j=1}^5$), где $x \in \mathbb{H}_1$, вводятся аналогично тому, как описано в определении 19.

Свойство 27. *В нормальных координатах (в исходном базисе в прообразе и адаптированном в точке x базисе в образе) полиномиальный субриманов дифференциал сопоставляет точке (y_1, y_2, y_3) элемент $(z_1, \dots, z_5)$, где*

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3 - \frac{y_2}{2}(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_1, \quad z_4 = \widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle_4,$$
$$z_5 = (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_5 + \frac{y_1}{2}(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_4$$
$$-\frac{\varphi_4(x)}{1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(x)}\big(d_{11}(x)y_1^2 + d_{12}(x)y_1y_2 + d_{22}(x)y_2^2\big)$$
$$-\frac{\varphi_4(x)(D\varphi_1(x))_3}{1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(x)}\frac{y_2}{2}(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_1.$$

Если в качестве $\tilde{\mathfrak{d}}(v,w)$ рассмотреть величину $\max\{|w_j|^{\frac{1}{\deg X_j}}\}$, которая сопоставляется каждой паре точек v и w, где $w = \exp\Big(\sum\limits_{j=1}^5 w_j \widetilde{X}_j^x\Big)(v)$, то в точке x отображение φ_Γ полиномиально hc-дифференцируемо относительно $\tilde{\mathfrak{d}}$. Это следует из непосредственных вычислений: достаточно выразить координаты $\varphi_\Gamma(y)$ относительно $\varphi_\Gamma(x)$ в новом базисе и учесть, что

$$X_1 = \frac{1}{1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(x)}\big(\widetilde{X}_1^x - \varphi_4(x)X_5\big) = \frac{1}{1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(x)}\big(\widetilde{X}_1^x - \varphi_4(x)\widetilde{X}_5^x\big).$$

Кроме того,

$$\varphi_1(y) = \varphi_1(x) + \widehat{D}\varphi_1(x)\langle y\rangle + (D\varphi_1(x))_3 y_3$$
$$+ d_{11}(x)y_1^2 + d_{12}(x)y_1y_2 + d_{22}(x)y_2^2 + o(d_\infty(x,y)^2),$$

так как $y_3 = O(d_\infty(x,y)^2)$. Подчеркнем, что слагаемые, зависящие от вторых производных φ_1, нужны для адекватной аппроксимации отображения-графика полиномиальным субримановым дифференциалом в новом базисе.

Как видно из доказанного, у поверхности-графика может не быть касательных векторов в классическом смысле. Расширим понятие пространственноподобной поверхности для нашего случая сублоренцевой структуры ${}^s\mathbb{L}$. Сформулируем определение для адаптированного базиса.

Введем следующий термин для поверхностей-образов.

Определение 28. Поверхность-образ $S \subset {}^s\mathbb{L}$ взаимно-однозначного отображения ψ называется *пространственноподобной* (относительно адаптированного базиса), если для любой ее точки $v \in S$ существует $r_0 > 0$ такое, что пересечение $\widetilde{S}_v \cap B(v,r)$, где $\widetilde{S}_v$ — образ полиномиального дифференциала $\widehat{D}_P\psi(\psi^{-1}(v))$, (за исключением v) лежит строго вне светового конуса с центром в v для любого $r \leq r_0$, т. е. лежит в множестве

$$\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^{5} x_j \widetilde{X}_j^{\psi^{-1}(v)}\right)(v) : \max\left\{\max\{x_1^2, x_2^2\} - x_4^2, |x_3| - |x_5|\right\} > 0\right\}.$$

Здесь B — шар в (суб)римановой (квази)метрике.

Замечание 29. В случае, когда ${}^s\mathbb{L} = \mathbb{G}$, где $\mathbb{G}$ — четырехмерная группа, на которой сублоренцева структура введена только на горизонтальном подрасслоении из трех базисных полей Y_1, Y_2 и Y_3, поверхность-образ взаимнооднозначного отображения ψ является *пространственноподобной* (относительно адаптированного базиса), если для любой ее точки $v \in S$ существует $r_0 > 0$ такое, что пересечение $\widetilde{S}_v \cap B(v, r) \cap \exp\left(\widetilde{H}_1^{\psi^{-1}(v)s}\mathbb{L}\right)(v)$, где $\widetilde{S}_v$ — образ полиномиального дифференциала $\widehat{D}_P\psi(\psi^{-1}(v))$, (за исключением v) лежит строго вне светового конуса с центром в v для любого $r \leq r_0$, т. е. лежит в множестве

$$\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^{3} y_j \widetilde{Y}_j^{\psi^{-1}(v)}\right)(v) : \max\left\{y_1^2, y_2^2\right\} - y_3^2 > 0\right\}.$$

Здесь $\exp\left(\widetilde{H}_1^{\psi^{-1}(v)s}\mathbb{L}\right)(v) = \left\{\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{3} y_j \widetilde{Y}_j^{\psi^{-1}(v)}\right)(v) : (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3\right\}$. На четвертую координату (как на соответствующую подрасслоению без направлений с отрицательным квадратом длины) нет никаких ограничений.

В случае, когда векторные поля $\{X_j\}_{j=1}^5$ постоянные, это определение эквивалентно понятию пространственноподобной поверхности, приведенному в [1].

Определим новую меру, согласованную со структурой адаптированных векторных полей, для множеств, лежащих в образе отображения-графика.

Определение 30. Пусть $\Omega \subset \mathbb{H}_1$ — открытое множество и $\varphi \in C_H^1(\Omega, \mathbb{H}_2)$. Рассмотрим точку $p \in \Omega$ и ее окрестность $\mathscr{U} \subset \Omega$, $\mathscr{U} \ni p$, на которой величина $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости достаточно мала. Пусть $S \subset \varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ и $\delta > 0$. Определим функцию множеств

$$\left({}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4\right)_\delta(S) = 8 \inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^4 : \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(x_j, r_j) \supset S,\ x_j \in S,\ r_j < \delta,\ j \in \mathbb{N}\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества S, а $\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(v, r)$ — *адаптированный шар*:

$$\left\{w = \exp\left(\sum_{j=1}^{5} w_j \widetilde{X}_j^{\varphi_\Gamma^{-1}(v)}\right)(v) : \max\Big\{\max\left\{w_1^2, w_2^2\right\} - w_4^2,\right.$$
$$\left.\min\left\{27(|w_3| - |w_5|), \left(1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(\varphi_\Gamma^{-1}(v))\right)|w_3|\right\}\Big\} < r^2\right\}.$$

Положим *внутреннюю*, или *адаптированную*, *меру* равной

$${}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4(S) = \lim_{\delta\to 0}\left({}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4\right)_\delta(S).$$

