Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 510.5+512.54.0

ИНДЕКСНОЕ МНОЖЕСТВО АВТОУСТОЙЧИВЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СИЛЬНЫХ КОНСТРУКТИВИЗАЦИЙ ГРУПП

С. С. Гончаров, Н. А. Баженов, М. И. Марчук

Аннотация. Получена точная оценка алгоритмической сложности для класса сильно конструктивизируемых вычислимых групп, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.110

Ключевые слова: вычислимая модель, сильно конструктивизируемая модель, автоустойчивость, автоустойчивость относительно сильных конструктивизаций, группа, 2-ступенно нильпотентная группа, гиперарифметическая иерархия, индексное множество.

Работа посвящена исследованию алгоритмической сложности для классов вычислимых моделей. Оценка алгоритмической сложности осуществляется на основе подхода из [1], основанного на изучении индексных множеств.

Используемые в работе основные понятия и определения теории вычислимых моделей можно найти в [2, 3]. Пусть σ — вычислимая сигнатура без функциональных символов. Известно [4], что для конечной сигнатуры σ существует универсальная вычислимая нумерация ν класса всех вычислимых моделей σ. Для бесконечной сигнатуры σ существует универсальная вычислимая нумерация ν для класса, состоящего из всех вычислимых моделей σ и всех конечных вычислимых моделей конечных частей сигнатуры σ. Зафиксируем такую нумерацию ν. В дальнейшем через $\mathfrak{M}_e$ будем обозначать вычислимую модель сигнатуры σ, имеющую номер e в нумерации ν. Также отметим, что можно рассматривать модели произвольной вычислимой сигнатуры σ (при необходимости осуществляя стандартный переход от функций к их графикам).

Вычислимая модель $\mathfrak{M}$ называется *разрешимой*, если ее полная диаграмма $FD(\mathfrak{M})$ вычислима. Модель $\mathfrak{M}$ называется *сильно конструктивизируемой*, если $\mathfrak{M}$ обладает разрешимой копией. Сильно конструктивизируемая модель $\mathfrak{M}$ *автоустойчива относительно сильных конструктивизаций*, если для любых разрешимых копий $\mathfrak{N}_0$ и $\mathfrak{N}_1$ модели $\mathfrak{M}$ существует вычислимый изоморфизм $f : \mathfrak{N}_0 \to \mathfrak{N}_1$.

Работа выполнена С. С. Гончаровым при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00376), Н. А. Баженовым — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–31–60058-мол_а_дк), М. И. Марчук — Совета по грантам президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ–6848.2016.1).

Систематическое исследование автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций было начато А. Т. Нуртазиным [4, 5]. В частности, в [5] получен критерий автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для сильно конструктивизируемых моделей. В [6, 7] исследовались тьюринговы степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций. В [8–15] изучались индексные множества для классов автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций моделей.

Пусть K — класс моделей сигнатуры σ. *Индексным множеством* класса K называется множество $I(K) = \{e : \mathfrak{M}_e \in K\}$. Определим множество

$$SC\,\mathrm{Aut}(K) = \{e \in \omega : e \in I(K),\ \mathfrak{M}_e \text{ — сильно конструктивизируемая модель, автоустойчивая относительно сильных конструктивизаций}\}.$$

Напомним, что сигнатура σ называется *нетривиальной*, если σ содержит хотя бы один предикатный или функциональный символ, имеющий местность не менее чем 2. В [8–11] доказано, что для любой нетривиальной вычислимой сигнатуры σ индексное множество $SC\,\mathrm{Aut}(K_\sigma)$ класса всех вычислимых моделей σ, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством. В [12–15] доказано, что индексное множество $SC\,\mathrm{Aut}(K)$ является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством для каждого из следующих классов K: булевы алгебры, дистрибутивные решетки, кольца, коммутативные полугруппы, линейные порядки, структуры с двумя отношениями эквивалентности.

Будем рассматривать группы как модели сигнатуры $\sigma_G = \{\cdot^2\}$. В [12, 13] сформулирован следующий открытый вопрос.

