Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ БАРОТРОПНЫХ ДВИЖЕНИЯХ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А. Е. Мамонтов, Д. А. Прокудин

Аннотация. Рассматривается краевая задача, описывающая стационарное баротропное движение многокомпонентной смеси вязких сжимаемых жидкостей в ограниченной трехмерной области. Оператор материальной производной предполагается общим для всех компонент и определяемым средней скоростью движения смеси, однако в остальных членах сохранены отдельные скорости компонент. Давление считается общим и зависящим от суммарной плотности. За исключением перечисленного, не делается никаких упрощающих предположений (в том числе о структуре матрицы вязкостей), т. е. сохранены все слагаемые в уравнениях, являющихся естественным обобщением модели Навье — Стокса движения однокомпонентной среды. Доказано существование слабых решений краевой задачи.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.115

Ключевые слова: теорема существования, стационарная краевая задача, вязкая сжимаемая жидкость, гомогенная многоскоростная смесь, эффективный вязкий поток.

В нашей предшествующей работе [1] была поставлена задача A о пространственных баротропных движениях многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей в ограниченной трехмерной области Ω, сформулировано понятие слабого решения этой задачи, поставлена регуляризованная задача $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$, отличающаяся от задачи A наличием двух малых параметров ε (отвечает за параболическую регуляризацию) и δ (отвечает за регуляризацию скорости роста давления), и, наконец, доказана разрешимость задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ в классе сильных решений. Формулировки упомянутых результатов, соответствующих определений и т. п. здесь не повторяем.

Для доказательства разрешимости задачи A (в классе слабых решений, а именно в смысле определения 1.2 из [1]) остается перейти к пределу по малым параметрам ε и δ. Основным результатом статьи является

Теорема 0.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область класса C^2. Тогда для любых входных данных класса, описанного в определении* 1.2 *из* [1], *и при оговоренных в нем условиях на параметры уравнений существует по крайней мере одно слабое решение задачи* A.

Статья посвящена доказательству теоремы 0.1. Несмотря на то, что логика и техника доказательства в значительной степени следуют своим аналогам в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15–11–20019).

теории однокомпонентных жидкостей, мы вынуждены воспроизводить все детали с достаточной подробностью. Во-первых, потому, что аналогия не означает совпадение (следует явно проложить курс, даже если он местами параллельный), а во-вторых, потому, что статья рассчитана не только на узких специалистов, полностью владеющих всеми нюансами упомянутой теории. Там, где эта теория используется готовыми блоками, мы, естественно, ее не повторяем, а лишь даем ссылки на используемые утверждения.

Статья состоит из двух параграфов. В § 1 совершается предельный переход по $\varepsilon \to 0$ и тем самым строится решение задачи A_δ, отличающейся от задачи A лишь тем, что давление в ней предполагается растущим быстрее, чем куб суммарной плотности. В § 2 совершается предельный переход по $\delta \to 0$ и тем самым упомянутое ограничение роста снимается, так что от роста давления по суммарной плотности требуется лишь, чтобы он был быстрее, чем степень плотности с показателем 3/2.

§ 1. Предельный переход по $\varepsilon \to 0$

Для удобства напомним формулы из [1], на которые имеются ссылки в настоящей работе. Давление p предполагается удовлетворяющим следующим условиям (см. замечание 1.1 из [1]):

$$\frac{1}{a\gamma}s^\gamma - bs \leqslant p(s) \leqslant \frac{a}{\gamma}s^\gamma + bs, \tag{1.1}$$

$$p'(s) \geqslant 0, \quad s \in [0, \infty), \tag{1.2}$$

$$p(s) = ds^\omega + \hat{p}(s), \quad \hat{p}\,'(s) \geqslant 0, \quad \omega \in (1, \gamma],\ d > 0. \tag{1.3}$$

Кроме того, внешние силы удовлетворяют ограничениям[1)]

$$\boldsymbol{f}_i = 0, \quad \text{если } \frac{3}{2} < \gamma \leqslant \frac{5}{3},\ i = 1, \dots, N. \tag{1.4}$$

Задача $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$, решение которой уже построено, формулируется в виде следующих соотношений:

$$-\varepsilon\Delta\rho_i + \operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}) + \varepsilon\rho_i = \varepsilon\frac{m_i}{|\Omega|}, \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=1}^{N} L_{ij}\boldsymbol{u}_j + \frac{\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}_i + \frac{\varepsilon}{2}\frac{m_i}{|\Omega|}\boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) + \nabla\tilde{p}(\rho) = \rho_i\boldsymbol{f}_{i\varepsilon}, \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla\rho_i\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.7}$$

где $i = 1, \dots, N$, при этом как следствие выполняются равенства

$$\int\limits_\Omega \rho_i\,d\boldsymbol{x} = m_i,\ i = 1, \dots, N, \quad \int\limits_\Omega \rho\,d\boldsymbol{x} = m. \tag{1.8}$$

Регуляризованные внешние силы сходятся к исходным в следующем смысле:

$$\boldsymbol{f}_{i\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \boldsymbol{f}_i \quad \text{в } L_2(\Omega), \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.9}$$

1) См. замечание после формулы (2.11).

Построенное решение задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ удовлетворяет оценке

$$C_0\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{\varepsilon}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^{N}m_i\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$+\frac{\varepsilon\delta\beta N}{2(\beta-1)}\int\limits_{\Omega}\rho^{\beta}\,d\boldsymbol{x}+2\varepsilon\delta N\int\limits_{\Omega}\rho^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{\varepsilon}{2}N\Big(C_1+\frac{1}{a\gamma}\Big)\int\limits_{\Omega}\rho^{\gamma}\,d\boldsymbol{x}+\varepsilon\delta N\beta\int\limits_{\Omega}\rho^{\beta-2}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$+2\varepsilon\delta N\int\limits_{\Omega}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x}\leqslant\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\rho_i\boldsymbol{f}_{i\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}+NC_9(m,\beta,|\Omega|,C_1,C_2,a,b,\gamma).\qquad(1.10)$$

Наконец, показатель β в регуляризованном давлении $\tilde{p}$ удовлетворяет требованию

$$\beta>\max\{\gamma,3\}.\qquad(1.11)$$

В (1.10) и далее, как и в [1], через $C_k(\cdot)$, $k\in\mathbb{N}$, обозначены величины, принимающие конечные положительные значения и зависящие от объектов, указанных в скобках или перечисленных в комментариях. При этом будем продолжать нумерацию C_k, начатую в [1] (тем самым константы, взятые из [1], как например, в формуле (1.10), сохраняют свои номера).

Получим оценки решений задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$, равномерные по малому параметру ε. Умножим (1.6) скалярно на $\boldsymbol{u}_i$, проинтегрируем по Ω (пользуясь граничными условиями (1.7)) и просуммируем по $i=1,\dots,N$. В результате получим неравенство (1.10), из которого следуют оценки (отныне у величин, зависящих от ε, будем писать индекс ε)

$$\sum_{i=1}^{N}\big(\|\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\varepsilon\|\sqrt{\rho_{i\varepsilon}}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|^2_{L_2(\Omega)}\big)$$
$$\leqslant C_{31}(C_9,C_{10},\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\},N,\beta,\Omega)\big(1+\|\rho_\varepsilon\|^2_{L_{2\beta}(\Omega)}\big),\qquad(1.12)$$

$$\varepsilon\|\nabla\rho_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant C_{32}(C_9,C_{10},\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\},N,\beta,\delta,\Omega)\big(1+\|\rho_\varepsilon\|^2_{L_{2\beta}(\Omega)}\big).\qquad(1.13)$$

Далее воспользуемся оператором Боговского $\mathscr{B}$, который любой скалярной функции f, заданной на Ω, сопоставляет векторное поле $\boldsymbol{\xi}$, определяемое из следующей задачи [2]:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}=f-\bar{f}_\Omega,\quad \boldsymbol{\xi}|_{\partial\Omega}=0,\qquad(1.14)$$

где

$$\bar{f}_\Omega=\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}f\,d\boldsymbol{x}.\qquad(1.15)$$

Существуют такие способы однозначного выбора решения задачи (1.14), что оператор $\mathscr{B}$ обладает свойством (см. [3, разд. 10.5])

$$\|\mathscr{B}f\|_{W^{\sigma_2+1}_{\sigma_3}(\Omega)}\leqslant C_{33}(\sigma_3,\Omega)\|f\|_{W^{\sigma_2}_{\sigma_3}(\Omega)}$$

