Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.98

РАЗНОСТИ ИДЕМПОТЕНТОВ В C^*–АЛГЕБРАХ

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть P, Q — идемпотенты в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $Q = Q^*$, I — тождественный оператор в $\mathscr{H}$. Если оператор $U = P - Q$ — изометрия, то $U = U^*$ унитарен и $Q = I - P$. Для точных нижней и верхней граней пары проекторов P, Q в $\mathscr{H}$ и $P - Q$ установлено двойное неравенство. Получены приложения этого неравенства к характеризации следа и к идеальным F-псевдонормам на W^*-алгебре. Пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{A}$, трипотенты P, Q принадлежат $\mathscr{A}$. Если $P-Q$ принадлежит идеалу определения следа φ, то $\varphi(P-Q)$ является вещественным числом. Установлена перестановочность некоторых операторов.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.201

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, идемпотент, трипотент, проектор, унитарный оператор, ядерный оператор, операторное неравенство, перестановочность, W^*-алгебра, C^*-алгебра, след, идеальная F-норма.

Введение

Пусть P, Q — идемпотенты в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Различные свойства (обратимость, фредгольмовость, ядерность, положительность и др.) разности $P - Q$ были исследованы в [1–6]. Каждый трипотент ($A = A^3$) является разностью $P - Q$ некоторых идемпотентов P и Q с $PQ = QP = 0$ [7, предложение 1]. Поэтому трипотенты наследуют некоторые свойства идемпотентов [8].

В этой работе получено несколько новых результатов об операторе $P - Q$. Доказано, что из изометричности оператора $U = P - Q$, где $Q^* = Q$, следуют унитарность U и равенство $Q = I - P$ (теорема 1). Приведен пример, показывающий существенность условия $Q^* = Q$. Если $P^* = P$, то $P \wedge Q^{\perp} + P^{\perp} \wedge Q \leq |P-Q| \leq P \vee Q - P \wedge Q$ с равенством во втором из неравенств тогда и только тогда, когда $PQ = QP$ (теорема 2 и предложение 1). С помощью этого операторного неравенства установлено новое неравенство, характеризующее следы на W^*-алгебре $\mathscr{A}$ (следствие 4). Получены приложения к идеальным F-псевдонормам на $\mathscr{A}$ (следствие 7).

Пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{A}$, $\mathfrak{M}_\varphi$ — идеал определения следа φ и трипотенты P, Q принадлежат $\mathscr{A}$. Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P-Q) \in \mathbb{R}$ (теорема 3). Теорема 3 является C^*-аналогом известного утверждения [6]: *если P, Q являются идемпотентами в $\mathscr{H}$ и $P - Q$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1$ ядерных операторов, то канонический след* $\operatorname{tr}(P - Q)$ *принадлежит* $\mathbb{Z}$. Пусть $\mathscr{A}$ — C^*-алгебра, $(\mathscr{E}, \prec)$ — частично упорядоченное множество. Установлен критерий монотонности для отображения из $\mathscr{A}^+$ в $\mathscr{E}$ (предложение 2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Республики Татарстан (код проекта 15–41–02433).

1. Определения и обозначения

C^*-алгеброй будем называть комплексную банахову $*$-алгебру $\mathscr{A}$ такую, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathscr{A}$. Для C^*-алгебры $\mathscr{A}$ через $\mathscr{A}^{\mathrm{id}}$, $\mathscr{A}^{\mathrm{sa}}$ и $\mathscr{A}^+$ будем обозначать ее подмножества идемпотентов, эрмитовых элементов и положительных элементов соответственно. Если $A \in \mathscr{A}$, то $|A| = \sqrt{A^*A} \in \mathscr{A}^+$. Если $A \in \mathscr{A}^{\mathrm{sa}}$, то $A_+ = (|A|+A)/2$ и $A_- = (|A|-A)/2$ лежат в $\mathscr{A}^+$ и $A = A_+ - A_-$, $A_+A_- = 0$. *W^*-алгеброй* называется C^*-алгебра $\mathscr{A}$, имеющая преддвойственное банахово пространство $\mathscr{A}_* : \mathscr{A} \simeq (\mathscr{A}_*)^*$. Для W^*-алгебры $\mathscr{A}$ через $\mathscr{A}^{\mathrm{u}}$ и $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ будем обозначать ее подмножество унитарных элементов и решетку проекторов соответственно. Если I — единица алгебры $\mathscr{A}$ и $P \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$, то $P^\perp = I - P \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$.