Проблема 1 [12, с. 14; 13, с. 511]. *Какова точная оценка сложности индексного множества класса вычислимых групп, являющихся автоустойчивыми относительно сильных конструктивизаций?*

В данной работе получен ответ на проблему 1. Доказано, что индексное множество $SC\,\mathrm{Aut}(2SNG)$ класса вычислимых 2-ступенно нильпотентных групп, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством. В частности, отсюда следует, что индексное множество класса всех вычислимых групп, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, также является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством.

В § 1 приводятся предварительные сведения из теории групп и теории вычислимых моделей. В § 2 получена точная оценка сложности для индексного множества $SC\,\mathrm{Aut}(2SNG)$. Доказательство опирается на результаты [13] и использует преобразование из [16], сопоставляющее кольцам с единицей 2-ступенно нильпотентные группы. В § 3 приводятся некоторые следствия основного результата. Отметим, что наше исследование тесно связано с работами [17, 18], в которых изучалась **d**-вычислимая размерность для вычислимых 2-ступенно нильпотентных групп.

§ 1. Предварительные сведения

Договоримся считать, что все рассматриваемые сигнатуры вычислимы. Кроме того, считаем, что для любой рассматриваемой не более чем счетной структуры ее носитель является подмножеством ω. Для структуры $\mathscr{S}$ через $\deg(\mathscr{S})$ обозначается тьюрингова степень атомной диаграммы $\mathscr{S}$. Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ —

натуральные числа, то $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ — это номер n-ки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в канторовской нумерации. Зафиксируем вычислимую функцию $Cn(m, k, x)$ со следующим свойством: если $m \neq 0$, то для любого $x \in \omega$ выполнено

$$x = \langle Cn(m, 1, x), Cn(m, 2, x), \ldots, Cn(m, m, x)\rangle.$$

Предварительные сведения о группах можно найти в [19]. Пусть G — группа. *Центром* G называется множество $Z(G) = \{x \in G : (\forall y \in G)(xy = yx)\}$. Если $a, b \in G$, то *коммутатор* элементов a и b — это элемент $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Говорят, что группа G является 2-*ступенно нильпотентной*, если для любых элементов $a, b \in G$ их коммутатор $[a, b]$ лежит в центре G. Пусть p — простое число. Абелева p-группа называется *элементарной*, если любой ее ненулевой элемент имеет порядок p.

Следуя [16, 18], приведем краткое описание эффективного преобразования из [16], кодирующего кольца с единицей в 2-ступенно нильпотентные группы. Кольца с единицей рассматриваются как модели сигнатуры $\sigma_R = \{+^2, -^1, \cdot^2; 0, 1\}$. Для простоты изложения будем считать, что все рассматриваемые кольца ассоциативны. Кроме того, отметим следующий факт: если $\mathscr{R}$ — кольцо с единицей, то операция $-_{\mathscr{R}}$ и константы $0^{\mathscr{R}}, 1^{\mathscr{R}}$ определимы в $\mathscr{R}$ формулами сигнатуры $\sigma_R^0 = \{+^2, \cdot^2\}$. Поэтому в дальнейшем (там, где это не создает двусмысленности) договоримся отождествлять кольцо $\mathscr{R}$ и его обеднение до сигнатуры σ_R^0.

Пусть $\mathscr{R}$ — не более чем счетное кольцо с единицей, имеющее носитель $R \subseteq \omega$. Без ограничения общности можно считать, что $0^{\mathscr{R}} = 0$ и $1^{\mathscr{R}} = 1$. Определим структуру $G_{st}(\mathscr{R})$ сигнатуры σ_G следующим образом: носитель $G_{st}(\mathscr{R})$ равен $\{\langle a, b, c\rangle : a, b, c \in R\}$, а умножение на $G_{st}(\mathscr{R})$ задается по правилу

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle x, y, z\rangle = \langle a +_{\mathscr{R}} x, b +_{\mathscr{R}} y, b \cdot_{\mathscr{R}} x +_{\mathscr{R}} c +_{\mathscr{R}} z\rangle.$$

В дальнейшем, если из контекста ясно, о какой операции идет речь, будем опускать нижние индексы у символов операций $+_{\mathscr{R}}, -_{\mathscr{R}}, \cdot_{\mathscr{R}}, \cdot_{G_{st}(\mathscr{R})}$.