Иными словами, для отображения θ_v^{-1}, построенного по адаптированному базису $\{\widetilde{X}_j^{\varphi_\Gamma^{-1}(v)}\}_{j=1}^5$, верно

$$\theta_v^{-1}\bigl(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(v,r)\bigr) = \bigl\{(y_1,y_2,y_4) : \max\bigl\{y_1^2,y_2^2\bigr\} - y_4^2 < r^2\bigr\}$$
$$\times \left\{(y_3,y_5) : |y_3| - |y_5| < \frac{r^2}{27} \text{ или } |y_3| < \frac{r^2}{1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(\varphi_\Gamma^{-1}(v))}\right\}.$$

Замечание 31. Если определить для $w = \exp\biggl(\sum\limits_{j=1}^5 w_j \widetilde{X}_j^{\varphi_\Gamma^{-1}(v)}\biggr)(v)$ величину $\tilde{d}_\infty^{SL^2}(v,w)$ как

$$\max\bigl\{\max\bigl\{w_1^2,w_2^2\bigr\} - w_4^2, |w_3| - |w_5|\bigr\},$$

а соответствующий шар —

$$\mathrm{Box}^{SL,x}(x,r) = \bigl\{y \in {}^s\mathbb{L} : \tilde{d}_\infty^{SL^2}(x,y) < r^2\bigr\},$$

то

$$\mathrm{Box}^{SL,x}(x,r/3\sqrt{3}) \subset \mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(x,r) \subset \mathrm{Box}^{SL,x}(x,2r/\sqrt{3})$$

(см. п. 4 предложения 23).

Замечание 32. Выбор множества

$$\left\{(y_3,y_5) :\ |y_3| - |y_5| < \frac{r^2}{27} \text{ или } |y_3| < \frac{r^2}{1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(x)}\right\}$$

мотивирован тем, что пересечение (в нормальных координатах относительно $x = \varphi_\Gamma(y)$) плоскости (z_3,z_5), шара $\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(x,r)$ и прямой

$$z_5 = (\widehat{D}\varphi)_{53}(y)\cdot z_3 + (\widehat{D}\varphi)_{53}(y)\frac{z_2}{2}(\widehat{D}\varphi(y)\langle z\rangle)_1$$
$$+ \frac{z_1}{2}(\widehat{D}\varphi(y)\langle z\rangle)_4 - \frac{\varphi_4(y)}{1 + (\widehat{D}\varphi)_{11}(y)}\bigl(d_{11}(y)z_1^2 + d_{12}(y)z_1z_2 + d_{22}(y)z_2^2\bigr)$$
$$- \frac{\varphi_4(y)(D\varphi_1(y))_3}{1 + (\widehat{D}\varphi)_{11}(y)}\frac{z_2}{2}(\widehat{D}\varphi(y)\langle z\rangle)_1$$

совпадает с пересечением (в нормальных координатах) плоскости (z_3,z_5), шара $\mathrm{Box}^{SL,x}(x,r)$ и прямой $z_5 = (\widehat{D}\varphi)_{53}(y)\cdot z_3$ для всех возможных значений z_1 и z_2 (см. подробности в шаге 4 теоремы 37).

Замечание 33. Корректность определения 30 следует из результата шага 2 теоремы 37: для всякой точки существует содержащая ее окрестность $\mathscr{U} \subset \Omega$, обладающая следующим свойством: для любых точек на поверхности $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ можно найти такой радиус $r > 0$, что пересечения $\tilde{d}_\infty^{SL}$-шаров такого радиуса с центрами в этих точках и поверхности пересекаться не будут.

Определение 34. Для каждой точки $x \in \varphi_\Gamma(\Omega)$ рассмотрим окрестность $\mathscr{U}\bigl(\varphi_\Gamma^{-1}(x)\bigr) \subset \Omega$, на которой для величины $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости выполнены условия определения 30. Рассмотрим такое $\delta > 0$, что любой шар в $\mathbb{H}_1$ радиуса $r < T\delta$ полностью лежит хотя бы в одной такой окрестности, где T таково, что

$$\frac{1}{T}d_\infty(v_j,w) \le \tilde{d}_\infty^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j),\varphi_\Gamma(w)) \le T d_\infty(v_j,w)$$

для всех достаточно близких w. Локальное существование такой константы доказано на шаге 2 теоремы 37. Так как можно без ограничения общности рассматривать компактные подмножества Ω, величина δ строго отделена от нуля. Определим функцию множеств на $\varphi_\Gamma(\Omega)$ следующим образом:

$$\big({}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma\big)_\delta(S) = 8\inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^4 :\\ \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(x_j,r_j)\cap\varphi_\Gamma\big(\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x_j)\right)\big)\supset S,\ x_j\in S,\ r_j<\delta,\ j\in\mathbb{N}\Big\}.$$

Далее определение ${}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma$ на Ω повторяет определение 30.

Замечание 35. В определении 34 мы рассматриваем систему окрестностей $\left\{\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x)\right)\right\}_{x\in\varphi_\Gamma(\Omega)}$ на Ω, чтобы избежать многократных пересечений поверхности $\varphi_\Gamma(\Omega)$ с сублоренцевыми шарами радиуса r с центрами в ее точках.

Свойство 36. *Если $\varphi\in C^1_H(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$ таково, что выполнены условия предположения 23, то функция $\Phi : A\mapsto {}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(A))$ обладает следующими свойствами:*

1) *она абсолютно непрерывна относительно меры $\mathscr{H}^3$ на $\mathbb{H}_1$;*
2) *она аддитивна на отдаленных шарах.*

Это свойство установлено на втором шаге доказательства теоремы 37.

Теорема 37. *Пусть выполнены условия предположения* 23. *Тогда поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ пространственноподобна в смысле определения* 28 *и сублоренцева ${}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma$-мера образа $\varphi_\Gamma(\Omega)\subset{}^s\mathbb{L}$ вычисляется по формуле*

$$\int\limits_\Omega \sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}(1-|(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))\,d\mathscr{H}^4(v)=\int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma(y). \tag{2}$$

Замечание 38. Доказательство состоит из нескольких ключевых шагов по аналогии со схемой получения основного результата в [15].

Шаг 1. Доказано, что поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ пространственноподобна в смысле определения 28.

Шаг 2. Выведены (локальные) свойства аддитивности на отдаленных шарах и абсолютной непрерывности для функции Φ множеств

$$A\mapsto {}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(A)),\quad A\subset\Omega.$$

Шаг 3. Для поверхности $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$, $\mathscr{U}\subset\Omega$, выведена следующая характеристика ее аппроксимируемости образом полиномиального hc-дифференциала: при достаточно малых $r>0$ справедливо

$$\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\big)=(1+o(1))\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v),r)\big\rangle\big),$$

где $o(1)\to0$ при $r\to0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}\subset\Omega$.