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ — $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{H}$. Пусть $\mathrm{rp}(X)$ — проектор на замыкание области значений оператора $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{sa}}$. Для $X, X_n \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ пишем $X = \operatorname{so-}\lim\limits_{n\to\infty} X_n$, если последовательность $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к X в сильной операторной топологии. Если $P, Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$, то проектор $P \wedge Q$ определяется равенством $(P \wedge Q)\mathscr{H} = P\mathscr{H} \cap Q\mathscr{H}$, а $P \vee Q = (P^\perp \wedge Q^\perp)^\perp$ проектирует на $\overline{\mathrm{lin}(P\mathscr{H} \cup Q\mathscr{H})}$. *Коммутантом* множества $\mathscr{X} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется множество

$$\mathscr{X}' = \{Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) : XY = YX \text{ для всех } X \in \mathscr{X}\}.$$

Алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, называется $*$-подалгебра $\mathscr{A}$ алгебры $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, для которой $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$. Если $\mathscr{X} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то $\mathscr{X}'$ — алгебра фон Неймана, а $\mathscr{X}''$ – наименьшая алгебра фон Неймана, содержащая $\mathscr{X}$.

Любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathscr{H}$ (см. [9, теорема 3.4.1]). W^*-алгебра реализуется как алгебра фон Неймана.

Следом на C^*-алгебре $\mathscr{A}$ называется такое отображение $\varphi : \mathscr{A}^+ \to [0, +\infty]$, что $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathscr{A}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$); $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathscr{A}$. Для следа φ определим

$$\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathscr{A}^+ : \varphi(X) < +\infty\}, \quad \mathfrak{M}_\varphi^{\mathrm{sa}} = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\mathfrak{M}_\varphi^+, \quad \mathfrak{M}_\varphi = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\mathfrak{M}_\varphi^+.$$

Ограничение $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi^+}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_\varphi$, который будем обозначать той же буквой φ. Такое продолжение позволяет отождествлять конечные следы (т. е. $\varphi(X) < +\infty$ для всех $X \in \mathscr{A}^+$) с положительными функционалами на $\mathscr{A}$. Положительный функционал на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$ называется *нормальным*, если

$$A_i \nearrow A \ (A_i, A \in \mathscr{A}^+) \Rightarrow \varphi(A) = \sup_i \varphi(A_i).$$

2. Разности идемпотентов в C^*-алгебрах

Теорема 1. *Пусть $P, Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{id}}$, $Q = Q^*$ и $U = P - Q$ — изометрия. Тогда $U = U^* \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{u}}$ и $Q = P^\perp$.*

Доказательство. Имеем $P = U + Q = U^2 + Q + UQ + QU$ и $U = U^2 + UQ + QU$. Умножив обе части последнего равенства слева на оператор U^*, получаем $I = U + Q + U^*QU$, поэтому $I - U = Q + U^*QU = (I-U)^*$ и $U = U^* \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{u}}$. Следовательно, $P^* = P$. Имеем $P - Q = 2T - I$ для $T = \frac{1}{2}(I+U) \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$, тем самым

$$T = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q^\perp.$$

Поскольку $\mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ лежит в множестве $\mathrm{ext}\{X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^+ : \|X\| \le 1\}$ крайних точек положительной части единичного шара алгебры $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ [10, гл. 2, 2.8.14], получаем $P = Q^\perp = T$. Теорема доказана. $\square$

Пример 1. Условие $Q = Q^*$ существенно в теореме 1. Для

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

где $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$, имеем $P, Q, R \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{id}}$, $U = P - Q \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{u}}$ и $U^* = -U$, $Q \ne P^\perp$. Также $V = P - R \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{u}}$ и $V^* = V$, но $R \ne P^\perp$. Для

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

будет $P, Q \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{id}}$, $U = P - Q \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{u}}$ и $U^* = U$, $Q \ne Q^*$, $P \ne P^*$ и $Q \ne P^\perp$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{A}$ — W^*-алгебра и $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$. Тогда*

(i) $|P - Q|$ *коммутирует с P и Q;*

(ii) $P \wedge Q^\perp + P^\perp \wedge Q \le |P - Q|^p \le P \vee Q - P \wedge Q = \mathrm{rp}(|P - Q|)$ *для всех $0 < p < +\infty$;*

(iii) $2|P - Q| \le P + Q + S(P + Q)S$ *для некоторого $S \in \mathscr{A}^{\mathrm{sa}} \cap \mathscr{A}^{\mathrm{u}}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — C^*-алгебра и $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$. Тогда $(P - Q)^2$ коммутирует с P и Q. Теперь утверждение (i) вытекает из равенства $|P - Q| = \sqrt{(P - Q)^2}$ и теоремы Гельфанда о представлении абелевой унитальной C^*-алгебры (см., например, [11, гл. 3, теорема 1.18]).