Лемма 1.1 [16] (см. также [18]). *Пусть $\mathscr{R}$ — не более чем счетное кольцо с единицей. Тогда*

(1) *$G_{st}(\mathscr{R})$ является $\deg(\mathscr{R})$-вычислимой 2-ступенно нильпотентной группой,*

(2) *$\langle 0, 0, 0\rangle$ есть нейтральный элемент $G_{st}(\mathscr{R})$,*

(3) *для любого элемента $\langle a, b, c\rangle \in G_{st}(\mathscr{R})$ верно $\langle a, b, c\rangle^{-1} = \langle -a, -b, b\cdot a - c\rangle$,*

(4) *$Z(G_{st}(\mathscr{R})) = \{\langle 0, 0, c\rangle : c \in \mathscr{R}\}$.*

Рассмотрим сигнатуру $\sigma_G^* = \sigma_G \cup \{a_0, a_1\}$ и определим структуру $G_{st}^*(\mathscr{R})$ по правилу

$$G_{st}^*(\mathscr{R}) = (G_{st}(\mathscr{R}), \langle 1, 0, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle).$$

Зададим вспомогательные формулы:

(1) Π_1-формула $\Psi_Z(x)$, говорящая о том, что элемент x лежит в центре группы:

$$\Psi_Z(x) = \forall y(x \cdot y = y \cdot x),$$

(2) бескванторная формула $\Psi_P(x, y, z) = (x \cdot y = z)$,

(3) Σ_1-формула

$$\Psi_M(x, y, z) = \exists u \exists v([a_0, u] = x \,\&[a_1, v] = y \,\&[a_1, u] = [a_0, v] = e \,\&[v, u] = z),$$

где e — это нейтральный элемент. В силу того, что в группе нейтральный элемент и операция взятия обратного элемента определимы формулами первого порядка, можно считать, что формулы Ψ_Z, Ψ_P, Ψ_M являются формулами сигнатуры σ^*_G.

Предположим, что $\mathscr{S}$ — это изоморфная копия структуры $G^*_{st}(\mathscr{R})$. Определим σ^0_R-структуру $R_{st}(\mathscr{S})$ следующим образом: носитель $R_{st}(\mathscr{S})$ равен множеству $\Psi^{\mathscr{S}}_Z$, графики операций $+$ и $\cdot$ задаются как $\Psi^{\mathscr{S}}_P$ и $\Psi^{\mathscr{S}}_M$ соответственно.

Лемма 1.2 [16] (см. также [18, лемма 6.6]). *Пусть $\mathscr{R}$ — не более чем счетное кольцо с единицей, $\mathscr{S}$ — изоморфная копия $G^*_{st}(\mathscr{R})$. Тогда $R_{st}(\mathscr{S})$ — это кольцо, изоморфное $\mathscr{R}$. Более того, отображение $F_{st} : c \mapsto \langle 0, 0, c\rangle$ (для $c \in \mathscr{R}$) является изоморфизмом колец, действующим из $\mathscr{R}$ на $R_{st}(G^*_{st}(\mathscr{R}))$.*

Предложение 1.1. *Пусть $\mathscr{R}$ — не более чем счетное кольцо с единицей. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *кольцо $\mathscr{R}$ сильно конструктивизируемо,*

(b) *группа $G_{st}(\mathscr{R})$ сильно конструктивизируема,*

(c) *структура $G^*_{st}(\mathscr{R})$ сильно конструктивизируема.*

Более того, кольцо $\mathscr{R}$ разрешимо в том и только том случае, когда группа $G_{st}(\mathscr{R})$ разрешима.

Доказательство. Эквивалентность пп. (b) и (c) следует из того, что $G^*_{st}(\mathscr{R})$ есть обогащение группы $G_{st}(\mathscr{R})$ конечным числом констант.

