Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 519.17

ВЫСОТА ГРАНЕЙ 3–МНОГОГРАННИКОВ

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. Высота грани в 3-многограннике есть максимальная степень инцидентных ей вершин, а высота h 3-многогранника есть минимум высот его граней. Грань называется *пирамидальной*, если она является либо 4-гранью, инцидентной трем 3-вершинам, либо 3-гранью, инцидентной двум вершинам степени не больше 4. При наличии пирамидальных граней h может быть сколь угодно большой, поэтому далее предполагается, что пирамидальных граней нет.

В 1940 г. Лебег доказал, что $h \leq 11$ в каждом четыреангулированном 3-многограннике. В 1995 г. эта оценка была улучшена С. В. Августиновичем и О. В. Бородиным до 10. Недавно эта оценка улучшена нами до точной оценки 8.

Для плоских триангуляций без 4-вершин О. В. Бородин (1992 г.), подтвердив гипотезу Коцига (1979 г.), доказал, что $h \leq 20$, причем оценка неулучшаема; далее для всех триангулированных 3-многогранников он (1998 г.) доказал, что $h \leq 20$. Для многогранников без треугольников нами недавно получена точная оценка 10.

Для произвольных многогранников Хорняк и Йендроль (1996 г.) доказали, что $h \leq 23$. В настоящей статье эта оценка улучшена до точной оценки 20.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.105

Ключевые слова: плоская карта, планарный граф, 3-многогранник, структурные свойства, высота грани.

1. Введение

Под 3-многогранником мы понимаем конечный выпуклый трехмерный многогранник. Как доказал Штейниц [1], 3-многогранники взаимно однозначно соответствуют 3-связным плоским графам.

Плоская карта — это связный плоский псевдограф, т. е. петли и кратные ребра в плоской карте допускаются. Плоская карта называется *нормальной* (НПМ), если каждая ее вершина и грань инцидентны не менее чем трем ребрам. Понятно, что каждый 3-многогранник является НПМ.

Степень $d(x)$ вершины или грани x в НПМ M есть число инцидентных ей ребер. k*-Вершина* и k*-грань* суть вершина и грань степени k, k^+*-вершина* имеет степень не менее k, k^-*-грань* имеет степень не более k, и т. д.

Высота $h(f)$ *грани* f в M есть максимальная степень вершин, инцидентных грани f. *Высота* $h(M)$ (или просто h) *карты* M есть минимальная высота граней в M.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15–01–05867, 16–01–00499) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1939.2014.1), работа второго автора выполнена в рамках государственной работы «Организация проведения научных исследований».

3-Грань называется *пирамидальной*, если она инцидентна не менее чем двум 4^--вершинам, а 4-грань называется *пирамидальной*, если она инцидентна не менее чем трем 3-вершинам.

При наличии в M пирамидальных граней h может быть сколь угодно большой. Действительно, в двойной n-пирамиде каждая грань имеет степень 3 и инцидентна двум 4-вершинам и n-вершине. Для получения плоской четыреангуляции, в которой каждая грань инцидентна трем 3-вершинам и n-вершине, внутрь и снаружи $2n$-цикла поместим по вершине, одну из которых соединим с «четными» вершинами цикла, а другую — с «нечетными». В дальнейшем рассматриваем НПМ без пирамидальных граней.

Напомним несколько результатов о структуре 5^--граней в НПМ без пирамидальных граней. Через δ обозначим минимальную степень вершин в M. Будем говорить, что f является *гранью типа* $(k_1, k_2, \dots)$, или просто $(k_1, k_2, \dots)$-*гранью*, если набор степеней инцидентных ей вершин мажорируется вектором $(k_1, k_2, \dots)$.

В 1940 г. Лебег [2] дал приближенное описание 5^--граней в нормальных плоских картах.

Теорема 1 [2]. *Каждая нормальная плоская карта содержит 5^--грань одного из следующих типов:*

$$(3,6,\infty),\ (3,7,41),\ (3,8,23),\ (3,9,17),\ (3,10,14),\ (3,11,13),$$
$$(4,4,\infty),\ (4,5,19),\ (4,6,11),\ (4,7,9),\ (5,5,9),\ (5,6,7),$$
$$(3,3,3,\infty),\ (3,3,4,11),\ (3,3,5,7),\ (3,4,4,5),\ (3,3,3,3,5).$$

Классическая теорема 1, наряду с другими идеями Лебега [2], имеет многочисленные приложения к проблемам раскраски плоских графов (первые примеры таких приложений и недавний обзор можно найти в [3, 4]). В 2002 г. О. В. Бородин [5] улучшил теорему 1 по шести параметрам, не ухудшая остальных ее параметров, однако вопрос о неулучшаемой версии теоремы 1 остается открытым, даже для частного случая четыреангуляций. Точные описания получены для НПМ с $\delta = 5$ [6] и $\delta \geq 4$ [7] и для триангуляций [8].