Шаг 4. Вычислена $\mathscr{H}^3$-мера множества $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v),r)$ с точностью до множителя $1+o(1)$, где $o(1)\to0$ при $r\to0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}\subset\Omega$:

$$\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\\ =\frac{8r^4\sqrt{1+(X_1\varphi_4)^2(v)+(X_2\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1+((\widehat{D}\varphi)_{53})^2(v)}}{\sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}(1-|(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))}|g_\Gamma|_{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\varphi_\Gamma(v))|.$$

Шаг 5. Вычислена ${}^{SL}\mathscr{H}^4_D$-мера множества $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)$:

$$ {}^{SL}\mathscr{H}^4_D\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)\big) = (1+o(1))8r^4, $$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по $v \in \mathscr{U} \subset \Omega$ (здесь ${}^{SL}\mathscr{H}^4_D$ — мера, построенная на образе полиномиального субриманова дифференциала по соответствующему адаптированному базису).

Шаг 6. Установлено следующее свойство сублоренцевой ${}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma$-меры образа $\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}(v, r))$: точная нижняя грань сумм вида $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} 8r_j^4$ достигается тогда и только тогда, когда значение $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v_j), r_j)\big)\big)$ близко к точной нижней грани, где шары $\big\{\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v_j), \tilde{r}_j)\big\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\tilde{r}_j = (1+o(1))r_j$, $j \in \mathbb{N}$, покрывают множество $\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}(v, r))$, и $o(1) \to 0$ равномерно по $v \in \mathscr{U}$.

Шаг 7. Выведена производная функции множеств:

$$ \Phi'(v) = \sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}(1-|(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v)), $$

с помощью которой доказана формула площади (2).

Замечание 39. Поверхность-график $\varphi_\Gamma(\Omega)$, речь о которой идет в [15, теорема 34], лежащая в четырехмерной группе с сублоренцевой структурой на горизонтальном подрасслоении, является пространственноподобной в смысле замечания 29.

Замечание 40. В отличие от классической лоренцевой геометрии, где в определении пространственноподобности поверхности участвуют производные порядка не выше единицы, в изучаемом случае сублоренцевой геометрии на это определение влияют также вторые производные. На это есть две причины. Во-первых, структура пространства ${}^s\mathbb{L}$ (первая переменная одновременно является координатой и в прообразе, и в образе). Во-вторых, из-за построения адаптированного базиса с помощью добавки к первому полю первой степени поля второй степени, аппроксимации первой координатной функции φ_1 дифференциалом недостаточно для обеспечения адекватной аппроксимации по субримановой квазиметрике. Следовательно, возникает необходимость разложения φ_1 до второго порядка.

Доказательство теоремы 37. Шаг 1. Для всякой точки $v \in \Omega$ покажем существование такой ее окрестности $\mathscr{U} \subset \Omega$, что для поверхности $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ будут выполнены условия определения 28. Фиксируем точку $v \in \Omega$. Рассмотрим $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle$ и проверим, что оно не будет пересекать ни один световой конус с вершиной на нем (за исключением самой вершины).

Напомним вид полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle y\rangle$ в адаптированном (в точке $\varphi_\Gamma(v)$) базисе $\big\{\widetilde{X}^v_j\big\}_{j=1}^5$:

$$ z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3 - \frac{y_2}{2}(\widehat{D}\varphi(v)\langle y\rangle)_1, \quad z_4 = (\widehat{D}\varphi(v)\langle y\rangle)_4, $$

$$ \begin{aligned} z_5 = \frac{y_1}{2}(\widehat{D}\varphi(v)\langle y\rangle)_4 + (\widehat{D}\varphi(v)\langle y\rangle)_5 \\ - \frac{\varphi_4(v)}{1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(v)}\big(d_{11}(v)y_1^2 + d_{12}(v)y_1y_2 + d_{22}(v)y_2^2\big) \\ - \frac{\varphi_4(v)(D\varphi_1(v))_3}{1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(v)}\frac{y_2}{2}(\widehat{D}\varphi(v)\langle y\rangle)_1. \end{aligned} $$

Здесь и далее в доказательстве без ограничения общности будем предполагать, что

1) в образе (и прообразе) полиномиального субриманова дифференциала квадрат первой координаты не менее, чем квадрат второй координаты (если не указано обратное);

2) величина $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости не превосходит некоторого заданного $\varepsilon > 0$.

Далее доказательство проводится стандартными рассуждениями, а именно проверкой выполнения одного из условий

$$\max\bigl\{z_1^2, z_2^2\bigr\} - z_4^2 > 0 \quad \text{или} \quad |z_3| - |z_5| > 0$$

для приведенных выше выражений. Нетрудно убедиться в том, что $\max\bigl\{z_1^2, z_2^2\bigr\} - z_4^2 \geq 0$ всегда, если $|X_1\varphi_4|, |X_2\varphi_4| \leq 1-t$, $t > 0$. Если $\max\bigl\{z_1^2, z_2^2\bigr\} - z_4^2 = 0$, то $z_1 = y_1 = 0$ и $z_2 = y_2 = 0$. Так как мы не рассматриваем вершину конуса, $y_3 \neq 0$, поэтому $|z_3| = |y_3| \neq 0$, тогда как $|z_5| = |(\widehat{D}\varphi)_{53}||y_3|$, где $|(\widehat{D}\varphi)_{53}| \leq 1-t$, $t > 0$. Таким образом, поверхность-график $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ (а значит, и $\varphi_\Gamma(\Omega)$) пространственноподобна.

Шаг 2. Рассмотрим функцию множества $\Phi : A \mapsto {}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(A))$. Чтобы установить аддитивность Φ на удаленных шарах, нужно доказать следующее свойство: для всякой точки $q \in \Omega$ существует такая содержащая ее окрестность $\mathscr{U} \Subset \Omega$, что для любых точек на поверхности $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ можно найти такой радиус $r > 0$, что пересечения (сублоренцевых) шаров такого радиуса с центрами в этих точках и поверхности пересекаться не будут.