(ii) Методом математической индукции докажем, что

$$P \wedge Q^\perp + P^\perp \wedge Q \le |P - Q|^{2n} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Пусть $T \equiv P - P \wedge Q^\perp - Q + P^\perp \wedge Q$, тогда $T \in \mathscr{A}^{\mathrm{sa}}$. Поскольку $T^2 \ge 0$, имеем

$$P \wedge Q^\perp + P^\perp \wedge Q \le (P - Q)^2 = |P - Q|^2$$

и для $n = 1$ неравенство (1) установлено. Шаг индукции получается из соотношений $|P - Q|^{2n+2} = (P - Q)|P - Q|^{2n}(P - Q)$ и

$$(P - Q)(P \wedge Q^\perp + P^\perp \wedge Q)(P - Q) = P \wedge Q^\perp + P^\perp \wedge Q.$$

Так как $P \wedge Q^\perp + P^\perp \wedge Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$, в силу операторной монотонности функции $f(t) = t^q$ $(t \ge 0)$ при $0 < q \le 1$ из (1) получаем

$$P \wedge Q^\perp + P^\perp \wedge Q \le |P - Q|^p \quad \text{для всех } 0 < p < +\infty.$$

Если $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^+$ и $A \le I$, то $0 \le A^{n+1} \le A^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме Вижье [9, теорема 4.1.1] последовательность $\{A^n\}_{n=1}^\infty$ so-сходится (т. е. сходится в сильной операторной топологии) к некоторому оператору $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{sa}}$. Поскольку конус $\mathscr{B}(\mathscr{H})^+$ so-замкнут, имеем $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^+$. Из спектральной теоремы (формулировка в терминах мультипликаторов) получаем $B = E^A(\{1\})$ — спектральный проектор оператора A, соответствующий борелевскому множеству $\{1\}$. Таким образом,

$$P \wedge Q^\perp + Q \wedge P^\perp \le \operatorname*{so-lim}_{n \to \infty} |P - Q|^n = E^{|P-Q|}(\{1\}).$$

Для проверки второго неравенства в (ii), следуя рецензенту, обозначим

$$\mathscr{Z} = \ker(P - Q), \quad \mathscr{U} = \mathrm{rp}(P - Q)\mathscr{H}, \quad \mathscr{V} = (P \vee Q)\mathscr{H}.$$

Так как оператор $P-Q$ самосопряжен, $\mathscr{U} = \mathscr{Z}^{\perp}$ (то же самое верно для $|P-Q|$). Поэтому для проверки равенства в (ii) достаточно установить, что $\mathscr{Z} \cap \mathscr{V} = P\mathscr{H} \cap Q\mathscr{H}$. Ясно, что $z \perp \mathscr{U}$ тогда и только тогда, когда $Pz = Qz$. Для $x = z - Pz$ выполняются равенства $x = z - Qz$, $Px = 0$ и $Qx = 0$. Тем самым $x \perp \mathscr{V}$, а условия $z \in \mathscr{V}$ и $z \perp \mathscr{U}$ влекут равенства $z = Pz = Qz$, откуда $z \in P\mathscr{H} \cap Q\mathscr{H}$. Обратное очевидно.

Неравенства $P \wedge Q - P \vee Q \leq P - Q \leq P \vee Q - P \wedge Q$ означают, что

$$-\|u\|^2 \leq \langle (P - Q)u, u\rangle \leq \|u\|^2$$

для всех $u \in \mathscr{U}$. Так как норма любого самосопряженного ограниченного оператора A равна его числовому радиусу $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\langle Ax, x\rangle|$ и $\|A\| = \||A|\|$, имеем $\||P - Q|\| \leq 1$, откуда $|P - Q| \leq \mathrm{rp}(|P - Q|)$. Поэтому

$$|P - Q|^n \leq |P - Q| \leq \mathrm{rp}(|P - Q|)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и снова можно воспользоваться операторной монотонностью функции $f(t) = t^q$ $(t \geq 0)$ при $0 < q \leq 1$.