Некоторые параметры теоремы Лебега были улучшены для специальных классов плоских графов. В 1989 г. О. В. Бородин [6] доказал, подтвердив гипотезу Коцига [9] 1963 г., что каждая нормальная плоская карта с $\delta = 5$ содержит $(5,5,7)$-грань или $(5,6,6)$-грань, где все параметры точны. Этот результат также подтвердил гипотезу Грюнбаума [10] 1975 г. о том, что циклическая связность (определяемая как минимальное число ребер, удаление которых из графа позволяет получить две компоненты, каждая из которых содержит цикл) каждого 5-связного плоского графа не более 11, причем оценка точна (ранее Пламмером [11] была получена оценка 13).

Для плоских триангуляций без 4-вершин Коциг [12] доказал, что $h \leq 30$, а О. В. Бородин [13], подтвердив гипотезу Коцига [12], доказал, что $h \leq 20$; эта оценка неулучшаема, как следует из конструкции, получаемой из икосаэдра двукратной вставкой 3-вершин во все грани. О. В. Бородин [14] далее показал, что $h \leq 20$ для каждого триангулированного 3-многогранника.

В 1940 г. Лебег [2] доказал, что в каждом четыреангулированном 3-многограннике $h \leq 11$. В 1995 г. эта оценка была улучшена С. В. Августиновичем и О. В. Бородиным [15] до 10. Недавно эта оценка улучшена нами до точной оценки 8 [16], а для многогранников без треугольников получена точная оценка 10 [17].

О. В. Бородин и Д. В. Лопарев [18] при дополнительном предположении об отсутствии $(3, 5, \infty)$-граней доказали, что найдется либо 3-грань высоты не более 20, либо 4-грань высоты не более 11, либо 5-грань высоты не более 5, где оценки 20 и 5 неулучшаемы. Заметим, что в силу конструкции Хорняка и Йендроля [19] при наличии $(3, 5, \infty)$-граней высота 5^--граней может достигать 30. С другой стороны, в [19] доказано, что всегда найдется 5^--грань высоты не более 39.

Другие результаты, связанные с теоремой Лебега, можно найти в уже упомянутых статьях, а также в [20–28].

Для произвольных многогранников Хорняк и Йендроль [19] в 1996 г. доказали, что $h \leq 23$. В настоящей статье улучшим эту оценку до точной оценки 20.

Теорема 2. *Каждая нормальная плоская карта без пирамидальных граней содержит грань высоты не более* 20*; оценка точна.*

Следствие 3. *Каждый* 3*-многогранник без пирамидальных граней содержит грань высоты не более* 20*; оценка точна.*

2. Доказательство теоремы 2

Оценка 20 достигается на конструкции, описанной во введении.

Предположим, что нормальная плоская карта M' является контрпримером к теореме 2. Исходя из M', построим контрпример M к теореме 2, обладающий рядом полезных свойств.

Операцией D1 назовем вставку в 4^+-грань f диагонали, инцидентной 21^+-вершине и разрезающей f на две непирамидальные грани. *Операция* D2 состоит во вставке 3-вершины в грань xyz, где $d(x) \geq 21$, $d(y) \geq 21$, а $d(z) = 5$. Ясно, что операция D2 не порождает пирамидальных граней, а любое применение каждой из операций D1 и D2 переводит контрпример в контрпример.

Применив к M' сначала операцию D1 максимальное число раз, а затем операцию D2 тоже максимальное число раз, получаем искомый контрпример M.

2.1. Структурные свойства контрпримера M.

(P1) *В M нет 6^+-граней.*

Поскольку любая грань f инцидентна 21^+-вершине, применим к ней операцию D1, разделив f на две непирамидальные 4^+-грани.

(P2) *В M нет 4^+-грани $f = \ldots xyz$, где $d(y) \geq 21$, а обе вершины x и z являются 5^+-вершинами.*

К такой грани можно применить операцию D1, разделив ее на две непирамидальные 3^+-грани.