Фиксируем произвольную точку $v \in \Omega$ и содержащую ее окрестность, описанную в шаге 1. Рассмотрим шар $\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)$ и оценим размеры его прообраза $\varphi_\Gamma^{-1}\bigl(\mathrm{Box}^{SL}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)\bigr)$. Для этого снова используем координатную запись (ср. (1)):

$$p_1 = y_1 + \frac{1}{1 + (\widehat{D}\varphi)_{11}(v)}(\varphi_1(w) - \varphi_1(v) - \widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle), \quad p_2 = y_2,$$

$$p_3 = y_3 - \frac{y_2}{2}(\varphi_1(w) - \varphi_1(v)), \quad p_4 = \varphi_4(w) - \varphi_4(v),$$

$$\begin{aligned} p_5 = \frac{y_1}{2}(\varphi_4(w) - \varphi_4(v)) + (\varphi_5(w) - \varphi_5(v)) + \frac{1}{2}(\varphi_4(v)\varphi_1(w) - \varphi_1(v)\varphi_4(w)) \\ - \frac{\varphi_4(v)}{1 + (\widehat{D}\varphi)_{11}(v)}(\varphi_1(w) - \varphi_1(v) - D\varphi(v)\langle w\rangle) \\ - \frac{\varphi_4(v)(D\varphi_1(v))_3}{1 + (\widehat{D}\varphi)_{11}(v)}\frac{y_2}{2}(\varphi_1(w) - \varphi_1(v)). \end{aligned}$$

для $w = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{3} y_j X_j\right)(v)$ и $\varphi_\Gamma(w) = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{5} p_j \widetilde{X}_j^v\right)(\varphi_\Gamma(v))$ в адаптированном (в точке $\varphi_\Gamma(v)$) базисе $\bigl\{\widetilde{X}_j^v\bigr\}_{j=1}^5$. При рассмотрении следующих случаев:

1) $\max\bigl\{y_1^2, y_2^2\bigr\} \geq |y_3|$ (следовательно, $d_\infty(v,w) = \max\{|y_1|, |y_2|\}$),

2) $\max\bigl\{y_1^2, y_2^2\bigr\} \leq |y_3|$ (следовательно, $d_\infty(v,w) = |y_3|^{1/2}$),

с учетом локальной липшицевости φ и условий

$$\begin{cases} \max\bigl\{p_1^2, p_2^2\bigr\} - p_4^2 < r^2, \\ |p_3| - |p_5| \leq \frac{r^2}{27} \text{ или } |p_3| < \frac{r^2}{1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v)} \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} (d_\infty(v,w))^2\big((1-\varepsilon)^2-\frac14\big)<r^2, \\ (d_\infty(v,w))^2(1-f(\widehat{D}\varphi_1,d_{ij}))<\frac{r^2}{27} \text{ или } (d_\infty(v,w))^2\big(1-\frac14\big)<\frac{r^2}{1-|(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v)}, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$f(\widehat{D}\varphi_1,d_{ij})=\frac12+\left(1+\frac{\varphi_4(v)}{2+2(\widehat{D}\varphi)_{11}(v)}\right)\frac14 \\ +\frac{\varphi_4(v)}{1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(v)}(|d_{11}(v)|+|d_{12}(v)|+|d_{22}(v)|+\varepsilon)$$

(здесь предполагаем без ограничения общности, что величина $o(1)$ при разложении до нужных нам вторых производных также не превосходит $\varepsilon>0$). Непосредственными вычислениями проверяется, что при выполнении условий предположения 23 оба множителя $(1-\varepsilon)^2-\frac14$ и $1-f(\widehat{D}\varphi_1,d_{ij})$ положительны. Следовательно, $d_\infty(v,w)\le Kr$, где константа $K>1$ конечна и зависит только от $\mathscr{U}$. Из этого вытекает, что как размеры прообраза $\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)$, так и размеры образа $\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\cap\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ ограничены и, кроме того, сравнимы.

Тогда для любых точек $t,u\in\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ достаточно рассмотреть их прообразы $\varphi_\Gamma^{-1}(t),\varphi_\Gamma^{-1}(u)\in\mathscr{U}$ и шары радиусов, не превосходящих $r_0=\frac{d_\infty(\varphi_\Gamma^{-1}(t),\varphi_\Gamma^{-1}(u))}{C+2}$, где C — константа из обобщенного неравенства треугольника вида

$$d_\infty(p,q)\le d_\infty(p,s)+Cd_\infty(s,q).$$

Такие шары будут находиться на положительном d_∞-расстоянии один от другого, поэтому их образы также будут находиться на положительном расстоянии. Кроме того, каждый из этих образов будет содержать пересечение сублоренцева шара сравнимого радиуса, не меньшего $\frac{r_0}{K}$, и поверхности $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$. Отсюда следует, что для любых отдаленных пересечений шаров и $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ можно найти такое малое $\delta>0$ (зависящее от расстояния между ними), что любое покрытие из определения $\big({}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4\big)_\delta$ будет являться объединением покрытий каждого множества. Отсюда получаем аддитивность Φ на отдаленных шарах.

Абсолютная непрерывность функции множества Φ вытекает из выражений, полученных для координат $(p_1,\dots,p_5)$ точки $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(v)$ и липшицевости отображения φ. Действительно, образы шаров покрытия множества меры нуль из определения $\mathscr{H}_\delta^4$ на $\mathbb{H}_1$ при отображении φ_Γ лежат в объединении сублоренцевых шаров сравнимых радиусов, т. е. из определения $\big({}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4\big)_{S\delta}$ для некоторого $S<\infty$.

Заметим, что характер пересечения сублоренцева шара и образа окрестности $\mathscr{U}$ при отображении-графике φ_Γ определяется только свойствами окрестности $\mathscr{U}$ (которые описаны в определении 34), но не точками самой окрестности (в частности, окрестность $\mathscr{U}$ должна быть достаточно мала); кроме того, проверка искомых свойств функции Φ носит локальный характер. Поэтому окрестности вида $\mathscr{U}\big(\varphi_\Gamma^{-1}(x)\big)$ при необходимости можно заменить рассмотренной выше окрестностью $\mathscr{U}$ без ограничения общности. Если же при проверке этих двух свойств возникает необходимость рассмотрения разных окрестностей, то рассуждения принципиально не отличаются от основного (локального) случая. Следовательно, мера, введенная в определении 34, является аддитивной на отдаленных шарах и абсолютно непрерывной и, таким образом, она восстанавливается по своей производной.

Шаг 3. Покажем, что при достаточно малых $r > 0$ справедливо

$$\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big)\big) = (1+o(1))\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}(\varphi_\Gamma(v))\big\langle \operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big\rangle\big),$$

здесь $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по $v \in \mathscr{U}$, где $\mathscr{U}$ — окрестность, существование которой доказано на первом шаге (иными словами, на ней величина $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости не превосходит заданного малого $\varepsilon > 0$). Фиксируем $v \in \mathscr{U}$, $r > 0$ и шар $\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)$. Здесь и далее без ограничения общности будем полагать, что

$$\varphi_\Gamma^{-1}\big(\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big) \subset \mathscr{U} \text{ и } \widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}(\varphi_\Gamma(v))\big\langle \operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big\rangle \subset \mathscr{U}.$$

Из (3) следует, что оба этих прообраза ограничены. Рассмотрим множество $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}(\varphi_\Gamma(v))\big\langle \operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big\rangle \cap \mathscr{U}$ и покажем, что его мера и мера прообраза $\varphi_\Gamma^{-1}\big(\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big) \cap \mathscr{U}$ асимптотически близки, т. е.