при всех $\sigma_3\in(1,+\infty)$ и $\sigma_2=-1,0,1,2,\dots$, а значит, оператор $\mathscr{B}\circ\operatorname{div}$ ограничен в $L_{\sigma_3}(\Omega)$ при всех $\sigma_3\in(1,+\infty)$. Заметим, что из свойств $\mathscr{B}$ следует оценка

$$\big\|\mathscr{B}\big(\rho_\varepsilon^\beta\big)\big\|_{L_6(\Omega)}+\big\|\nabla\otimes\mathscr{B}\big(\rho_\varepsilon^\beta\big)\big\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C_{34}(C_{33},\Omega)\|\rho_\varepsilon\|^\beta_{L_{2\beta}(\Omega)}.\qquad(1.16)$$

Отметим также следующие равномерные по ε оценки (справедливые для всех $i = 1, \ldots, N$):

$$\|\mathbb{S}_{i\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{35}(C_{31}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, N)(1 + \|\rho_\varepsilon\|_{L_{2\beta}(\Omega)}), \tag{1.17}$$

$$\|\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} + \|\rho_{i\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\varepsilon \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)} \leqslant C_{36}(C_{31}, N, \beta, \Omega)\|\rho_\varepsilon\|_{L_{2\beta}(\Omega)}\bigl(1 + \|\rho_\varepsilon\|^2_{L_{2\beta}(\Omega)}\bigr), \tag{1.18}$$

$$\|\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{f}_{i\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{37}(\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\}, \beta, |\Omega|)\|\rho_\varepsilon\|_{L_{2\beta}(\Omega)}. \tag{1.19}$$

Умножив уравнения (1.6) скалярно на $\boldsymbol{\varphi}_i = \mathscr{B}\bigl(\rho_\varepsilon^\beta\bigr)$, $i = 1, \ldots, N$, и проинтегрировав по Ω, приходим к тождествам

$$\int\limits_\Omega \tilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon^\beta\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \tilde{p}(\rho_\varepsilon)\bigl(\overline{\rho_\varepsilon^\beta}\bigr)_\Omega\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \left(\mathbb{S}_{i\varepsilon} - \frac{1}{2}\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\right) : \bigl(\nabla \otimes \mathscr{B}\bigl(\rho_\varepsilon^\beta\bigr)\bigr)\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [\rho_{i\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\varepsilon \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}] \cdot \mathscr{B}\bigl(\rho_\varepsilon^\beta\bigr)\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{f}_{i\varepsilon} \cdot \mathscr{B}\bigl(\rho_\varepsilon^\beta\bigr)\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega \rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \cdot \mathscr{B}\bigl(\rho_\varepsilon^\beta\bigr)\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2}\frac{m_i}{|\Omega|}\int\limits_\Omega \boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \cdot \mathscr{B}\bigl(\rho_\varepsilon^\beta\bigr)\, d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.20}$$

Из (1.20) благодаря соотношениям (1.1), (1.8), (1.11), (1.12), (1.16)–(1.19) и элементарным неравенствам (Гёльдера и Юнга) следует, что

$$\|\rho_\varepsilon\|^{2\beta}_{L_{2\beta}(\Omega)} \leqslant C_{38}\bigl(\|\rho_\varepsilon\|^{\beta+3}_{L_{2\beta}(\Omega)} + 1\bigr),$$

где C_{38} зависит от C_{31}, C_{33}–C_{37}, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\}$, m, a, b, β, γ, δ и Ω. Далее, ввиду (1.11) получаем требуемые оценки для плотностей:

$$\|\rho_{i\varepsilon}\|_{L_{2\beta}(\Omega)} \leqslant C_{39}(C_{38}, N, \beta), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.21}$$

с учетом (1.12) и (1.13) также оценки

$$\|\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon}\,\|\sqrt{\rho_{i\varepsilon}}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon}\,\|\nabla\rho_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{40}(C_{31}, C_{32}, C_{39}),\ i = 1, \ldots, N. \tag{1.22}$$

Наконец, из (1.5), (1.7), (1.21) и (1.22) следует, что

$$\sqrt{\varepsilon}\,\|\nabla\rho_{i\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{41}(C_{39}, C_{40}, N, m, \beta, |\Omega|), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.23}$$

В силу оценок (1.21)–(1.23) из семейства $\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}$, $\rho_{i\varepsilon}$, $i = 1, \ldots, N$, $\varepsilon \in (0, 1]$, может быть выделена последовательность (которую обозначим так же), для которой при $\varepsilon \to 0$ для всех $i = 1, \ldots, N$ имеют место сходимости

$$\boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \to \boldsymbol{u}_i \quad \text{слабо в } \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{1.24}$$

$$\rho_{i\varepsilon} \to \rho_i \quad \text{слабо в } L_{2\beta}(\Omega), \tag{1.25}$$

$$\varepsilon\nabla\rho_{i\varepsilon} \to 0 \quad \text{сильно в } L_2(\Omega), \tag{1.26}$$

$$\rho_{i\varepsilon}^\beta \to \overline{\rho_i^\beta},\ \tilde{p}(\rho_\varepsilon) \to \overline{\tilde{p}(\rho)} \text{ слабо в } L_2(\Omega), \quad \overline{\rho_i^\beta} \geqslant 0 \text{ п. в. в } \Omega, \tag{1.27}$$

$$\rho_{i\varepsilon}^\gamma \to \overline{\rho_i^\gamma} \text{ слабо в } L_{\frac{2\beta}{\gamma}}(\Omega), \quad \overline{\rho_i^\gamma} \geqslant 0 \text{ п. в. в } \Omega,$$

где $\overline{\rho_i^\beta}$, $\overline{\rho_i^\gamma}$, $i=1,\dots,N$, и $\overline{\tilde p(\rho)}$ обозначают слабые пределы последовательностей $\rho_{i\varepsilon}^\beta$, $\rho_{i\varepsilon}^\gamma$, $i=1,\dots,N$, и $\tilde p(\rho_\varepsilon)$ в соответствующих пространствах. Заметим, что из (1.24) сразу следует, что $\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\to\boldsymbol{u}_i$ сильно в $L_{\sigma_4}(\Omega)$ при всех $\sigma_4\in[1,6)$, $i=1,\dots,N$. В дальнейшем будут возникать слабые пределы некоторых других нелинейных функций от приближенных решений, которые будем подразумевать существующими (что гарантируется соответствующими оценками и при необходимости выбором подпоследовательности, который будет подразумеваться) и обозначать чертой сверху.

Таким образом, получаем, что предельные функции $\boldsymbol{u}_i$, ρ_i, $i=1,\dots,N$, удовлетворяют уравнениям

$$\int\limits_\Omega \rho_i\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi_i\,d\boldsymbol{x}=0,\quad \psi_i\in W^1_{\frac{6\beta}{5\beta-3}}(\Omega),\ i=1,\dots,N,\tag{1.28}$$

— слабой форме уравнений

$$\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v})=0,\quad i=1,\dots,N,\tag{1.29}$$

где $\boldsymbol{v}=\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^N\boldsymbol{u}_j$; уравнениям (см. (1.9))

$$\int\limits_\Omega\big((\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i):(\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i)+\overline{\tilde p(\rho)}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}_i+\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}_i\big)\,d\boldsymbol{x}$$
$$=\int\limits_\Omega\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i)\,d\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{\varphi}_i\in\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega),\ i=1,\dots,N,\tag{1.30}$$

— слабой форме уравнений импульса (входящих в задачу A)

$$\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i)+\nabla p(\rho)=\operatorname{div}\mathbb{S}_i+\rho_i\boldsymbol{f}_i,\quad i=1,\dots,N,\tag{1.31}$$

в которых вместо $p(\rho)$ пока стоит $\overline{\tilde p(\rho)}$, а также интегральным условиям (1.8) для плотностей.

Замечание 1.1. При выводе формул (1.28) и (1.30) сначала берутся бесконечно гладкие пробные функции, а затем стандартным образом доказывается справедливость этих формул для всех пробных функций указанных классов.