(P3) *В M нет 4-грани $f = wxyz$, где $d(y) \geq 21$, а $d(x) = d(z) = 3$.*

Поскольку в M нет пирамидальных 4-граней, $d(w) \geq 4$ и к f можно применить операцию D1.

(P4) *В M на расстоянии два от 21^+-вершины в границе 4^+-грани может находиться только 3-вершина.*

В противном случае применим операцию D1, соединив 21^+-вершину с 4^+-вершиной на расстоянии два.

(P5) *В M нет 5-вершин.*

Пусть $d(y) = 5$ в границе грани $f = \ldots xyz$. Если x и z являются 21^+-вершинами, то $d(f) = 3$ согласно D1, а значит, можно применить операцию

D2; противоречие. Если $d(x) \le 20$ и $d(z) \le 20$, то можно соединить y с 21^+-вершиной, инцидентной грани f. Следовательно, степени смежных с y вершин чередуются (21^+ и 20^-), что противоречит нечетности $d(y)$.

(P6) *В M нет 3-вершины, инцидентной в точности двум 3-граням.*

Пусть 3-вершина v инцидентна 4^+-грани и граням vv_1v_2 и vv_2v_3. Заметим, что $d(v_1) \ge 6$ и $d(v_3) \ge 6$. Если $d(v_1) \ge 21$, то можно применить D1, вставив диагональ v_1v_3. Если $d(v_1) \le 20$ и $d(v_3) \le 20$, то можно соединить v с 21^+-вершиной в инцидентной 4^+-грани.

2.2. Перераспределение зарядов. Из формулы Эйлера $|V|-|E|+|F|=2$ для M получаем

$$\sum_{v\in V}(d(v)-6)+\sum_{f\in F}(2d(f)-6)=-12, \tag{1}$$

где V, E и F — множества вершин, ребер и граней в M соответственно.

Зададим начальный заряд $\mu(x)$ формулами $\mu(x)=d(x)-6$ для каждого $x\in V$ и $\mu(x)=2d(x)-6$ для каждого $x\in F$. Используя свойства M как контрпримера, локально перераспределим заряды, сохранив их сумму, таким образом, что новый заряд $\mu'(x)$ окажется неотрицательным для всех $x\in V\cup F$. Это будет противоречить тому факту, что сумма новых зарядов в соответствии с (1) равна -12.

Обозначим через $v_1, v_2, \ldots, v_{d(v)}$ соседей вершины v в циклическом порядке. 4-Грань $wxyz$ называется *особой*, если $d(x)=d(w)=3$, $4\le d(y)\le 20$ и $d(z)\ge 21$. Назовем 3-вершину v *плохой*, если v инцидентна треугольнику v_1vv_2, где $d(v_1)\ge 21$, $6\le d(v_2)\le 20$, особой грани vv_2xv_3 и 4^+-грани $\ldots v_1vv_3$ (рис. 1, R3). Заметим, что $d(x)\ge 21$. Вершина, инцидентная только 3-граням, называется *симплициальной*.

Будем использовать следующие правила перераспределения зарядов (см. рис. 1).

R1. *Каждая 3-вершина, не инцидентная 3-граням, получает 1 от каждой инцидентной грани.*

R2. *Каждая 3-вершина v, инцидентная единственному треугольнику $T = v_1vv_2$, где $d(v_i)\ge 21$, $1\le i\le 2$, получает $\frac{1}{2}$ от каждой v_i через T и по 1 от каждой из двух инцидентных 4^+-граней.*

R3. *Каждая плохая 3-вершина v, инцидентная треугольнику $T=v_1vv_2$, где $d(v_1)\ge 21$, $6\le d(v_2)\le 20$, и особой грани $f=vv_2xv_3$, где $d(x)\ge 21$, получает $\frac{3}{4}$ от v_1 через T, $\frac{1}{4}$ от x через f и 1 от каждой из двух инцидентных 4^+-граней.*

R4. *Каждая 3-вершина v, инцидентная единственному треугольнику $T = v_1vv_2$, где $d(v_1)\ge 21$, $6\le d(v_2)\le 20$, и неособой 4^+-грани $f=\ldots v_2vv_3$, получает $\frac{3}{4}$ от v_1 через T, $\frac{5}{4}$ от f и 1 от другой инцидентной 4^+-грани.*