Пусть $\mathscr{S}$ — разрешимая копия структуры $G^*_{st}(\mathscr{R})$. Отметим, что кольцо $R_{st}(\mathscr{S})$ определимо формулами первого порядка в $\mathscr{S}$. Вследствие леммы 1.2 $R_{st}(\mathscr{S})$ является разрешимой копией $\mathscr{R}$. В частности, если группа $G_{st}(\mathscr{R})$ разрешима, то кольцо $\mathscr{R}$ вычислимо изоморфно разрешимому кольцу $R_{st}(G^*_{st}(\mathscr{R}))$.

Предположим, что $\mathscr{R}_0$ — это разрешимая копия $\mathscr{R}$. Очевидно, что группа $G_{st}(\mathscr{R}_0)$ изоморфна $G_{st}(\mathscr{R})$. Для доказательства предложения достаточно показать, что структура $G_{st}(\mathscr{R}_0)$ разрешима.

Будем считать, что $\mathscr{R}_0$ является бесконечной структурой с носителем ω. Зафиксируем множество новых констант $C = \{c_k : k \in \omega\}$. Определим сигнатуры $\sigma_{G,C} = \sigma_G \cup C$ и $\sigma_{R,C} = \sigma_R \cup C$. Следуя [16], сопоставим каждой формуле ψ сигнатуры $\sigma_{G,C}$ формулу ψ^R сигнатуры $\sigma_{R,C}$. Без ограничения общности можно считать, что ψ находится в приведенной нормальной форме (см. [20, с. 134]) и в ψ могут входить только переменные из множества $X = \{x_i : i \in \omega\}$. Для терма $t \in C \cup X$ и $j \in \{1, 2, 3\}$ зададим новый терм

$$r(t, j) = \begin{cases} c_{Cn(3,j,k)}, & \text{если } t = c_k,\ k \in \omega, \\ y_{i,j}, & \text{если } t = x_i,\ i \in \omega. \end{cases}$$

(1) Если $\psi = (t \cdot p = q)$, где $t, p, q \in C \cup X$, то

$$\psi^R = (r(t,1) + r(p,1) = r(q,1))\,\&(r(t,2) + r(p,2) = r(q,2)) \\ \&(r(t,2) \cdot r(p,1) + r(t,3) + r(p,3) = r(q,3)).$$

(2) Если $\psi = \psi_0 * \psi_1$ (где $* \in \{\vee, \&, \to\}$), то $\psi^R = \psi^R_0 * \psi^R_1$.

(3) Если $\psi = \neg\psi_0$, то $\psi^R = \neg\psi^R_0$.

(4) Если $\psi = Qx_i\psi_0$ (где $Q \in \{\forall, \exists\}$), то $\psi^R = Qy_{i,1}Qy_{i,2}Qy_{i,3}\psi^R_0$.

Пусть $\mathscr{R}_C$ и $\mathscr{G}_C$ — обогащения структур $\mathscr{R}_0$ и $G_{st}(\mathscr{R}_0)$ до сигнатур $\sigma_{R,C}$ и $\sigma_{G,C}$ соответственно такие, что $c_k^{\mathscr{R}_C} = c_k^{\mathscr{G}_C} = k$ для всех $k \in \omega$. Используя индукцию по сложности формул, нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 1.3. *Пусть $\psi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ — формула сигнатуры $\sigma_{G,C}$ и описанное выше преобразование сопоставляет ψ формулу*

$$\psi^R(y_{0,1}, y_{0,2}, y_{0,3}, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{1,3}, \dots, y_{n,1}, y_{n,2}, y_{n,3})$$

сигнатуры $\sigma_{R,C}$. Тогда для любых $i_0, \dots, i_n \in \omega$ выполнено

$$\mathscr{G}_C \models \psi(c_{i_0}, \dots, c_{i_n}) \Leftrightarrow \mathscr{R}_C \models \psi^R(r(c_{i_0}, 1), r(c_{i_0}, 2), r(c_{i_0}, 3), \dots, r(c_{i_n}, 1), r(c_{i_n}, 2), r(c_{i_n}, 3)).$$

Отметим, что приведенное преобразование формул эффективно. Следовательно, из леммы 1.3 вытекает, что группа $G_{st}(\mathscr{R}_0)$ разрешима. Предложение 1.1 доказано. □

Кроме того, понадобится следующий известный факт об автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций.