При переходе к пределу по $\varepsilon\to0$ в уравнениях (1.6) использовались следующие тождества (первое из которых опирается на (1.5)):

$$\frac{\varepsilon}{2}\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{m_i}{|\Omega|}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}+\frac12\rho_{i\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}+\frac12\operatorname{div}(\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon})$$
$$=\varepsilon\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}+\operatorname{div}(\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon})-\frac{\varepsilon}{2}(\Delta\rho_{i\varepsilon})\boldsymbol{u}_{i\varepsilon},\quad i=1,\dots,N,\tag{1.32}$$

$$(\Delta\rho_{i\varepsilon})\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}=\operatorname{div}((\nabla\rho_{i\varepsilon})\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon})-(\nabla\rho_{i\varepsilon}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_{i\varepsilon},\quad i=1,\dots,N.\tag{1.33}$$

Замечание 1.2. Как известно из теории уравнений переноса и Навье — Стокса (см., например, [4, разд. 3.1.3]), все решения уравнений неразрывности (1.28) (т. е. (1.29)) рассматриваемого класса автоматически являются так называемыми ренормализованными решениями, т. е. удовлетворяют ренормализованным уравнениям (1.29), формально получающимся из (1.29) умножением на $\widetilde{G}'(\rho_i)$ для всех функций $\widetilde{G}$ определенного класса (а именно, обладающими достаточной гладкостью и свойствами роста в нуле и на бесконечности).

Для завершения предельного перехода по $\varepsilon \to 0$ осталось доказать, что

$$\overline{\tilde{p}(\rho)} = \tilde{p}(\rho) \quad \text{п. в. в } \Omega. \tag{1.34}$$

Для этого рассмотрим для всех $i = 1, \ldots, N$ так называемые эффективные вязкие потоки компонент смеси $\tilde{p}(\rho) - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j$, соответствующие величины для регуляризованной задачи $\tilde{p}(\rho_\varepsilon) - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_{j\varepsilon}$ и их слабые пределы $\overline{\tilde{p}(\rho)} - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j$ в $L_2(\Omega)$. Будем использовать оператор Δ^{-1}, действующий по формуле

$$(\Delta^{-1} v)(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{v(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|},$$

применяя его к функциям $v \in L_{\sigma_5}(\Omega)$, $\sigma_5 > \frac{3}{2}$, продолженным нулем за пределы Ω. При этом $\Delta^{-1} : L_{\sigma_5}(\Omega) \to W^2_{\sigma_5}(\Omega)$ и $\Delta \circ \Delta^{-1} = I$.

Умножим уравнения (1.6) (для функций $\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}$, $\rho_{i\varepsilon}$, $i = 1, \ldots, N$) скалярно на функции $\tau \boldsymbol{r}_{j\varepsilon}$, где $\boldsymbol{r}_{j\varepsilon} = \nabla \Delta^{-1} \rho_{j\varepsilon}$, $j = 1, \ldots, N$, а

$$\tau \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.35}$$

и проинтегрируем по Ω. Тогда, учитывая (1.32) и (1.33), придем к равенствам

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega (\tau \tilde{p}(\rho_\varepsilon) \rho_{j\varepsilon} - \mathbb{S}_{i\varepsilon} : [\nabla \otimes (\tau \boldsymbol{r}_{j\varepsilon})])\, d\boldsymbol{x} = -\int\limits_\Omega \tilde{p}(\rho_\varepsilon) \nabla \tau \cdot \boldsymbol{r}_{j\varepsilon}\, d\boldsymbol{x} \\
&\quad - \int\limits_\Omega \tau (\rho_{i\varepsilon} \boldsymbol{v}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{r}_{j\varepsilon})\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega (\rho_{i\varepsilon} \boldsymbol{v}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : ((\nabla \tau) \otimes \boldsymbol{r}_{j\varepsilon})\, d\boldsymbol{x} \\
&- \int\limits_\Omega \tau \rho_{i\varepsilon} \boldsymbol{f}_{i\varepsilon} \cdot \boldsymbol{r}_{j\varepsilon}\, d\boldsymbol{x} + \varepsilon \int\limits_\Omega \tau \rho_{i\varepsilon} \boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \cdot \boldsymbol{r}_{j\varepsilon}\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_\Omega ((\nabla \rho_{i\varepsilon}) \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla \otimes (\tau \boldsymbol{r}_{j\varepsilon}))\, d\boldsymbol{x} \\
&\qquad + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_\Omega \tau [(\nabla \rho_{i\varepsilon} \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}] \cdot \boldsymbol{r}_{j\varepsilon}\, d\boldsymbol{x}, \quad i, j = 1, \ldots, N.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

С другой стороны, приняв в (1.30) в качестве тестовых функций векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i = \tau \boldsymbol{r}_j$, $i = 1, \ldots, N$ (см. (1.35)), где $\boldsymbol{r}_j = \nabla \Delta^{-1} \rho_j$, $j = 1, \ldots, N$, выводим тождества

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega (\tau \overline{\tilde{p}(\rho)} \rho_j - \mathbb{S}_i : [\nabla \otimes (\tau \boldsymbol{r}_j)])\, d\boldsymbol{x} \\
&\qquad = -\int\limits_\Omega \overline{\tilde{p}(\rho)} \nabla \tau \cdot \boldsymbol{r}_j\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \tau (\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{r}_j)\, d\boldsymbol{x} \\
&\quad - \int\limits_\Omega (\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : ((\nabla \tau) \otimes \boldsymbol{r}_j)\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \tau \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{r}_j\, d\boldsymbol{x}, \quad i, j = 1, \ldots, N.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Из (1.25) и компактности вложения $W^1_{2\beta}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$\boldsymbol{r}_{j\varepsilon} \to \boldsymbol{r}_j \quad \text{в } C(\overline{\Omega}), \quad j = 1, \ldots, N. \tag{1.38}$$

Вычитая из (1.36) равенства (1.37) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, благодаря (1.9), (1.25)–(1.27) и (1.38) при $i, j = 1, \ldots, N$ получим соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (\tau\tilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_{j\varepsilon} - \mathbb{S}_{i\varepsilon} : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_{j\varepsilon})])\,d\boldsymbol{x} - \int_\Omega (\tau\overline{\tilde{p}(\rho)}\rho_j - \mathbb{S}_i : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_j)])\,d\boldsymbol{x}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \tau((\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_j) - (\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}))\,d\boldsymbol{x}. \quad (1.39)$$

Проведем анализ правой части (1.39) (докажем, что она равна нулю). Введем в рассмотрение оператор Comm, действующий по формуле[2)]

$$\mathrm{Comm}(z,\tau) = (\nabla\otimes\nabla\Delta^{-1}z)\tau - z(\nabla\otimes\nabla\Delta^{-1}\tau),$$

о котором известно (см. [4–7]) следующее: если $z_k \to z$ слабо в $L_{\sigma_6}(\Omega)$, $\tau_k \to \tau$ слабо в $L_{\sigma_7}(\Omega)$, где $\sigma_6^{-1}+\sigma_7^{-1} < 1$, то $\mathrm{Comm}(z_k,\tau_k) \to \mathrm{Comm}(z,\tau)$ слабо в $L_{\sigma_8}(\Omega)$, где $\sigma_8^{-1} = \sigma_6^{-1} + \sigma_7^{-1}$. Преобразуем правую часть (1.39) (учитывая (1.28)):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \tau((\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_j) - (\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}))\,d\boldsymbol{x}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \boldsymbol{v}_\varepsilon\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon},\rho_{j\varepsilon})\,d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho_j)\,d\boldsymbol{x}$$
$$- \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\cdot\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}(\rho_{j\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon)\,d\boldsymbol{x}, \quad i,j = 1,\ldots,N. \quad (1.40)$$

Из (1.24) и (1.25) следует, что $\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \to \rho_i\boldsymbol{u}_i$ слабо в $L_{\sigma_9}(\Omega)$ при $i = 1,\ldots,N$ и всех $\sigma_9 < \frac{6\beta}{\beta+3}$, а следовательно, при всех $\sigma_9 \in \left(\frac{2\beta}{2\beta-1}, \frac{6\beta}{\beta+3}\right)$ и при $i,j = 1,\ldots,N$ имеем $\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon},\rho_{j\varepsilon}) \to \mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho_j)$ слабо в $L_{\sigma_{10}}(\Omega)$ при всех $\sigma_{10} = \frac{2\sigma_9\beta}{2\beta+\sigma_9}$. Поскольку вложение $L_{\sigma_{10}}(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$ компактно (при дополнительном условии $\sigma_9 > \frac{6\beta}{5\beta-3}$, заведомо совместном с наложенными выше), $\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon},\rho_{j\varepsilon}) \to \mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho_j)$ сильно в $W_2^{-1}(\Omega)$, $i,j = 1,\ldots,N$. Полученные соотношения вместе с (1.24) влекут равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \boldsymbol{v}_\varepsilon\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon},\rho_{j\varepsilon})\,d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho_j)\,d\boldsymbol{x}, \quad i,j = 1,\ldots,N.$$