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big) \cap \mathscr{U}\big)}{\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}(\varphi_\Gamma(v))\big\langle \operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big\rangle \cap \mathscr{U}\big)} = 1.$$

Действительно, отображение $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}(\varphi_\Gamma(v))$ переводит точку с координатами (первого рода относительно $\varphi_\Gamma(v)$) $(z_1, \dots, z_5)$ в точку y с координатами (первого рода относительно v)

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = z_2, \quad y_3 = z_3 + \frac{z_2}{2}(\widehat{D}\varphi(v)\langle y\rangle)_1,$$

где $(\widehat{D}\varphi(v)\langle y\rangle)_1 = (\widehat{D}\varphi(v)\langle y_1, y_2\rangle)_1 = (\widehat{D}\varphi(v)\langle z_1, z_2\rangle)_1$. С другой стороны, отображение φ_Γ^{-1} точке $(z_1, \dots, z_5)$ сопоставляет точку w с координатами

$$w_1 = z_1 - \frac{1}{1 + (\widehat{D}\varphi)_{11}(v)}(\varphi_1(w) - \varphi_1(v) - \widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle), \quad w_2 = z_2,$$

$$w_3 = z_3 + \frac{z_2}{2}(\varphi_1(w) - \varphi_1(v)) = z_3 + \frac{z_2}{2}((\widehat{D}\varphi(v)\langle w\rangle)_1 + o(d_\infty(v, w))).$$

Отсюда вытекает, что $|y_1 - w_1| \le \frac{3}{2}\varepsilon(d_\infty(v, w))$ и $|y_3 - w_3| \le 2\varepsilon(d_\infty(v, w))^2$. Следовательно,

$$d_\infty(y, w) \le T\varepsilon d_\infty(v, w), \quad T < \infty. \tag{4}$$

Из обобщенного неравенства треугольника получаем, что $d_\infty(y, w) \le P\varepsilon d_\infty(v, y)$, где $P < \infty$ зависит только от $\mathscr{U}$. Так как $\varepsilon \to 0$ при $r \to 0$, в силу того, что граница сублоренцева шара кусочно гладкая, следует, что

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big) \cap \mathscr{U}\big)}{\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}(\varphi_\Gamma(v))\big\langle \operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big\rangle \cap \mathscr{U}\big)} \le 1.$$

Докажем обратное неравенство. Для этого достаточно рассмотреть $\sigma > 0$ и точку $\Delta_{1-\sigma}^v(y)$, где $y \in \widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}(\varphi_\Gamma(v))\big\langle \operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big\rangle \cap \mathscr{U}$, а растяжение $\Delta_{1-\sigma}^v$ сопоставляет точке $\exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{3} y_j X_j\Big)(v)$ элемент $\exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{3} (1-\sigma)^{\deg X_j} y_j X_j\Big)(v)$, и проверить, что

$$\Delta_{1-\sigma}^v(y) \in \widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}(\varphi_\Gamma(v))\big\langle \operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), (1-\sigma)r)\big\rangle \cap \varphi_\Gamma^{-1}\big(\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big) \cap \mathscr{U}.$$

Эта проверка проводится непосредственными вычислениями (см. (4)), из которых вытекает зависимость значения $\sigma > 0$ от $\varepsilon > 0$ (точнее, от величины $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости). Отсюда следует обратное неравенство, поэтому имеет место равномерная по $v \in \mathscr{U}$ сходимость

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\cap\mathscr{U}\big)}{\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}(\varphi_\Gamma(v))\big\langle\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big\rangle\cap\mathscr{U}\big)}=1.$$

Тогда при достаточно малых $r>0$ справедливо

$$\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\big)=(1+o(1))\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}\big(\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\big),$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}$.

Шаг 4. Покажем, что

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)\\&\quad=\frac{8r^4\sqrt{1+(X_1\varphi_4)^2(v)+(X_2\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1+((\widehat{D}\varphi)_{53})^2(v)}}{\sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}(1-|(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))}|g_\Gamma|_{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\varphi_\Gamma(v))|\end{aligned}\tag{5}$$

с точностью до множителя $1+o(1)$, где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}\subset\Omega$, а $g_\Gamma|_{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\varphi_\Gamma(v))$ — риманов тензор в образе с базисом $\{\widetilde{X}_j^v\}_{j=1}^5$, ограниченный на поверхность $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle$. Фиксируем описанную выше окрестность $\mathscr{U}$ и точку $v\in\mathscr{U}$. Напомним, что по теореме 21 отображение-график φ_Γ полиномиально hc-дифференцируемо в точке v. Рассмотрим элемент $\varphi_\Gamma(v)$ и перейдем в нормальные координаты относительно него (в адаптированном базисе $\{\widetilde{X}_j^v\}_{j=1}^5$).

Далее доказательство (5) состоит из следующих этапов, которые осуществляются непосредственными вычислениями.

1. В силу замечания 10 сублоренцев шар — декартово произведение двух множеств. Построим в окрестности нуля в $\mathbb{R}^5$ проекцию $\pi: S\to\Pi(\varphi_4,v)$, где

$$S=\theta_{\varphi_\Gamma(v)}^{-1}\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big),$$

$$\Pi(\varphi_4,v)=\{(w_1,w_2,\widehat{D}\varphi_4(v)\langle w_1,w_2\rangle):(w_1,w_2)\in\mathbb{R}^2\},$$

следующим образом:

$$(z_1,\dots,z_5)\mapsto(z_1,z_2,z_4),$$

и применим формулу коплощади для вычисления меры множества S (коэффициент коплощади $\mathscr{J}(\pi,x)$ равен единице; это следует из покоординатных выражений для полиномиального субриманова дифференциала):

$$\begin{aligned}\int\limits_S d\mathscr{H}^3(x)&=\int\limits_S\mathscr{J}(\pi,x)\,d\mathscr{H}^3(x)=\int\limits_{\pi(S)}d\mathscr{H}^2(z)\int\limits_{\pi^{-1}(y)}d\mathscr{H}^1(u)\\&=\int\limits_{\{(z_1,z_2,z_4)\in\mathbb{R}^3:\max\{z_1^2,z_2^2\}-z_4^2<r^2\}\cap\Pi(\varphi_4,v)}d\mathscr{H}^2(z)\int\limits_{\pi^{-1}(z)}d\mathscr{H}^1(u),\end{aligned}$$

где $\Pi(\varphi_4,v)$ — плоскость в $\mathbb{R}^3=\{(z_1,z_2,z_4):z_1\in\mathbb{R},\ z_2\in\mathbb{R},\ z_4\in\mathbb{R}\}$, определенная, как $\{(z_1,z_2,z_4):z_4=X_1\varphi_4(v)\cdot z_1+X_2\varphi_4(v)\cdot z_2\}$.