Лемма 1.4. *Пусть $\mathscr{S}$ — разрешимая структура сигнатуры σ; $\bar{c} = c_0, c_1, \dots, c_n$ — набор элементов из $\mathscr{S}$. Структура $\mathscr{S}$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций в том и только том случае, когда структура $(\mathscr{S}, \bar{c})$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций.*

Доказательство. Для полноты изложения приведем краткий набросок доказательства нетривиального направления: покажем, что автоустойчивость относительно сильных конструктивизаций для $\mathscr{S}$ влечет автоустойчивость относительно сильных конструктивизаций для $(\mathscr{S}, \bar{c})$.

Зафиксируем некоторый эффективный список $\{\Phi_k(x_0, x_1, \dots, x_{n_k})\}_{k\in\omega}$ всех формул сигнатуры σ. Определим новую вычислимую сигнатуру $\sigma_M = \sigma \cup \{P_k^{n_k} : k \in \omega\}$, где P_k — новые предикатные символы. *Морлизацией* структуры $\mathscr{A}$ сигнатуры σ называется структура $\mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ сигнатуры σ_M такая, что обеднение $\mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ до σ равно $\mathscr{A}$, и для любого k верно $P_k^{\mathrm{Mor}(\mathscr{A})} = \Phi_k^{\mathscr{A}}$. Нетрудно проверить следующее: если структура $\mathscr{A}$ разрешима, то $\mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ также разрешима. Кроме того, $\mathscr{A}$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций в том и только том случае, когда морлизация $\mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ автоустойчива.

Предположим, что $\mathscr{S}$ — разрешимая структура, автоустойчивая относительно сильных конструктивизаций. Тогда вычислимая структура $\mathrm{Mor}(\mathscr{S})$ автоустойчива. В [21] получен следующий результат: если $\mathscr{A}$ — это 1-разрешимая автоустойчивая структура, то для любого набора $\bar{d}$ элементов $\mathscr{A}$ структура $(\mathscr{A}, \bar{d})$ также автоустойчива. Отсюда получаем, что структура $(\mathrm{Mor}(\mathscr{S}), \bar{c})$ автоустойчива. Используя этот факт, нетрудно показать, что $(\mathscr{S}, \bar{c})$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций.

Отметим также, что альтернативное доказательство леммы 1.4 может быть получено с использованием критерия А. Т. Нуртазина [5] для автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций. □

§ 2. Основной результат

Теорема 2.1. *Индексное множество $SC\,\mathrm{Aut}(2SNG)$ класса вычислимых 2-ступенно нильпотентных групп, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством.*

Доказательство. Отметим, что класс 2-ступенно нильпотентных групп конечно аксиоматизируем. Отсюда следует, что индексное множество класса всех вычислимых 2-ступенно нильпотентных групп является Π^0_n-множеством для некоторого $n \in \omega$. Используя этот факт и доказательство леммы 4.1 из [13], нетрудно показать, что множество $SC\,\mathrm{Aut}(2SNG)$ лежит в классе $\Sigma^0_{\omega+2}$.

Оставшаяся часть доказательства посвящена получению нижней оценки сложности для индексного множества $SC\,\mathrm{Aut}(2SNG)$. В следующих двух леммах устанавливаются дополнительные свойства кодирования из [16], которые помогут получить искомую нижнюю оценку.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathscr{R}$ — разрешимое кольцо с единицей. Если группа $\mathscr{G} = G_{st}(\mathscr{R})$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций, то кольцо $\mathscr{R}$ также автоустойчиво относительно сильных конструктивизаций.*

Доказательство. Предположим, что группа $\mathscr{G}$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций. Заметим, что в силу леммы 1.4 σ^*_G-структура $\mathscr{G}^* = G^*_{st}(\mathscr{R})$ также автоустойчива относительно сильных конструктивизаций.