Из уравнений (1.5) получим тождества

$$\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}(\rho_{j\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon) = \varepsilon\nabla\rho_{j\varepsilon} + \varepsilon\nabla\Delta^{-1}\left(\frac{m_j}{|\Omega|} - \rho_{j\varepsilon}\right), \quad j = 1,\ldots,N,$$

из которых ввиду (1.21), (1.22) и (1.26) ясно, что последнее слагаемое в правой части (1.40) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, из (1.39) и (1.40) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (\tau\tilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_{j\varepsilon} - \mathbb{S}_{i\varepsilon} : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_{j\varepsilon})])\,d\boldsymbol{x}$$
$$= \int_\Omega (\tau\overline{\tilde{p}(\rho)}\rho_j - \mathbb{S}_i : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_j)])\,d\boldsymbol{x}, \quad i,j = 1,\ldots,N. \quad (1.41)$$

[2)] Оператор Comm сопоставляет скалярным функциям симметричные тензоры ранга 2, при этом действие оператора на нескалярные аргументы подразумевает свертку по части индексов, причем в силу симметрии не требуется оговаривать, по каким именно индексам идет свертка.

Наконец, поскольку

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_{i\varepsilon}:[\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_{j\varepsilon})]\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_{i}:[\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_{j})]\,d\boldsymbol{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{N}\nu_{ik}\int\limits_{\Omega}\tau\rho_{j\varepsilon}\operatorname{div}\,\boldsymbol{u}_{k\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}$$
$$-\sum_{k=1}^{N}\nu_{ik}\int\limits_{\Omega}\tau\rho_{j}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{k}\,d\boldsymbol{x}+\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{N}\nu_{ik}\int\limits_{\Omega}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{k\varepsilon})(2\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}\cdot\nabla\tau+(\Delta\tau)\Delta^{-1}\rho_{j\varepsilon})\,d\boldsymbol{x}$$
$$-\sum_{k=1}^{N}\nu_{ik}\int\limits_{\Omega}(\operatorname{div}\,\boldsymbol{u}_{k})(2\boldsymbol{r}_{j}\cdot\nabla\tau+(\Delta\tau)\Delta^{-1}\rho_{j})\,d\boldsymbol{x}$$
$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_{i\varepsilon}:(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}\rho_{j\varepsilon}])\,d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_{i}:(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}\rho_{j}])\,d\boldsymbol{x},\ i,j=1,\ldots,N, \tag{1.42}$$

(благодаря (1.24), (1.25) и (1.38) последние четыре интеграла в (1.42) взаимно уничтожаются) равенства (1.41) превращаются в следующие соотношения для эффективных вязких потоков компонент смеси:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega}\tau\rho_{j\varepsilon}\left(\tilde{p}(\rho_\varepsilon)-\sum_{k=1}^{N}\nu_{ik}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{k\varepsilon}\right)d\boldsymbol{x}$$
$$=\int\limits_{\Omega}\tau\rho_{j}\left(\overline{\tilde{p}(\rho)}-\sum_{k=1}^{N}\nu_{ik}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{k}\right)d\boldsymbol{x},\quad i,j=1,\ldots,N. \tag{1.43}$$

На этом этапе особенно ярко проявляется отличие многожидкостной модели от одножидкостной ввиду присутствия в (1.43) разноименных произведений вида $\rho_i\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j$, $i\neq j$, которые невозможно анализировать при помощи уравнений неразрывности, как это обычно делается в рамках метода эффективных вязких потоков, лежащего в основе упомянутой теории одножидкостных течений. В общем случае решение этой проблемы (другими словами, обобщение техники эффективных вязких потоков со скалярного на матричный случай) является трудной и нерешенной задачей, но из обозримых способов частичного решения можно предложить два. Первый состоит в рассмотрении треугольных матриц полных вязкостей $\mathbf{N}$ (как это делалось во всех работах по многожидкостной модели до сих пор), а второй, впервые предлагаемый в настоящей работе (и не налагающий ограничений треугольности на $\mathbf{N}$), основан на идеях равенства фазовых давлений и их зависимости от суммарной плотности. Эти идеи были учтены при формулировке задачи A.

Тем самым (в рамках описанного второго подхода) можем вывести из (1.43) такое следствие:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega}\tau\rho_\varepsilon(\nu_0\tilde{p}(\rho_\varepsilon)-\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\varepsilon)\,d\boldsymbol{x}=\int\limits_{\Omega}\tau\rho(\nu_0\overline{\tilde{p}(\rho)}-\operatorname{div}\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}, \tag{1.44}$$

где $\nu_0=\frac{\mathbf{N}^{-1}:\mathbf{J}}{N}>0$ (см. условия на матрицы вязкостей, сформулированные в [1] при постановке задачи A), а $\mathbf{J}$ — матрица размера $N\times N$, все элементы которой равны 1. Ввиду произвольности τ (см. (1.35)) равенство (1.44) выражает соотношение

$$\nu_0\overline{\rho\tilde{p}(\rho)}-\overline{\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}}=\nu_0\rho\overline{\tilde{p}(\rho)}-\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}\quad\text{п. в. в }\Omega. \tag{1.45}$$

Согласно замечанию 1.2 выполнены ренормализованные уравнения (1.29). В частности, для функций $\widetilde{G} \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$ таких, что $|\widetilde{G}'(s)| \leqslant C_{42} s^{-\sigma_{11}}$ при всех $s \in (0,1]$ с некоторым $\sigma_{11} < 1$ и $|\widetilde{G}'(s)| \leqslant C_{43} s^{\sigma_{12}}$ при всех $s \geqslant 1$ с некоторым $\sigma_{12} \in (-1, \beta/2 - 1]$, в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ выполнены уравнения

$$\operatorname{div}(\widetilde{G}(\rho)\boldsymbol{v}) + (\rho\widetilde{G}'(\rho) - \widetilde{G}(\rho)) \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

откуда при $\widetilde{G}(s) = s \ln s$ следует равенство

$$\int\limits_{\Omega} \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} = 0. \tag{1.46}$$

С другой стороны, умножая (1.5) на $\ln(\rho_\varepsilon + l) + \frac{\rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon + l}$, $l \in (0,1]$, интегрируя результат по Ω, затем проводя элементарные оценки и наконец переходя к пределу (сначала по $l \to 0$, а затем по $\varepsilon \to 0$), получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \overline{\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}} \, d\boldsymbol{x} \leqslant 0. \tag{1.47}$$

Комбинируя (1.46) и (1.47), приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega} (\overline{\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}} - \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \, d\boldsymbol{x} \leqslant 0. \tag{1.48}$$

Ввиду монотонности функции $\tilde{p}(\cdot)$ (напомним, что $\tilde{p}\,'(s) = p'(s) + \delta\beta s^{\beta-1} + 2\delta s$, и предполагается (1.2)) верно поточечное неравенство

$$(\rho_\varepsilon - \rho)(\tilde{p}(\rho_\varepsilon) - \tilde{p}(\rho)) \geqslant 0,$$

благодаря которому и формулам (1.25), (1.27) выводим

$$\begin{aligned} &\liminf_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{B} (\tilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon - \tilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho) \, d\boldsymbol{x} \\ &\qquad = \liminf_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{B} (\tilde{p}(\rho_\varepsilon) - \tilde{p}(\rho))(\rho_\varepsilon - \rho) \, d\boldsymbol{x} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{B} \tilde{p}(\rho)(\rho_\varepsilon - \rho) \, d\boldsymbol{x} \geqslant 0, \end{aligned}$$

где B — произвольный шар в Ω, поэтому $\overline{\tilde{p}(\rho)\rho} \geqslant \overline{\tilde{p}(\rho)}\rho$ п. в. в Ω. Тогда из (1.45) следует, что $\overline{\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}} - \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} \geqslant 0$ п. в. в Ω, а ввиду (1.48) это означает что $\overline{\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}} - \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ п. в. в Ω, тем самым из (1.45) получаем $\overline{\tilde{p}(\rho)\rho} = \overline{\tilde{p}(\rho)}\rho$ п. в. в Ω. Отсюда, временно продолжая нечетным образом функцию $\tilde{p}$ на промежуток $(-\infty, 0]$ (сохраняя за ней прежнее обозначение), т. е. принимая, что $\tilde{p}(s) := \tilde{p}(|s|) \operatorname{sgn}(s)$, с целью применения леммы 3.39 из [4, разд. 3.4] выводим (1.34): $\overline{\tilde{p}(\rho)} = \tilde{p}(\rho)$ п. в. в Ω.