2. Заметим, что для каждого набора $z = (z_1, z_2, z_4)$ прообраз $\pi^{-1}(z)$ — это прямая в $\mathbb{R}^2 = \{(z_3, z_5) : z_3 \in \mathbb{R},\ z_5 \in \mathbb{R}\}$, заданная как

$$\begin{aligned} z_5 = (\widehat{D}\varphi)_{53}(v) \cdot z_3 + (\widehat{D}\varphi)_{53}(v)\frac{z_2}{2}(\widehat{D}\varphi(v)\langle z\rangle)_1 \\ + \frac{z_1}{2}(\widehat{D}\varphi(v)\langle z\rangle)_4 - \frac{\varphi_4(v)}{1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(v)}\big(d_{11}(v)z_1^2 + d_{12}(v)z_1z_2 + d_{22}(v)z_2^2\big) \\ - \frac{\varphi_4(v)(D\varphi_1(v))_3}{1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(v)}\frac{z_2}{2}(\widehat{D}\varphi(v)\langle z\rangle)_1 \end{aligned} \tag{6}$$

(см. свойство 27) и пересекающая множество

$$\left\{(z_3, z_5) \in \mathbb{R}^2 : |z_3| - |z_5| < \frac{r^2}{27} \text{ или } |z_3| < \frac{r^2}{1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v)}\right\}. \tag{7}$$

Так как по предположению 23 и в силу оценок границ множества

$$\big\{(z_1, z_2, z_4) \in \mathbb{R}^3 : \max\big\{z_1^2, z_2^2\big\} - z_4^2 < r^2\big\} \cap \Pi(\varphi_4, v)$$

справедливы ограничения

$$z_1 \in \left[-\frac{r}{\sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}}, \frac{r}{\sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}}\right],$$

$$z_2 \in \left[-\frac{r}{\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}}, \frac{r}{\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}}\right],$$

имеем по выбору адаптированного расстояния

$$\int\limits_{\pi^{-1}(z)} d\mathscr{H}^1(u) = 2r^2\frac{\sqrt{1+((\widehat{D}\varphi)_{53})^2(v)}}{1-|(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v)}$$

для любых (z_1, z_2). Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что пересечение прямой (6) и множества (7) всегда будет иметь одну и ту же длину.

3. Аналогично предыдущим шагам непосредственными вычислениями выводим

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^2\big(\big\{(z_1, z_2, z_4) \in \mathbb{R}^3 : \max\big\{z_1^2, z_2^2\big\} - z_4^2 < r^2\big\} \cap \Pi(\varphi_4, v)\big) \\ = 4r^2\frac{\sqrt{1+(X_1\varphi_4)^2(v)+(X_2\varphi_4)^2(v)}}{\sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}}, \end{aligned}$$

откуда при переходе из нормальных координат на ${}^s\mathbb{L}$ следует (5).

Шаг 5. Цель этого шага — исследование ${}^{SL}\mathscr{H}^4_\Gamma$-меры на образе сублоренцева дифференциала. Оно имеет много общего со схемой из [15], поэтому приведем здесь только рассуждения и результаты, отличные от [15]. Прежде всего фиксируем $z \in \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle$, $z = \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle y\rangle$, и запишем полиномиальный hc-дифференциал отображения $w \mapsto \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle w\rangle$ в точке y. Обозначим через $(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3) = (\overline{w}_H, \overline{w}_3)$ координаты первого рода точки w относительно y, а через $(y_1, y_2, y_3) = (y_H, y_3)$ — координаты первого рода точки y относительно v. Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 21, получаем следующие выражения для координат $(u_1,\dots,u_5)$ точки $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle w\rangle$ относительно $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle y\rangle$ в исходном базисе $\{X_j\}_{j=1}^5$:

$$u_1=\overline{w}_1+(\widehat{D}\varphi(v)\langle w_H\rangle)_1,\quad u_2=\overline{w}_2,$$
$$u_3=\overline{w}_3-\overline{w}_2\varphi_1(v)-\frac{\overline{w}_2}{2}(\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_H\rangle)_1-\overline{w}_2(\widehat{D}\varphi(v)\langle y_H\rangle)_1,\quad u_4=\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_H\rangle_4,$$
$$u_5=\overline{w}_1\varphi_4(v)+\frac{\overline{w}_1}{2}(\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_H\rangle)_4+(\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_3\rangle)_5+\overline{w}_1(\widehat{D}\varphi(v)\langle y_H\rangle)_4.$$

Рассмотрим базис $\{\overline{X_k^y}\}_{k=1}^5$, построенный следующим образом:

$$\overline{X_1^y}=X_1(1+(\widehat{D}\varphi)_{11}(v))+\varphi_4(v)X_5+(\widehat{D}\varphi(v)\langle y_H\rangle)_4X_5,$$
$$\overline{X_2^y}=X_2+(\widehat{D}\varphi)_{12}(v)X_1-\varphi_1(v)X_3-(\widehat{D}\varphi(v)\langle y_H\rangle)_1X_3,$$
$$\overline{X_3^y}=X_3,\quad\overline{X_4^y}=X_4,\quad\overline{X_5^y}=X_5$$

(заметим, что для $\psi(y)=\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle y\rangle$ верно $X_3\psi_1=0$). В нем координаты $(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_5)$ точки $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle w\rangle$ относительно $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle y\rangle$ вычисляются так:

$$\bar{u}_1=\overline{w}_1,\quad\bar{u}_2=\overline{w}_2,\quad\bar{u}_3=\overline{w}_3-\frac{\overline{w}_2}{2}(\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_H\rangle)_1,$$
$$\bar{u}_4=\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_H\rangle_4,\quad\bar{u}_5=\frac{\overline{w}_1}{2}(\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_H\rangle)_4+(\widehat{D}\varphi(v)\langle\overline{w}_3\rangle)_5.$$

Таким образом, выражение, сопоставляющее точке с координатами $(\overline{w}_1,\overline{w}_2,\overline{w}_3)$ относительно y точку с координатами $(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_5)$ относительно $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle y\rangle$ в базисе $\{\overline{X_k^y}\}_{k=1}^5$, является искомым полиномиальным hc-дифференциалом.