Пусть $\mathscr{R}_0$ — разрешимая копия кольца $\mathscr{R}$. По предложению 1.1 структуры $\mathscr{G}^*$ и $\mathscr{G}^*_0 = G^*_{st}(\mathscr{R}_0)$ разрешимы. Зафиксируем вычислимый изоморфизм f, действующий из $\mathscr{G}^*$ на $\mathscr{G}^*_0$. Через f_1 обозначим отображение $f \upharpoonright \Psi_Z^{\mathscr{G}^*}$. Непосредственно из определения структуры $R_{st}(\mathscr{G}^*)$ следует, что f_1 является вычислимым изоморфизмом колец, действующим из $R_{st}(\mathscr{G}^*)$ на $R_{st}(\mathscr{G}^*_0)$. Напомним, что $F_{st}(a) = \langle 0, 0, a\rangle$ для $a \in \omega$. Нетрудно проверить, что вычислимое отображение $g = F^{-1}_{st} \circ f_1 \circ F_{st}$ является изоморфизмом колец, отображающим $\mathscr{R}$ на $\mathscr{R}_0$. Отсюда получаем, что структура $\mathscr{R}$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $\mathscr{R}$ — разрешимое булево кольцо с единицей. Если $\mathscr{R}$ автоустойчиво относительно сильных конструктивизаций, то группа $\mathscr{G} = G_{st}(\mathscr{R})$ также автоустойчива относительных конструктивизаций.*

Доказательство. По лемме 1.4 достаточно доказать, что структура $\mathscr{G}^* = G^*_{st}(\mathscr{R})$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций. Вначале докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathscr{S}$ — разрешимая копия структуры $\mathscr{G}^*$. Тогда существует вычислимый изоморфизм $F_{\mathscr{S}}$, отображающий σ^*_G-структуру $G^*_{st}(R_{st}(\mathscr{S}))$ на $\mathscr{S}$.*

Доказательство. Приводимые рассуждения основаны на доказательствах лемм 6.4 и 6.8 из [18], поэтому дадим здесь только краткий набросок доказательства. Отметим основное отличие леммы 2.3 от лемм из [18]: в [18] рассматриваются только кольца, в которых выполнено $1 + 1 \neq 0$. Будем считать, что e — нейтральный элемент в $\mathscr{S}$.

Пусть $\mathscr{Z}$ — это центр группы $\mathscr{S} \upharpoonright \sigma_G$, $b_0 = a_0^{\mathscr{S}}$ и $b_1 = a_1^{\mathscr{S}}$. Для $k \in \{0, 1\}$ через $\mathscr{C}_k$ обозначим подгруппу группы $\mathscr{S} \upharpoonright \sigma_G$, имеющую носитель $\{x \in \mathscr{S} : xb_k = b_k x\}$. Отметим следующий факт: если $\mathscr{S} = G^*_{st}(\mathscr{R})$, то носитель $\mathscr{C}_0$ равен $\{\langle u, 0, w\rangle : u, w \in \mathscr{R}\}$, а носитель $\mathscr{C}_1$ равен $\{\langle 0, v, w\rangle : v, w \in \mathscr{R}\}$. Нетрудно показать, что структура $\mathscr{C}_k$ является элементарной абелевой 2-группой. Кроме того, отображение $\lambda_k : x \mapsto [b_{1-k}, x]$ (где $x \in \mathscr{C}_k$) есть гомоморфизм, отображающий группу $\mathscr{C}_k$ на $\mathscr{Z}$.

Пусть $k \in \{0, 1\}$. В силу того, что $\mathscr{R}$ — булево кольцо, структура $\mathscr{Z}$ является элементарной абелевой 2-группой; поэтому без ограничения общности группу $\mathscr{Z}$ можно считать векторным пространством над полем $\mathbb{Z}_2$. Зафиксируем вычислимый базис $\{z_i\}_{i\in\omega}$ для $\mathscr{Z}$ такой, что $z_0 = [b_{1-k}, b_k]$. Пусть $c_0^k = b_k$.

Для $i > 0$ через c_i^k обозначим наименьший (относительно стандартного порядка на ω) элемент из $\mathscr{C}_k$ такой, что $\lambda_k(c_i^k) = z_i$.