Итак, функции ρ_i, $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$, являются решением задачи А, в которой p в уравнениях (1.31) пока что заменено на $\tilde{p}$ (данную задачу будем называть *задачей* A_δ); другими словами, выполнены интегральные соотношения (1.8), (1.28) и (1.30) (в которых $\overline{\tilde{p}(\rho)}$ уже заменено на $\tilde{p}(\rho)$).

В завершение параграфа приведем энергетическое неравенство для предельных функций. А именно, из неравенства (1.10) после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$C_0 \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i \, d\boldsymbol{x} + NC_9. \tag{1.49}$$

§ 2. Предельный переход по $\delta \to 0$

Получим оценки решений задачи A_δ, равномерные по малому параметру δ. Из условий (1.4) и неравенства (1.49) следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{u}_{i\delta}\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_{44}(\|\rho_\delta\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)} I_\gamma + 1) \tag{2.1}$$

(начиная с этой формулы и до конца параграфа у величин, зависящих от δ, будем писать индекс δ), где $\rho_\delta = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_{i\delta}$, $I_\gamma = \chi_{\{\gamma>5/3\}}$, а положительная постоянная C_{44} зависит только от C_0, C_9, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\}$, N и Ω. Из (1.8) имеем $\|\rho_\delta\|_{L_1(\Omega)} = m := \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$.

Далее воспользуемся оператором Боговского $\mathscr{B}$. Возьмем в уравнениях импульса (т. е. (1.30), где $\overline{\tilde{p}(\rho_\delta)}$ заменено на $\tilde{p}(\rho_\delta)$) в качестве тестовых функций векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i = \mathscr{B}([\tilde{p}(\rho_\delta)]^{\sigma_{13}})$, $i = 1, \ldots, N$, при этом (напомним, что $\zeta(\gamma) = 2\gamma + (\gamma - 1)\chi_{\{\gamma<3\}}$)

$$\sigma_{13} = \frac{\zeta(\gamma)}{\gamma} - 1 = \min\left\{\frac{2\gamma - 3}{\gamma}, 1\right\} \in (0, 1]. \tag{2.2}$$

Тогда (см. обозначение (1.15))

$$\int\limits_\Omega [\tilde{p}(\rho_\delta)]^{\sigma_{13}+1}\, d\boldsymbol{x} = \overline{([\tilde{p}(\rho_\delta)]^{\sigma_{13}})_\Omega} \int\limits_\Omega \tilde{p}(\rho_\delta)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \mathbb{S}_{i\delta} : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\, d\boldsymbol{x}$$

$$- \int\limits_\Omega \rho_{i\delta} \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega (\rho_{i\delta} \boldsymbol{v}_\delta \otimes \boldsymbol{u}_{i\delta}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\, d\boldsymbol{x} =: \sum_{s=1}^{4} J_{si}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.3}$$

Получим оценки интегралов в правой части (2.3), равномерные по параметру δ. Сначала отметим, что из свойств $\mathscr{B}$ следуют соотношения

$$\|\boldsymbol{\varphi}_i\|_{W^1_{\sigma_{14}}(\Omega)} \leqslant C_{33}(\sigma_{14}, \Omega)\|\tilde{p}(\rho_\delta)\|^{\sigma_{13}}_{L_{\sigma_{13}\sigma_{14}}(\Omega)}, \quad 1 < \sigma_{13}\sigma_{14} \leqslant 2,\ i = 1, \ldots, N. \tag{2.4}$$

Используя условие (1.1) и интерполяционные неравенства

$$\|\rho\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|\rho\|^{1-q}_{L_1(\Omega)} \|\rho\|^q_{L_{(\sigma_{13}+1)p}(\Omega)}$$

с $q = \frac{(\sigma_{13}+1)(p-1)}{(\sigma_{13}+1)p-1} \in (0, 1)$ и $p = \beta, \gamma$, получаем при всех $i = 1, \ldots, N$ оценки

$$|J_{1i}| \leqslant C_{45}\big(\|\rho_\delta\|^{\gamma\sigma_{15}}_{L_{(\sigma_{13}+1)\gamma}(\Omega)} + \delta\|\rho_\delta\|^{\beta\sigma_{16}}_{L_{(\sigma_{13}+1)\beta}(\Omega)} + 1\big)\|\tilde{p}(\rho_\delta)\|^{\sigma_{13}}_{L_{\sigma_{13}+1}(\Omega)}, \tag{2.5}$$

где $\sigma_{15} = \frac{(\sigma_{13}+1)(\gamma-1)}{(\sigma_{13}+1)\gamma-1} \in (0, 1)$, $\sigma_{16} = \frac{(\sigma_{13}+1)(\beta-1)}{(\sigma_{13}+1)\beta-1} \in (0, 1)$, $C_{45} = C_{45}(a, b, m, \beta, \gamma, \sigma_{13}, \sigma_{15}, \sigma_{16}, |\Omega|)$. В силу (2.1), (2.4) (с $\sigma_{14} = 2$) и интерполяционного неравенства

$$\|\rho_\delta\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)} \leqslant \|\rho_\delta\|^{1-\sigma_{17}}_{L_1(\Omega)} \|\rho_\delta\|^{\sigma_{17}}_{L_{(\sigma_{13}+1)\gamma}(\Omega)} \tag{2.6}$$

верны соотношения

$$|J_{2i}| \leqslant C_{46}\big(\|\rho_\delta\|^{\sigma_{17}}_{L_{(\sigma_{13}+1)\gamma}(\Omega)} I_\gamma + 1\big)\|\tilde{p}(\rho_\delta)\|^{\sigma_{13}}_{L_{\sigma_{13}+1}(\Omega)}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.7}$$

где $\sigma_{17}=\frac{(\sigma_{13}+1)\gamma}{6(\sigma_{13}+1)\gamma-6}\in(0,1)$, $C_{46}=C_{46}(C_{33},C_{44},m,\mathbf{\Lambda},\mathbf{M},\sigma_{13},\sigma_{17},\Omega)$. Благодаря (2.4) с $\sigma_{14}=2$ и (2.6) справедливы оценки

$$|J_{3i}|\leqslant C_{47}\|\rho_\delta\|^{\sigma_{17}}_{L_{(\sigma_{13}+1)\gamma}(\Omega)}\|\tilde p(\rho_\delta)\|^{\sigma_{13}}_{L_{\sigma_{13}+1}(\Omega)},\quad i=1,\dots,N,\tag{2.8}$$

где $C_{47}=C_{47}(C_{33},m,\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\},\sigma_{13},\sigma_{17},\Omega)$. Наконец, в силу (2.1), (2.4) с $\sigma_{14}=\frac{3(\sigma_{13}+1)\gamma}{2(\sigma_{13}+1)\gamma-3}$ и (2.6) имеют место оценки

$$|J_{4i}|\leqslant C_{48}\|\rho_\delta\|_{L_{(\sigma_{13}+1)\gamma}(\Omega)}\big(\|\rho_\delta\|^{2\sigma_{17}}_{L_{(\sigma_{13}+1)\gamma}(\Omega)}I_\gamma+1\big)\|\tilde p(\rho_\delta)\|^{\sigma_{13}}_{L_{\sigma_{13}+1}(\Omega)},\quad i=1,\dots,N,\tag{2.9}$$

где $C_{48}=C_{48}(C_{33},C_{44},N,m,\gamma,\sigma_{13},\sigma_{17},\Omega)$.