R5. *Каждая симплициальная 3-вершина, смежная с тремя 21^+-вершинами, получает $\frac{1}{2}$ от каждой из них через каждую инцидентную грань.*

R6. *Каждая симплициальная 3-вершина, смежная в точности с двумя 21^+-вершинами, получает $\frac{3}{4}$ от каждой из них через каждую инцидентную грань.*

R7. *Каждая 4-вершина v, инцидентная треугольнику $T=v_1vv_2$, где $d(v_i)\ge 21$, $1\le i\le 2$, получает $\frac{1}{4}$ от каждой v_i через T.*

R8. *Каждая 4-вершина v, инцидентная треугольнику $T=v_1vv_2$, где $d(v_1)\ge 21$, $6\le d(v_2)\le 20$, получает $\frac{1}{2}$ от v_1 через T.*

R9. *Каждая 4-вершина, инцидентная особой грани f, получает $\frac{1}{2}$ через f от 21^+-вершины, инцидентной f.*

R10. *Каждая 4-вершина получает $\frac{1}{2}$ от каждой инцидентной неособой 4^+-грани.*

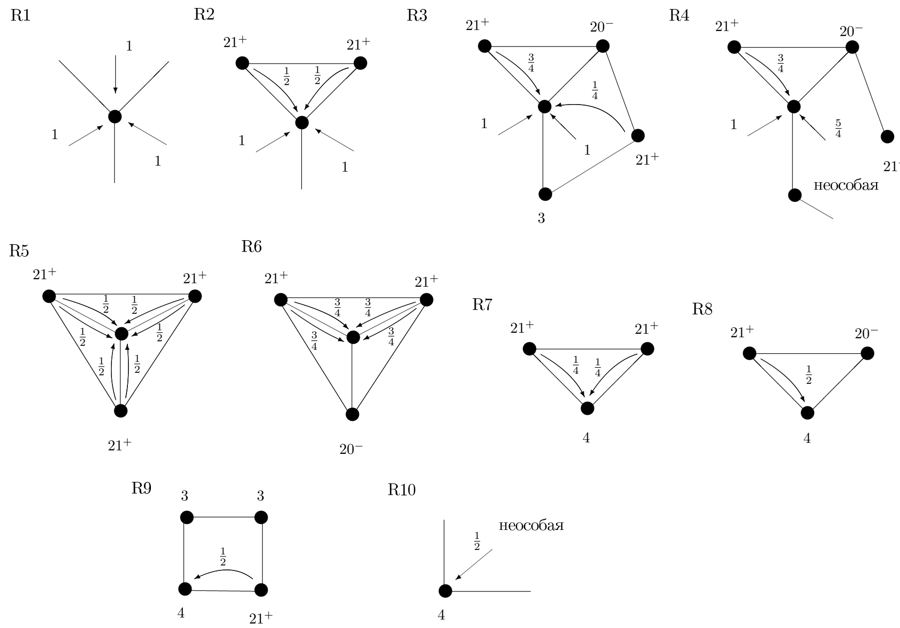

Рис. 1. Правила перераспределения зарядов.

2.3. Доказательство неравенства $\mu'(x) \geq 0$ для $x \in V \cup F$.

Случай 1: $f \in F$. Согласно (P1) $d(f) \leq 5$, поскольку каждая грань в M инцидентна 21^+-вершине. Пусть $d(f) = 5$. Если f не передает заряд по правилу R4, то $\mu'(f) \geq 2 \cdot 5 - 6 - 4 \cdot 1 = 0$. В противном случае в границе f существует цепь из 3-вершины, вершины степени от 6 до 20 и 21^+-вершины. Отсюда $\mu'(f) \geq 4 - 3 \cdot \frac{5}{4} > 0$ по R1–R10.

Пусть $d(f) = 4$. Если f инцидентна двум 3-вершинам, то $\mu'(f) = 2 - 2 \cdot 1 = 0$ по R1–R4. Остается предположить ввиду (P4), что f инцидентна в точности одной 3-вершине v. Если f не передает v заряд $\frac{5}{4}$ по R4, то $\mu'(f) \geq 2 - 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$ по R1–R4 и R10. В противном случае f инцидентна не менее чем двум 6^+-вершинам, а значит, $\mu'(f) \geq 2 - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} > 0$ по R4, R10.

Если $d(f) = 3$, то f не участвует в R1–R10, откуда $\mu'(f) = \mu(f) = 0$.