Пусть $z \in \mathscr{Z}$ и $z \neq e$. Рассмотрим разложение $\mathscr{Z}$ по базису: $z = z_{t_0} + z_{t_1} + \dots + z_{t_m}$, где $t_0 < t_1 < \dots < t_m$. Определим элемент из $\mathscr{C}_k$: $f_k(z) = c_{t_0}^k \cdot_{\mathscr{S}} c_{t_1}^k \cdot_{\mathscr{S}} \dots \cdot_{\mathscr{S}} c_{t_m}^k$. Также положим $f_k(e) = e$. Нетрудно показать, что f_k является вычислимым изоморфным вложением группы $\mathscr{Z}$ в $\mathscr{C}_k$.

Определим вычислимый изоморфизм, действующий из структуры $\mathscr{G}^1 = G_{st}^*(R_{st}(\mathscr{S}))$ на $\mathscr{S}$. Обозначим $R_{st}(\mathscr{S})$ через $\mathscr{R}_1$. В силу того, что кольцо $\mathscr{R}_1$ определимо в $\mathscr{G}^1$ формулами первого порядка, $\mathscr{R}_1$ разрешимо. Для элементов $u, v, w \in \mathscr{R}_1$ определим

$$F_{\mathscr{S}}(\langle u, v, w\rangle) = f_0(u) \cdot_{\mathscr{S}} (f_1(v))^{-1} \cdot_{\mathscr{S}} w.$$

Очевидно, что отображение $F_{\mathscr{S}}$ вычислимо. В [16] (см. также [18, лемма 6.8]) доказано, что $F_{\mathscr{S}}$ является изоморфизмом, действующим из $\mathscr{G}^1$ на $\mathscr{S}$. Лемма 2.3 доказана. $\square$

Предположим, что $\mathscr{S}$ — это разрешимая копия σ_G^*-структуры $\mathscr{G}^*$. Определим разрешимое кольцо $\mathscr{R}_1 = R_{st}(\mathscr{S})$. Напомним, что по лемме 1.2 имеет место $\mathscr{R}_1 \cong \mathscr{R}$. В силу того, что $\mathscr{R}$ автоустойчиво относительно сильных конструктивизаций, существует вычислимый изоморфизм g из $\mathscr{R}$ на $\mathscr{R}_1$. Нетрудно проверить, что отображение $g_1 : \langle a, b, c\rangle \mapsto \langle g(a), g(b), g(c)\rangle$ является вычислимым изоморфизмом σ_G^*-структур, действующим из $\mathscr{G}^*$ на $\mathscr{G}^1 = G_{st}^*(\mathscr{R}_1)$. Следовательно, отображение $F_{\mathscr{S}} \circ g_1$ есть вычислимый изоморфизм из $\mathscr{G}^*$ на $\mathscr{S}$. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Зафиксируем m-полное $\Sigma^0_{\omega+2}$-множество A. В следствии 5.1 из [13] построена вычислимая последовательность колец с единицей $\{\mathscr{R}_n\}_{n\in\omega}$, обладающая следующими свойствами:

(1) каждая из структур $\mathscr{R}_n$ является сильно конструктивизируемым булевым кольцом с единицей;

(2) если $n \in A$, то кольцо $\mathscr{R}_n$ автоустойчиво относительно сильных конструктивизаций;

(3) если $n \notin A$, то $\mathscr{R}_n$ не автоустойчиво относительно сильных конструктивизаций.

Для $n \in \omega$ через $\mathscr{G}_n$ обозначим вычислимую 2-ступенно нильпотентную группу $G_{st}(\mathscr{R}_n)$. Нетрудно показать, что последовательность структур $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\omega}$ равномерно вычислима. Кроме того, в силу предложения 1.1 каждая из групп $\mathscr{G}_n$ является сильно конструктивизируемой. Непосредственно из лемм 2.1 и 2.2 вытекает, что для всех $n \in \omega$ выполнено: $n \in A$ в том и только том случае, когда группа $\mathscr{G}_n$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций. Отсюда нетрудно получить, что m-полное $\Sigma^0_{\omega+2}$-множество A m-сводится к индексному множеству $SC\,\mathrm{Aut}(2NSG)$. Теорема 2.1 доказана. $\square$

§ 3. Следствия основного результата

Непосредственно из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение, дающее ответ на проблему 1.