Таким образом, из (2.3) с учетом (1.1), (2.5)–(2.9) (при условии (2.2)) следуют соотношения

$$\begin{aligned}&\|\rho_\delta\|^{\gamma}_{L_{(\sigma_{13}+1)\gamma}(\Omega)}+\delta\|\rho_\delta\|^{\beta}_{L_{(\sigma_{13}+1)\beta}(\Omega)}\leqslant C_{49}(\|\tilde p(\rho_\delta)\|_{L_{\sigma_{13}+1}(\Omega)}+1)\\ &\leqslant C_{50}\big(\|\rho_\delta\|^{\gamma\sigma_{15}}_{L_{(\sigma_{13}+1)\gamma}(\Omega)}+\|\rho_\delta\|^{\sigma_{17}}_{L_{(\sigma_{13}+1)\gamma}(\Omega)}+\|\rho_\delta\|^{2\sigma_{17}+1}_{L_{(\sigma_{13}+1)\gamma}(\Omega)}I_\gamma+\delta\|\rho_\delta\|^{\beta\sigma_{16}}_{L_{(\sigma_{13}+1)\beta}(\Omega)}+1\big),\end{aligned}$$

где $C_{49}=C_{49}(a,b,\gamma,\sigma_{13},|\Omega|)$, $C_{50}=C_{50}(C_{45},\dots,C_{49},\beta,\gamma,\sigma_{15},\sigma_{16},\sigma_{17})$, здесь использован тот факт, что $\gamma\sigma_{15}\geqslant 1$. Из этих соотношений непосредственно вытекает, что

$$\|\rho_{i\delta}\|_{L_{\zeta(\gamma)}(\Omega)}+\delta^{\frac1\beta}\|\rho_{i\delta}\|_{L_{\frac{\zeta(\gamma)\beta}{\gamma}}(\Omega)}\leqslant C_{51}(C_{50},N,\beta,\gamma,\sigma_{15},\sigma_{16},\sigma_{17}),\quad i=1,\dots,N,\tag{2.10}$$

а значит, из (2.1) имеем

$$\|\boldsymbol{u}_{i\delta}\|_{W^1_2(\Omega)}\leqslant C_{52}(C_{44},C_{51},\gamma,|\Omega|),\quad i=1,\dots,N.\tag{2.11}$$

Оценку (2.10) можно получить, предположив, что в правой части уравнений баланса импульсов (1.31), входящих в задачу A, вместо $\rho_i\boldsymbol{f}_i$ стоит $\rho\boldsymbol{f}$ при всех $i=1,\dots,N$, где $\boldsymbol{f}\in L_\infty(\Omega)$, причем $\boldsymbol{f}=\nabla\Phi$, $\Phi\in W^1_6(\Omega)$, если $\frac32<\gamma\leqslant\frac53$; в этом случае можно обойтись без условия (1.4).

Ввиду оценок (2.10), (2.11) из семейства $\boldsymbol{u}_{i\delta}$, $\rho_{i\delta}$, $i=1,\dots,N$, $\delta\in(0,1]$, может быть выделена последовательность (которую обозначим так же), для которой при $\delta\to0$ для всех $i=1,\dots,N$ имеют место сходимости

$$\boldsymbol{u}_{i\delta}\to\boldsymbol{u}_i \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega),\ \text{а значит, } \boldsymbol{u}_{i\delta}\to\boldsymbol{u}_i \text{ сильно в } L_{\sigma_{18}}(\Omega),\ \sigma_{18}\in[1,6),\tag{2.12}$$

$$\rho_{i\delta}\to\rho_i \text{ слабо в } L_{\zeta(\gamma)}(\Omega),\quad \rho_i\geqslant0 \text{ п. в. в } \Omega,\tag{2.13}$$

$$\rho^\gamma_{i\delta}\to\overline{\rho^\gamma_i},\ \tilde p(\rho_\delta)\to\overline{p(\rho)} \text{ слабо в } L_{\frac{\zeta(\gamma)}{\gamma}}(\Omega),\quad \overline{\rho^\gamma_i}\geqslant0 \text{ п. в. в } \Omega,\tag{2.14}$$

$$\delta\rho^\beta_{i\delta}\to0,\ \delta\rho^2_{i\delta}\to0 \text{ сильно в } L_{\sigma_{19}}(\Omega),\quad \sigma_{19}\in\Big[1,\frac{\zeta(\gamma)}{\gamma}\Big),\tag{2.15}$$

где $\overline{\rho^\gamma_i}$, $i=1,\dots,N$, и $\overline{p(\rho)}$ обозначают слабые пределы последовательностей $\rho^\gamma_{i\delta}$, $i=1,\dots,N$, и $\tilde p(\rho_\delta)$ в соответствующих пространствах. Вывод соотношений (2.15) становится очевидным в силу следующих неравенств (здесь мы вновь пользуемся интерполяционным неравенством):

$$\|\rho_{i\delta}\|_{L_{\sigma_{19}\beta}(\Omega)}\leqslant m^{1-\sigma_{20}}\|\rho_{i\delta}\|^{\sigma_{20}}_{L_{\frac{\zeta(\gamma)\beta}{\gamma}}(\Omega)},$$

$$\sigma_{19} \in \left(\frac{1}{\beta}, \frac{\zeta(\gamma)}{\gamma}\right), \quad \sigma_{20} = \frac{\zeta(\gamma)(\sigma_{19}\beta - 1)}{\sigma_{19}(\zeta(\gamma)\beta - \gamma)} \in (0,1), \quad i = 1, \dots, N.$$

Отметим также, что из (2.12) и (2.13) при $i, j = 1, \dots, N$ следуют сходимости

$$\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{j\delta} \to \rho_i \boldsymbol{u}_j \text{ слабо в } L_{\sigma_{21}}(\Omega), \quad \frac{\sigma_{21}}{\zeta(\gamma)} + \frac{\sigma_{21}}{6} < 1, \tag{2.16}$$

$$\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta} \otimes \boldsymbol{u}_{j\delta} \to \rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_j \text{ слабо в } L_{\sigma_{22}}(\Omega), \quad \frac{\sigma_{22}}{\zeta(\gamma)} + \frac{\sigma_{22}}{3} < 1. \tag{2.17}$$

В результате предельного перехода по $\delta \to 0$ в (1.8), (1.28) и (1.30) (в которых $\overline{\tilde{p}(\rho)}$ заменено на $\tilde{p}(\rho_\delta)$) получаем (см. замечание 1.1), что предельные функции $\boldsymbol{u}_i$, ρ_i, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяют уравнениям $\int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{v} \cdot \nabla\psi_i \, d\boldsymbol{x} = 0$ при всех $\psi_i \in W^1_{\frac{6\zeta(\gamma)}{5\zeta(\gamma)-6}}(\Omega)$ и $i = 1, \dots, N$, где $\boldsymbol{v} = \frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^N \boldsymbol{u}_j$; уравнениям

$$\int\limits_\Omega ((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \overline{p(\rho)} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i) \, d\boldsymbol{x}$$
$$= \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) \, d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{\varphi}_i \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\frac{\zeta(\gamma)}{\zeta(\gamma)-\gamma}}(\Omega), \ i = 1, \dots, N; \tag{2.18}$$

интегральным условиям для плотностей (1.8), а также энергетическому неравенству (1.49). Таким образом, для завершения предельного перехода по $\delta \to 0$ (см. определение 1.2 из [1]) осталось доказать, что

$$\overline{p(\rho)} = p(\rho) \quad \text{п. в. в } \Omega. \tag{2.19}$$

Примем в качестве тестовых функций в (1.30) (в которых $\overline{\tilde{p}(\rho_\delta)}$ заменено на $\tilde{p}(\rho_\delta)$) векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i = \tau \boldsymbol{r}_{\delta k}$ (см. (1.35)), $i = 1, \dots, N$, где $\boldsymbol{r}_{\delta k} = \nabla\Delta^{-1}T_k(\rho_\delta)$, $\rho_\delta = \sum\limits_{j=1}^N \rho_{j\delta}$, а

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & s \in [0, k], \\ k, & s \in [k, +\infty), \end{cases}$$

— срезающая функция с параметром $k > 0$. Тогда получим тождества

$$\int\limits_\Omega (\tau\tilde{p}(\rho_\delta)T_k(\rho_\delta) - \mathbb{S}_{i\delta} : [\nabla \otimes (\tau \boldsymbol{r}_{\delta k})]) \, d\boldsymbol{x} = -\int\limits_\Omega \tilde{p}(\rho_\delta) \boldsymbol{r}_{\delta k} \cdot \nabla\tau \, d\boldsymbol{x}$$
$$- \int\limits_\Omega \tau(\rho_{i\delta}\boldsymbol{v}_\delta \otimes \boldsymbol{u}_{i\delta}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{r}_{\delta k}) \, d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega (\rho_{i\delta}\boldsymbol{v}_\delta \otimes \boldsymbol{u}_{i\delta}) : ((\nabla\tau) \otimes \boldsymbol{r}_{\delta k}) \, d\boldsymbol{x}$$
$$- \int\limits_\Omega \tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{r}_{\delta k} \, d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{2.20}$$

Замечание 2.1. В § 1 проводилась аналогичная процедура, но в качестве пробных функций брались $\boldsymbol{\varphi}_i = \tau \boldsymbol{r}_{j\varepsilon}$ с $\boldsymbol{r}_{j\varepsilon} = \nabla\Delta^{-1}\rho_{j\varepsilon}$, $i, j = 1, \dots, N$, что давало двухиндексные соотношения (с произвольными i, j) для эффективных вязких потоков. Если действовать по аналогии с теорией одножидкостных уравнений (Навье — Стокса), то следует проводить ту же процедуру, но для $i = j$. Однако оба этих варианта не годятся в данном случае — это связано с нелинейностью срезающей функции T_k, применение которой лежит в основе возможности рассматривать $\gamma > 3/2$ (в противном случае возникает ограничение $\gamma > 3$, в рамках которого фактически действовали до начала § 2 путем регуляризации с параметрами δ и β). Ключевой идеей в рассматриваемой задаче являются отказ от обоих упомянутых вариантов и выбор третьего пути, связанного с выбором в качестве тестовых функций $\boldsymbol{\varphi}_i = \tau\nabla\Delta^{-1}T_k(\rho_\delta)$, $i = 1, \dots, N$, и реализованного ниже.