Покажем, что

$${}^{SL}\mathscr{H}_D^4\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)=8r^4(1+o(1)),$$

где $o(1)\to0$ при $r\to0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}$. Мера ${}^{SL}\mathscr{H}_D^4$ на образе полиномиального hc-дифференциала определяется по аналогии со случаем образа отображения-графика с заменой шаров в базисе $\{\widetilde{X}_k^{v_j}\}_{k=1}^5$ шарами в базисе $\{\overline{X_k^{v_j}}\}_{k=1}^5$, $j\in\mathbb{N}$. Так как мы доказываем локальное свойство, без ограничения общности можно рассматривать окрестность $\mathscr{U}$, описанную на первом шаге. Фиксируем $v\in\mathscr{U}$, $\delta>0$ и покрытие шарами, аппроксимирующее $\big({}^{SL}\mathscr{H}_D^4\big)_\delta\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\operatorname{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v),r)\big)$ (см. определение 30). Этому покрытию соответствует сумма $8\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}r_j^4$. Для оценки меры фиксируем центр $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle$ одного из шаров покрытия и найдем локальное искажение меры при $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)$ в точке v_j. Запишем дифференциал отображения ψ, действующего из нормальных координат относительно v_j в нормальные координаты относительно точки $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle$ (в базисе $\{\overline{X_k^{v_j}}\}_{k=1}^5$), следующим образом:

$$\overline{w}=(\overline{w}_1,\overline{w}_2,\overline{w}_3)\mapsto(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_5).$$

Из непосредственных вычислений вытекает, что

$$D\psi(\overline{w}_1,\overline{w}_2,\overline{w}_4)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\D_{31}&D_{32}&1\\X_1\varphi_4(v)&X_2\varphi_4(v)&0\\D_{51}&D_{52}&|(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v)\end{pmatrix},$$

где D_{kl}, $k = 3, 5$, $l = 1, 2$, — производные координатных функций по $\overline{w}_j$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\sqrt{\det(D\psi^*(\overline{w})D\psi(\overline{w}))} = \sqrt{1 + (X_1\varphi_4)^2(v) + (X_2\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 + ((\widehat{D}\varphi)_{53})^2(v)} + Kr_j,$$

где $|K| < \infty$ зависит только от $\mathscr{U}$. Слагаемое Kr_j обусловлено наличием производных D_{kl}, $k = 3, 5$, $l = 1, 2$, значения которых сравнимы с r_j. Следовательно, якобиан в точке v_j отображения $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)$, действующего из $\mathscr{U}$ в $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle$, как

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{3} \overline{w}_k X_k\right)(v_j) \mapsto \exp\left(\sum_{k=1}^{5} \bar{u}_k \overline{X}_k^{v_j}\right)(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle),$$

равен

$$\mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v), v_j) = (\sqrt{1 + (X_1\varphi_4)^2(v) + (X_2\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 + ((\widehat{D}\varphi)_{53})^2(v)} + Kr_j) \times \frac{|g_j|_{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle)|}{|g|_{\mathbb{H}_1}(v_j)|}$$

(здесь риманов тензор g_j в образе считается для базиса $\{\overline{X_k^{v_j}}\}_{k=1}^5$). В силу билипшицевых оценок прообразы всех шаров $\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)$ при отображении $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)$ лежат в $\mathrm{Box}(v_j, Pr_j)$, $j \in \mathbb{N}$, для некоторого $P < \infty$, зависящего только от $\mathscr{U}$. Таким образом, для них применимы все оценки, когда длины в прообразе равномерно сравнимы с r_j. Кроме того, заметим, что в силу выражений для $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_5)$ $\mathscr{H}^3$-мера множества $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \overline{\mathrm{Box}}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, \tau)$ в нормальных координатах (где координаты рассматриваются в базисе $\{\overline{X_k^{v_j}}\}_{k=1}^5$, а $\overline{\mathrm{Box}}_\Gamma^{SL}$ — адаптированный шар в этом базисе, который определяется так же, как это описано в определении 30) относительно $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle$ также вычисляется по формуле, аналогичной (5), с точностью до множителя $1 + o(1)$:

$$\frac{8\tau^4\sqrt{1 + (X_1\varphi_4)^2(v) + (X_2\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 + ((\widehat{D}\varphi)_{53})^2(v)}}{\sqrt{1 - (X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 - (X_2\varphi_4)^2(v)}(1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))}. \tag{8}$$

Отсюда, полагая $\mathscr{H}_j^3$ равной мере Хаусдорфа, построенной по базису $\{\overline{X_k^{v_j}}\}_{k=1}^5$, $j \in \mathbb{N}$, имеем

$$\begin{aligned}
8\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^4 &= \sum_{j\in\mathbb{N}}(1 + o(1))\frac{\mathscr{H}_j^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle \cap \overline{\mathrm{Box}}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)\big)}{|g_j|_{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle)|} \\
&\quad \times \frac{\sqrt{1 - (X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 - (X_2\varphi_4)^2(v)}(1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))}{\sqrt{1 + (X_1\varphi_4)^2(v) + (X_2\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 + ((\widehat{D}\varphi)_{53})^2(v)}} \\
&= (1 + o(1))\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v), v_j)\frac{\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\langle\overline{\mathrm{Box}}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)\rangle\big)}{|g_j|_{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle)|} \\
&\quad \times \frac{\sqrt{1 - (X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 - (X_2\varphi_4)^2(v)}(1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))}{\sqrt{1 + (X_1\varphi_4)^2(v) + (X_2\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 + ((\widehat{D}\varphi)_{53})^2(v)}} \\
&= \frac{\mathscr{J}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v), v)}{|g_j|_{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle}(\varphi_\Gamma(v))|} \times \frac{\sqrt{1 - (X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 - (X_2\varphi_4)^2(v)}(1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))}{\sqrt{1 + (X_1\varphi_4)^2(v) + (X_2\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 + ((\widehat{D}\varphi)_{53})^2(v)}}
\end{aligned}$$

$$\times (1+o(1))\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle\overline{\mathrm{Box}}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)\big\rangle\big)$$

$$= \frac{\sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}(1-|(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))}{|g|_{\mathbb{H}_1}(v_j)|}$$

$$\times (1+o(1))\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle\overline{\mathrm{Box}}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)\big\rangle\big), \quad (9)$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}$ (здесь римановы тензоры g_j в образе рассматриваются в соответствующих адаптированных базисах $\big\{\overline{X}_k^{v_j}\big\}_{k=1}^5$, $j\in\mathbb{N}$).

Осталось показать, что для всякого $\sigma>0$ существует покрытие прообраза $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle\,\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big\rangle$ множествами

$$\big\{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big\langle\overline{\mathrm{Box}}_\Gamma^{SL}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle v_j\rangle, r_j)\big\rangle\big\}_{j\in\mathbb{N}}$$

такое, что сумма их $\mathscr{H}^3$-мер не больше $\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big(\,\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big)\big)+\sigma$. Это достигается применением теоремы Витали [21, 22] к данному покрытию с учетом билипшицевых свойств полиномиального hc-дифференциала. Рассуждения повторяют схему, приведенную в доказательстве шага 5 теоремы 26 в [15].

Из выкладок (9) имеем

$$^{SL}\mathscr{H}_D^4\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle\cap\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big)$$

$$= \sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}(1-|(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))$$

$$\times (1+o(1))\frac{\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)^{-1}\big(\,\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big)\big)}{|g|_{\mathbb{H}_1}(v_j)|} = (1+o(1))8r^4,$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по $v\in\mathscr{U}$.