Следствие 3.1. *Индексное множество класса всех вычислимых групп, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством.*

Пусть n — натуральное число. Вычислимая структура $\mathscr{S}$ называется *относительно* Δ^0_{n+1}*-категоричной*, если для любой структуры $\mathscr{A}$, изоморфной $\mathscr{S}$, существует $(\deg(\mathscr{A}))^{(n)}$-вычислимый изоморфизм, действующий из $\mathscr{A}$ на $\mathscr{S}$. Используя рассуждения, аналогичные [22, с. 427–428], нетрудно доказать

Следствие 3.2. *Для любого $n \in \omega$ существует разрешимая 2-ступенно нильпотентная группа, автоустойчивая относительно сильных конструктивизаций, но не относительно Δ^0_{n+1}-категоричная.*

В заключение сформулируем открытый вопрос.

Проблема. *Какова точная оценка сложности индексного множества класса вычислимых абелевых групп, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С., Найт Дж.* Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 6. С. 639–681.

2. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. книга, 1999.

3. *Ash C. J., Knight J. F.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. Amsterdam, etc.: Elsevier Sci. B.V., 2000. (Stud. Logic Found. Math.; V. 144).

4. *Нуртазин А. Т.* Вычислимые классы и алгебраические критерии автоустойчивости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. ИММ АН КазССР. Алма-Ата, 1974.

5. *Нуртазин А. Т.* Сильные и слабые конструктивизации и вычислимые семейства // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 311–323.

6. *Гончаров С. С.* Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций // Алгоритмические вопросы алгебры и логики (сб. статей). К 80-летию со дня рожд. акад. С. И. Адяна: Тр. МИАН. М.: МАИК, 2011. Т. 274. С. 119–129.

7. *Баженов Н. А.* Спектры автоустойчивости булевых алгебр // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 6. С. 764–769.

8. *Гончаров С. С., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, № 4. С. 43–67.

9. *Гончаров С. С., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей нетривиальных сигнатур // Докл. АН. 2015. Т. 461, № 2. С. 140–142.

10. *Гончаров С. С., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей ограниченной сигнатуры // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 2. С. 163–192.

11. *Гончаров С. С., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей конечной сигнатуры и сигнатуры графов // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 6. С. 663–679.

12. *Гончаров С. С., Баженов Н. А., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей естественных классов // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 1. С. 12–14.

13. *Гончаров С. С., Баженов Н. А., Марчук М. И.* Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 498–512.

14. *Гончаров С. С., Баженов Н. А., Марчук М. И.* Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций линейных порядков // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, № 3. С. 51–60.

15. *Марчук М. И.* Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций структур с двумя отношениями эквивалентности // Алгебра и логика (принято к печати).

16. *Мальцев А. И.* Об одном соответствии между кольцами и группами // Мат. сб. 1960. Т. 50, № 3. С. 257–266.

17. *Гончаров С. С., Молоков А. В., Романовский Н. С.* Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 82–88.

18. *Hirschfeldt D. R., Khoussainov B., Shore R. A., Slinko A. M.* Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures // Ann. Pure Appl. Logic. 2002. V. 115, N 1–3. P. 71–113.
19. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
20. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1987.
21. *Millar T.* Recursive categoricity and persistence // J. Symb. Log. 1986. V. 51, N 2. P. 430–434.
22. *Downey R. G., Kach A. M., Lempp S., Lewis-Pye A. E. M., Montalbán A., Turetsky D. D.* The complexity of computable categoricity // Adv. Math. 2015. V. 268. P. 423–466.

Статья поступила 15 июля 2016 г.

Гончаров Сергей Савостьянович, Баженов Николай Алексеевич,
Марчук Маргарита Игоревна,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`s.s.goncharov@math.nsc.ru`, `bazhenov@math.nsc.ru`,
`margaretmarchuk@gmail.com`