Случай 2: $v \in V$. Заметим, что по правилам R2–R9 заряд между вершинами передается только от 21^+-вершин 4^--вершинам. Более того, вершина v через каждую инцидентную грань передает не более $\frac{3}{4}$. Если $d(v) \geq 24$, то $\mu'(f) \geq d(v) - 6 - d(v) \cdot \frac{3}{4} = \frac{d(v)-24}{4} \geq 0$.

Пусть $21 \leq d(v) \leq 23$. Если бы v передавала через каждую грань заряд $\frac{3}{4}$, то 23-вершина имела бы *дефицит* $\frac{1}{4}$, а 22- и 21-вершины — дефицит $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ соответственно. Далее убедимся, что на самом деле на некоторых гранях вершина v *экономит* заряд по отношению к уровню $\frac{3}{4}$. Чтобы оценить суммарный заряд, передаваемый вершиной v, понадобятся следующие замечания.

(S1) Через неособую 4^+-грань v передает нулевой заряд, т. е. v экономит на такой грани $\frac{3}{4}$.

(S2) Экономия v на инцидентной $(6^+, 6^+, 21^+)$-грани равна $\frac{3}{4}$.

(S3) Через особую $(3, 3, 6^+, 21^+)$-грань вершина v может передавать $\frac{1}{4}$ по R3 плохой 3-вершине, т. е. экономит на такой грани заряд $\frac{1}{2}$.

(S4) Через особую $(3, 3, 4, 21^+)$-грань вершина v передает $\frac{1}{2}$ по R9, т. е. экономит $\frac{1}{4}$.

(S5) Через 3-грань, инцидентную 4-вершине, v передает не более $\frac{1}{2}$ по R7, R8, поэтому экономит не менее $\frac{1}{4}$.

(S6) Как следует из (S1), (S4) и (S5), наличие 4-вершины w, смежной с v, влечет суммарную экономию на двух гранях, инцидентных ребру vw, не менее $\frac{1}{2}$.

(S7) Экономия может оказаться равной нулю, только если v смежна с 3-вершиной в границе 3-грани (см. R3, R4 и R6).

Подслучай 2.1: $d(v) = 23$. Чтобы погасить дефицит в $\frac{1}{4}$, достаточно иметь при v грань с ненулевой экономией. Согласно (S7) вершина v симплициальна, при v нет 4-вершин, а степени соседей вершины v чередуются с 3 на 6^+. Ввиду нечетности $d(v)$ последнее невозможно.

Подслучай 2.2: $d(v) = 22$. Согласно (S1)–(S6) вершина v симплициальна, при v нет 4-вершин, а степени соседей вершины v чередуются с 3 на 6^+, причем каждая 3-вершина при v симплициальна по (P6). Кроме того, каждая 3-вершина должна быть смежна с 20^--вершиной, в противном случае v на двух 3-гранях при такой 3-вершине сэкономит $2 \cdot \frac{1}{4}$ (см. R5). Отсюда следует, что имеет место чередование 20^--вершин с 21^+-вершинами (через 3-вершины). Последнее невозможно ввиду того, что таких вершин при v нечетное число.

Подслучай 2.3: $d(v) = 21$. Напомним, что надо найти суммарную экономию в $\frac{3}{4}$. Ввиду (P2) и (S2) такая экономия достигается, если рядом с v есть две соседние 6^+-вершины. Иначе из-за нечетности $d(v)$ найдутся две соседние 4^--вершины v_1 и v_{21}. Если $d(v_1) = d(v_{21}) = 4$, то на неособой грани $f_{21} = \dots v_1 v v_{21}$ вершина v экономит $\frac{3}{4}$. Поскольку $d(v_1) = d(v_{21}) = 3$ противоречит свойству (P3), то $d(v_1) = 3$, $d(v_{21}) = 4$, т. е. f_{21} особая благодаря (S1). На гранях f_{21} и $f_{20} = \dots v_{20} v v_{21}$ вершина v экономит не менее $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ по (S6), поэтому можно считать, что на остальных 19 гранях экономии нет.

Согласно (S7) все эти 19 граней являются треугольниками, инцидентными 3-вершинам. Ввиду отсутствия пирамидальных граней $d(v_1) = d(v_3) = \dots = d(v_{19}) = 3$, причем каждая из этих 3-вершин, кроме v_1, симплициальна благодаря (P6).