Подставляя в уравнениях (2.18) в качестве пробных функций $\boldsymbol{\varphi}_i = \tau\bar{\boldsymbol{r}}_k$, $i = 1, \dots, N$, где $\bar{\boldsymbol{r}}_k = \nabla\Delta^{-1}\overline{T_k(\rho)}$ (эта величина является пределом величин $\boldsymbol{r}_{\delta k}$ при $\delta \to 0$, причем сходимость имеет место слабо в $W^1_{\sigma_{23}}(\Omega)$ при всех $\sigma_{23} \in (1, +\infty)$), получим

$$\int_\Omega (\tau\overline{p(\rho)T_k(\rho)} - \mathbb{S}_i : [\nabla \otimes (\tau\bar{\boldsymbol{r}}_k)])\, d\boldsymbol{x}$$
$$= -\int_\Omega \overline{p(\rho)}\,\bar{\boldsymbol{r}}_k \cdot \nabla\tau\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \tau(\rho_i\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \bar{\boldsymbol{r}}_k)\, d\boldsymbol{x}$$
$$- \int_\Omega (\rho_i\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : ((\nabla\tau) \otimes \bar{\boldsymbol{r}}_k)\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \tau\rho_i\boldsymbol{f}_i \cdot \bar{\boldsymbol{r}}_k\, d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{2.21}$$

Перейдем к пределу в (2.20) и вычтем из полученных соотношений уравнения (2.21). При этом ввиду (2.12), (2.14), (2.15) и (2.17) взаимно уничтожатся первый, третий и четвертый интегралы в правых частях. В результате приходим к соотношениям

$$\lim_{\delta\to0}\int_\Omega (\tau\tilde{p}(\rho_\delta)T_k(\rho_\delta) - \mathbb{S}_{i\delta} : [\nabla \otimes (\tau\boldsymbol{r}_{\delta k})])\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega (\tau\overline{p(\rho)T_k(\rho)} - \mathbb{S}_i : [\nabla \otimes (\tau\bar{\boldsymbol{r}}_k)])\, d\boldsymbol{x}$$
$$= \lim_{\delta\to0}\int_\Omega \boldsymbol{v}_\delta \cdot \mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}, T_k(\rho_\delta))\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i, \overline{T_k(\rho)})\, d\boldsymbol{x}$$
$$- \lim_{\delta\to0}\int_\Omega \tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta} \cdot \nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}(T_k(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta)\, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \tau\rho_i\boldsymbol{u}_i \cdot \nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}(\overline{T_k(\rho)}\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}, \tag{2.22}$$

$i = 1, \dots, N$. Первое и второе слагаемые в правой части (2.22) взаимно уничтожаются в силу (2.12), (2.16) и свойств оператора Comm. Рассмотрим подробнее третье и четвертое слагаемые в правой части (2.22). Используя процедуру ренормализации уравнений (1.29) с негладкой функцией T_k (см. [4, лемма 3.5]), получаем соотношение

$$\operatorname{div}(T_k(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta) - k\chi_{\{\rho_\delta>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta = 0. \tag{2.23}$$

Эта процедура законна благодаря тому, что $\rho_\delta \in L_{2\beta}(\Omega)$, $\beta > 3$ (см. (1.25)). Применяя к этому соотношению оператор $\nabla\Delta^{-1}$, умножая на $\tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}$ и интегрируя по области Ω, находим

$$\int_\Omega \tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta} \cdot \nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}(T_k(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta)\, d\boldsymbol{x} = k\int_\Omega \tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta} \cdot \nabla\Delta^{-1}(\chi_{\{\rho_\delta>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta)\, d\boldsymbol{x},$$

$i = 1, \dots, N$. С другой стороны, переходя в (2.23) к пределу при $\delta \to 0$ (после выделения подпоследовательности и использования стандартных обозначений для слабых пределов), приходим к равенству $\operatorname{div}(\overline{T_k(\rho)}\boldsymbol{v}) - k\overline{\chi_{\{\rho>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}} = 0$. Применяя к этому соотношению оператор $\nabla\Delta^{-1}$, умножая на $\rho_i\boldsymbol{u}_i$ и интегрируя по Ω, получаем

$$\int\limits_\Omega \tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}(\overline{T_k(\rho)}\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x} = k\int\limits_\Omega \tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\Delta^{-1}\overline{\chi_{\{\rho>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}}\,d\boldsymbol{x},\quad i=1,\dots,N.$$

Ввиду (2.16) и сходимости $\chi_{\{\rho_\delta>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta \to \overline{\chi_{\{\rho>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}}$ слабо в $L_2(\Omega)$ выводим

$$k\int\limits_\Omega \tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\cdot\nabla\Delta^{-1}(\chi_{\{\rho_\delta>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta)\,d\boldsymbol{x} \to k\int\limits_\Omega \tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\Delta^{-1}\overline{\chi_{\{\rho>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}}\,d\boldsymbol{x}$$

при $\delta\to 0$ для всех $i=1,\dots,N$. Это означает, что последние два слагаемых в правой части (2.22) также взаимно уничтожаются. Таким образом, левая часть (2.22) обращается в нуль. Представим ее в виде

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to0}\int\limits_\Omega \tau T_k(\rho_\delta)\left(\tilde p(\rho_\delta) - \sum_{m=1}^N \nu_{im}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{m\delta}\right)d\boldsymbol{x}\\
&\qquad - \int\limits_\Omega \tau\overline{T_k(\rho)}\left(\overline{p(\rho)} - \sum_{m=1}^N \nu_{im}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_m\right)d\boldsymbol{x}\\
&\qquad - \lim_{\delta\to0}\sum_{m=1}^N \nu_{im}\int\limits_\Omega(\operatorname{div}\,\boldsymbol{u}_{m\delta})(2\boldsymbol{r}_{\delta k}\cdot\nabla\tau + (\Delta\tau)\Delta^{-1}T_k(\rho_\delta))\,d\boldsymbol{x}\\
&\qquad + \sum_{m=1}^N \nu_{im}\int\limits_\Omega(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_m)(2\bar{\boldsymbol{r}}_k\cdot\nabla\tau + (\Delta\tau)\Delta^{-1}\overline{T_k(\rho)})\,d\boldsymbol{x}\\
&+ \lim_{\delta\to0}\int\limits_\Omega \mathbb{S}_{i\delta} : (\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}T_k(\rho_\delta)])\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}\overline{T_k(\rho)}])\,d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Здесь благодаря (2.12) и (2.13) последние четыре интеграла взаимно уничтожаются. Следовательно, (2.22) превращаются в соотношения для эффективных вязких потоков компонент смеси:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to0}\int\limits_\Omega \tau T_k(\rho_\delta)\left(\tilde p(\rho_\delta) - \sum_{m=1}^N \nu_{im}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{m\delta}\right)d\boldsymbol{x}\\
&\qquad = \int\limits_\Omega \tau\overline{T_k(\rho)}\left(\overline{p(\rho)} - \sum_{m=1}^N \nu_{im}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_m\right)d\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

$i=1,\dots,N$. Отсюда аналогично выводу формулы (1.45) (но с привлечением (2.15)) получаем ключевое соотношение

$$\nu_0(\overline{T_k(\rho)p(\rho)} - \overline{T_k(\rho)}\,\overline{p(\rho)}) = \overline{T_k(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}} - \overline{T_k(\rho)}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\quad \text{п. в. в } \Omega. \tag{2.24}$$