Шаг 6. Далее схема доказательства почти дословно повторяет схему, приведенную в [15, теорема 26] с учетом того, что базисы $\big\{\overline{X}_k^{y}\big\}_{k=1}^5$, $y\in\mathscr{U}$, используемые на шаге 5, совпадают с $\big\{\overline{X}_k^{v_j}\big\}_{k=1}^5$, если $y=v_j$, и значение полиномиального hc-дифференциала $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v_j)$ рассматривается в точке v_j, $j\in\mathbb{N}$ (см. подробности в шаге 5). Отличие состоит в вычислении производной меры:

$$D_j = D\big({}^{SL}\mathscr{H}_D^4\big)_{\mathscr{H}_j^3}(\varphi_\Gamma(v_j))$$

$$= \frac{\sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}(1-|(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))}{\sqrt{1+(X_1\varphi_4)^2(v)+(X_2\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1+((\widehat{D}\varphi)_{53})^2(v)}|g_j|_{\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v_j)\langle\mathscr{U}\rangle}(\varphi_\Gamma(v_j))|}.$$

Тогда в силу результатов шага 3 имеем

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\,\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big)\cap\mathscr{U}\big)}{\mathscr{H}^3\big(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma^{-1}\big(\varphi_\Gamma(v)\big)\big\langle\,\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v), r)\big\rangle\cap\mathscr{U}\big)} = 1$$

и ввиду шага 5 получим

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}8r_j^4 = \frac{\sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}(1-|(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))}{|g|_{\mathbb{H}_1}(v)|}$$

$$\times (1+o(1))\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j), \tilde{r}_j)\big)\big), \quad (10)$$

где $\tilde{r}_j = (1 + o(1))r_j$, $j \in \mathbb{N}$, и все величины $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по $v \in \mathscr{U}$. Следовательно, точная нижняя грань сумм $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} 8r_j^4$ достигается тогда и только тогда, когда значение

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j), \tilde{r}_j)\big)\big)$$

близко к точной нижней грани.

Шаг 7. Покажем, что точная нижняя грань сумм

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^3\big(\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j), \tilde{r}_j)\big)\big)$$

равна $\mathscr{H}^3(\mathrm{Box}(v, r))$, и найдем производную функции множества Φ в точке v. Применим схему из [15, теорема 26] с учетом результатов шагов 3 и 4, из которых следуют условие удвоения меры $\mathscr{H}^3$ на «шарах» $\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}_\Gamma^{SL}(\varphi_\Gamma(v_j), \tilde{r}_j)\big)$ и корректность применения к покрытию такими «шарами» множества $\mathrm{Box}(v, r)$ теоремы Витали [21, 22].

Из (10) выводим

$$\begin{aligned} {}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4(\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}(v, r))) &= (1 + o(1)) \\ &\times \sqrt{1 - (X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 - (X_2\varphi_4)^2(v)}(1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v)) \cdot \mathscr{H}^4(\mathrm{Box}(v, r)), \end{aligned}$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по $v \in \mathscr{U}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi'(v) &= \lim_{r\to 0} \frac{{}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4(\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}(v, r)))}{\mathscr{H}^4(\mathrm{Box}(v, r))} \\ &= \sqrt{1 - (X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 - (X_2\varphi_4)^2(v)}(1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v)). \end{aligned}$$

Следовательно [23, 24],

$$\int\limits_{\mathscr{U}} \sqrt{1 - (X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 - (X_2\varphi_4)^2(v)}(1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))\, d\mathscr{H}^4(v) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(\mathscr{U})} d\,{}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4(y).$$

Для общего случая множества Ω достаточно рассмотреть разбиение на подмножества, обладающие свойствами множества $\mathscr{U}$. Напомним, что на образах элементов таких разбиений ${}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4$-мера аддитивна (см. замечание перед третьим шагом). Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega} \sqrt{1 - (X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1 - (X_2\varphi_4)^2(v)}(1 - |(\widehat{D}\varphi)_{53}|(v))\, d\mathscr{H}^4(v) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\,{}^{SL}\mathscr{H}_\Gamma^4(y).$$

Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского [Электронный ресурс] // http:www.uchimsya.info/maxsurf.pdf.
2. *Берестовский В. Н., Гичев В. М.* Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 4. С. 1–34.
3. *Grochowski M.* Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // J. Dyn. Control Syst. 2006. V. 12, N 2. P. 145–160.

4. *Grochowski M.* Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // J. Geom. Phys. 2009. V. 59, N 7. P. 885–900.
5. *Grochowski M.* Normal forms and reachable sets for analytic Martinet sub-Lorentzian structures of Hamiltonian type // J. Dyn. Control Syst. 2011. V. 17, N 1. P. 49–75.
6. *Grochowski M.* Reachable sets for contact sub-Lorentzian metrics on $\mathbb{R}^3$. Application to control affine systems with the scalar input // J. Math. Sci. 2011. V. 177, N 3. P. 383–394.
7. *Grochowski M.* The structure of reachable sets for affine control systems induced by generalized Martinet sub-Lorentzian metrics // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2012. V. 18, N 4. P. 1150–1177.
8. *Grochowski M.* The structure of reachable sets and geometric optimality of singular trajectories for certain affine control systems in $\mathbb{R}^3$. The sub-Lorentzian approach // J. Dyn. Control Syst. (to appear).
9. *Grochowski M.* Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 2002. V. 50, N 2. P. 161–178.
10. *Grochowski M.* Remarks on the global sub-Lorentzian geometry // Anal. Math. Phys. 2013. V. 3, N 4. P. 295–309.
11. *Korolko A., Markina I.* Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups // J. Geom. Anal. 2009. V. 19, N 4. P. 864–889.
12. *Korolko A., Markina I.* Geodesics on H-type quaternion groups with sub-Lorentzian metric and their physical interpretation // Complex Anal. Oper. Theory. 2010. V. 4, N 3. P. 589–618.
13. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с неголономным четырехмерным пространством скоростей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 1. С. 62–70.
14. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 3. С. 68–80.
15. *Карманова М. Б.* Формула площади графиков на 4-мерных 2-ступенчатых сублоренцевых структурах // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 1068–1091.
16. *Карманова М. Б.* Максимальные поверхности-графики на 4-мерных 2-ступенчатых сублоренцевых структурах // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 350–363.
17. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Contemporary mathematics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
18. *Карманова М. Б.* Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.
19. *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 3. С. 259–264.
20. *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
21. *Водопьянов С. К.* Интегрирование по Лебегу: учеб. пособие [Электронный ресурс] // http:math.nsc.ru/∼matanalyse/Lebesgue.pdf.
22. *Guzmán M.* Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$. Berlin: Springer, 1975.
23. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.
24. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II // Sib. Adv. Math. 2005. V. 15, N 1. P. 91–125.

Статья поступила 29 декабря 2015 г.

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`maryka@math.nsc.ru`