Если $d(v_2) \ge 21$, то v экономит еще $\frac{1}{4}$ на грани $v_1 v v_2$ согласно правилу R2, поэтому $d(v_2) \le 20$. Отсюда следует, что $d(v_4) \ge 21$, поскольку $h(M) \ge 21$, и на четных вершинах начиная с v_4 имеем чередование 21^+-вершин с 20^--вершинами. Следовательно, $d(v_{20}) \ge 21$, а это значит, что $d(f_{20}) = 3$ ввиду (P4), поэтому v экономит на f_{20} не менее $\frac{1}{2}$. С учетом экономии в $\frac{1}{4}$ на f_{21} имеем $\mu'(v) \ge 0$.

Подслучай 2.4: $6 \le d(v) \le 20$. Поскольку v не участвует в R1–R10, то $\mu'(v) = \mu(v) = d(v) - 6 \ge 0$.

Подслучай 2.5: $d(v) = 4$. Заметим, что v получает $\frac{1}{2}$ по R7–R10 от каждой инцидентной грани или через таковую, отсюда $\mu'(v) \ge -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$.

Подслучай 2.6: $d(v) = 3$. Заметим, что ввиду (P6) вершина v инцидентна не более чем одной 3-грани, поэтому $\mu'(v) = -3 + 3 = 0$ согласно R1–R6.

Таким образом, доказали, что $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$, что противоречит (1) и тем самым завершает доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Steinitz E.* Polyeder und Raumeinteilungen // Enzykl. Math. Wiss. (Geometrie). 1922. V. 3AB, N 12. P. 1–139.
2. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
3. *Borodin O. V.* Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.
4. *Ore O., Plummer M. D.* Cyclic coloration of plane graphs // Recent progress in combinatorics (W. T. Tutte, ed.) New York: Acad. Press, 1969. P. 287–293.
5. *Бородин О. В.* Усиление теоремы Лебега о строении младших граней в выпуклых многогранниках // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2002. Т. 9, № 3. С. 29–39.
6. *Бородин О. В.* Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоских графах // Мат. заметки. 1989. V. 46, N 5. P. 9–12.
7. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2841–2847.
8. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V.* Describing faces in plane triangulations // Discrete Math. 2014. V. 319. P. 47–61.
9. *Kotzig A.* From the theory of Eulerian polyhedra // Mat. Čas. 1963. V. 13. P. 20–31.
10. *Grünbaum B.* Polytopal graphs // Studies in graph theory (D. R. Fulkerson, ed.) Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1975. P. 201–224. (MAA Stud. Math.; V. 12).
11. *Plummer M. D.* On the cyclic connectivity of planar graph. Berlin: Springer-Verl., 1972.
12. *Kotzig A.* Extremal polyhedral graphs // Ann. New York Acad. Sci. 1979. V. 319. P. 569–570.
13. *Бородин О. В.* Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 16–19.
14. *Borodin O. V.* Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces // Discrete Math. 1998. V. 186. P. 281–285.
15. *Августинович С. В., Бородин О. В.* Окрестности ребер в нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 3–9.
16. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Вершинно-граневый вес ребер в 3-многогранниках // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 338–350.
17. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Высота малых граней в 3-многогранниках без треугольников // Сиб. мат. журн. (принята).
18. *Бородин О. В., Лопарев Д. В.* Высота младших граней в плоских нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1998. Т. 5, № 4. С. 6–17.
19. *Horňák M., Jendrol' S.* Unavoidable sets of face types for planar maps // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16, N 2. P. 123–142.
20. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane – a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.
21. *Бородин О. В., Вудал Д. Р.* Вес граней в плоских картах // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 5. С. 648–657.
22. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Cyclic degrees of 3-polytopes // Graphs Comb. 1999. V. 15. P. 267–277.
23. *Бородин О. В.* Совместное обобщение теорем Лебега и Коцига о комбинаторике плоских графов // Дискрет. математика. 1991. Т. 3, № 4. С. 24–27.
24. *Ferencová B., Madaras T.* Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310. P. 1661–1675.
25. *Jendrol' S.* Triangles with restricted degrees of their boundary vertices in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 196. P. 177–196.
26. *Kotzig A.* Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Časopis. 1955. V. 5. P. 101–113.
27. *Mohar B., Škrekovski R., Voss H.-J.* Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9 // J. Graph Theory. 2003. V. 44. P. 261–295.

28. *Wernicke P.* Über den kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 413–426.

Статья поступила 1 апреля 2015 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
shmgnanna@mail.ru