В силу липшицевости функции $T_k(\cdot)$, тождества $(T_k(z))^\omega = T_{k^\omega}(z^\omega)$ и элементарного неравенства $|s_1-s_2|^{\omega+1} \leqslant \big(s_1^\omega - s_2^\omega\big)(s_1-s_2)$ при всех $s_{1,2}\geqslant 0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
\limsup_{\delta\to0}\int\limits_\Omega |T_k(\rho) - T_k(\rho_\delta)|^{\omega+1}\,d\boldsymbol{x} &\leqslant \limsup_{\delta\to0}\int\limits_\Omega \big(\rho^\omega - \rho_\delta^\omega\big)(T_k(\rho) - T_k(\rho_\delta))\,d\boldsymbol{x}\\
&= \int\limits_\Omega(\overline{\rho^\omega T_k(\rho)} - \overline{\rho^\omega}\,\overline{T_k(\rho)})\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega(\rho^\omega - \overline{\rho^\omega})(T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)})\,d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Используя выпуклость функции $s \mapsto s^\omega$, вогнутость функции T_k, соотношение (см. [4, упражнение 3.37]) $\overline{\hat{p}(\rho)T_k(\rho)} \geqslant \overline{\hat{p}(\rho)}\,\overline{T_k(\rho)}$ (см. (1.3)) и в конце привлекая (2.24), приходим к соотношениям

$$\limsup_{\delta\to 0}\int\limits_\Omega |T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)|^{\omega+1}\,d\boldsymbol{x} \leqslant \frac{1}{d}\int\limits_\Omega (\overline{T_k(\rho)p(\rho)} - \overline{T_k(\rho)}\,\overline{p(\rho)})\,d\boldsymbol{x}$$
$$= \frac{1}{d\nu_0}\int\limits_\Omega (\overline{T_k(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}} - \overline{T_k(\rho)}\operatorname{div}\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}. \quad (2.25)$$

Ввиду (2.11) и $\omega > 1$ правая часть (2.25) допускает оценку

$$\int\limits_\Omega (\overline{T_k(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}} - \overline{T_k(\rho)}\operatorname{div}\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}$$
$$\leqslant \sup_{\delta>0}\|\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta\|_{L_2(\Omega)}\limsup_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)+T_k(\rho)-\overline{T_k(\rho)}\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant C_{53}(C_{52})\limsup_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant C_{54}(C_{53},|\Omega|)\limsup_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\|_{L_{\omega+1}(\Omega)}. \quad (2.26)$$

Из (2.25), (2.26), очевидно, получаем

$$\sup_{k>1}\limsup_{\delta\to 0}\int\limits_\Omega |T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)|^{\omega+1}\,d\boldsymbol{x} \leqslant C_{55}(C_{54},d,\nu_0,\omega). \quad (2.27)$$

Обозначим для произвольного $k > 1$

$$L_k(s) = \begin{cases} s\ln s - s, & \text{если } s\in(0,k], \\ s\ln k - k, & \text{если } s\in(k,+\infty). \end{cases}$$

Заметим, что $sL_k'(s) - L_k(s) = T_k(s)$ при всех $s\in(0,+\infty)$, причем $L_k(s) = s\ln k + l_k(s)$, где l_k удовлетворяет условиям леммы 3.5 из [4], т. е. можно применить процедуру ренормализации (с функцией l_k) к уравнению неразрывности для ρ_δ и в результате получить

$$\operatorname{div}(L_k(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta) + T_k(\rho_\delta)\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta = 0 \quad \text{п. в. в } \Omega.$$

Интегрируя это соотношение по области Ω и переходя к пределу при $\delta\to 0$, получаем

$$\int\limits_\Omega \overline{T_k(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}}\,d\boldsymbol{x} = 0. \quad (2.28)$$

С другой стороны, ренормализуя уравнение неразрывности для предельной плотности (см. [3, лемма 3.8]), выводим

$$\int\limits_\Omega T_k(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = 0. \quad (2.29)$$

Для любой функции $h\in L_{\sigma_{24}}(\Omega)$ и показателей $\sigma_{24} > 1$, $\sigma_{25}\in[1,\sigma_{24})$ верны оценки

$$\|h - T_k(h)\|_{L_{\sigma_{25}}(\Omega)} \leqslant \|h\|_{L_{\sigma_{24}}(\Omega)}(\operatorname{mes}\{|h|>k\})^{\frac{1}{\sigma_{25}}-\frac{1}{\sigma_{24}}}$$
$$\leqslant \|h\|_{L_{\sigma_{24}}(\Omega)}\|h\|_{L_1(\Omega)}^{\frac{1}{\sigma_{25}}-\frac{1}{\sigma_{24}}}k^{\frac{1}{\sigma_{24}}-\frac{1}{\sigma_{25}}}. \quad (2.30)$$

Полагая $h = \rho_\delta$, $\sigma_{24} = \zeta(\gamma)$ и $\sigma_{25} = 1$, ввиду (2.10) получаем

$$\limsup_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta) - \rho_\delta\|_{L_1(\Omega)} \leqslant C_{55}(C_{51}, N, m, \gamma)k^{\frac{1}{\zeta(\gamma)}-1},$$

следовательно,

$$\lim_{k\to+\infty}\limsup_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta) - \rho_\delta\|_{L_1(\Omega)} = 0. \tag{2.31}$$

Считая, что $h = \rho$ в (2.30), и действуя аналогично, имеем

$$\lim_{k\to+\infty}\|T_k(\rho) - \rho\|_{L_1(\Omega)} = 0. \tag{2.32}$$

С другой стороны, заметим, что

$$\|\overline{T_k(\rho)} - \rho\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \liminf_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta) - \rho_\delta\|_{L_1(\Omega)},$$

а значит, благодаря (2.31) можно заключить, что

$$\lim_{k\to+\infty}\|\overline{T_k(\rho)} - \rho\|_{L_1(\Omega)} = 0.$$

Привлекая (2.32), получаем $\lim\limits_{k\to+\infty}\|\overline{T_k(\rho)} - T_k(\rho)\|_{L_1(\Omega)} = 0$, причем благодаря (2.27) это свойство можно усилить, в частности, до

$$\lim_{k\to+\infty}\|\overline{T_k(\rho)} - T_k(\rho)\|_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{2.33}$$

Ввиду (2.28) и (2.29) можно переписать (2.25) в виде

$$\limsup_{\delta\to 0}\int\limits_\Omega |T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)|^{\omega+1}\,d\boldsymbol{x} \leqslant \frac{1}{d\nu_0}\int\limits_\Omega (T_k(\rho) - \overline{T_k(\rho)})\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}.$$

В силу (2.33) правая, а тем самым и левая части последнего неравенства стремятся к нулю при $k \to \infty$. Привлекая (2.31) и (2.32), окончательно получаем

$$\begin{aligned}\limsup_{\delta\to 0}\|\rho_\delta - \rho\|_{L_1(\Omega)} \leqslant{}& \limsup_{\delta\to 0}\|\rho_\delta - T_k(\rho_\delta)\|_{L_1(\Omega)} \\ &+ \limsup_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta) - T_k(\rho)\|_{L_1(\Omega)} + \|T_k(\rho) - \rho\|_{L_1(\Omega)} \to 0\end{aligned}$$

при $k \to +\infty$, что влечет (2.19), а значит, завершает доказательство всей теоремы 0.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость регуляризованной стационарной задачи о пространственных движениях многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1333–1345.
2. *Боговский М. Е.* О решении некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad // Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. Т. 1. С. 5–40.
3. *Feireisl E., Novotný A.* Singular limits in thermodynamics of viscous fluids. Basel: Birkhäuser, 2009.
4. *Novotný A., Straškraba I.* Introduction to the mathematical theory of compressible flow. Oxford: Oxford Univ. Press, 2004.
5. *Coifman R., Meyer Y.* On commutators of singular integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 212. P. 315–331.
6. *Tartar L.* Compensated compactness and applications to partial differential equations // Nonlinear Anal. Mech. 1979. V. 39. P. 136–212.

7. *Lions P.-L.* Mathematical topics in fluid mechanics. V. 2. Compressible models. New York: Oxford Univ. Press, 1998.

Статья поступила 29 февраля 2016 г.

Мамонтов Александр Евгеньевич, Прокудин Дмитрий Алексеевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
aem75@mail.ru, prokudin@hydro.nsc.ru