Поскольку $-P - Q \leq P - Q \leq P + Q$, п. (iii) следует из теоремы 1 в [12], согласно которой для каждой пары операторов $X, Y \in \mathscr{A}^{\mathrm{sa}}$ с $-X \leq Y \leq X$ существует такой $S \in \mathscr{A}^{\mathrm{sa}} \cap \mathscr{A}^{\mathrm{u}}$, что $2|Y| \leq X + SXS$. Теорема доказана. □

Замечание 1. Если $P, Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ и $|P - Q| \leq P + Q$, то $PQ = QP$ [13, предложение 1].

Следствие 1. *Пусть φ — след на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$. Тогда $\varphi(P + Q + |P - Q|) \leq 2\varphi(P \vee Q)$ для всех $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$.*

Доказательство. По п. (ii) теоремы 2 имеем $|P - Q| \leq P \vee Q - P \wedge Q$ для всех $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$. Ввиду [11, гл. V, предложение 1.6] существует такой $U \in \mathscr{A}$, что

$$U^*U = P \vee Q - Q, \quad UU^* = P - P \wedge Q. \tag{2}$$

В силу монотонности и определения следа φ

$$\begin{aligned}\varphi(P + Q + |P - Q|) &\leq \varphi(P + Q + P \vee Q - P \wedge Q) = \varphi(Q + P \vee Q) + \varphi(P - P \wedge Q)\\ &= \varphi(Q + P \vee Q) + \varphi(P \vee Q - Q) = 2\varphi(P \vee Q).\end{aligned}$$

Утверждение доказано. □

Следствие 2. *Для всех $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ имеет место*

$$\varphi(P + Q + |P - Q| + 2(P^{\perp} \wedge Q^{\perp})) \leq 2\varphi(I).$$

Доказательство. Если $\varphi(I) = +\infty$, то неравенство очевидно. Если $\varphi(I) < +\infty$, то применяем закон Де Моргана $P \vee Q = (P^{\perp} \wedge Q^{\perp})^{\perp}$. □

Поскольку $P - Q = Q^{\perp} - P^{\perp}$ для всех $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$, получаем

Следствие 3. *Если φ конечен, то $\varphi(|P - Q| + 2(P \wedge Q)) \leq \varphi(P + Q)$ для всех $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$.*

В неравенствах из следствий 1–3 равенство достигается в следующих случаях: 1) $Q = P^{\perp}$; 2) $P \leq Q$; 3) $Q \leq P$. В условиях следствия 3 имеем $\varphi(P \wedge Q) \leq \frac{1}{2}\varphi(P + Q - |P - Q|)$ для всех $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$. Из (2) получаем $\varphi(P \wedge Q) = \varphi(P + Q - P \vee Q)$ для всех $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$.

Следствие 4. *Для положительного нормального функционала φ на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$ следующие условия эквивалентны:*
(i) *φ является следом;*
(ii) *$\varphi(P+Q+|P-Q|) \le 2\varphi(P \vee Q)$ для всех $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$;*
(iii) *$\varphi(|P-Q| + 2(P \wedge Q)) \le \varphi(P+Q)$ для всех $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$.*

Доказательство. Поскольку (i)⇒(ii)⇔(iii), покажем, что (iii)⇒(i). В силу монотонности функционала получаем более слабое неравенство

$$\varphi(|P-Q|) \le \varphi(P+Q) \quad \text{для всех } P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}},$$

и φ является следом ввиду п. (v) теоремы 3.4 из [14]. Следствие доказано. □

О других характеризациях следа см. [15, 16] и библиографию в них.

Предложение 1. *Для $P, Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ следующие условия эквивалентны:*
(i) *$PQ = QP$;*
(ii) *$(P-Q)^2 \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$;*
(iii) *$(P-Q)^2 = P \vee Q - P \wedge Q$.*

Доказательство. Эквивалентность (i)⇔(ii) вытекает из равенства

$$(P-Q)^4 = (P-Q)^2 - (PQ-QP)^*(PQ-QP) = (P-Q)^2 - |PQ-QP|^2.$$

(i)⇒(iii). Заметим, что $P \wedge Q = PQ = QP$ и $P^{\perp}Q^{\perp} = Q^{\perp}P^{\perp}$. Поэтому в силу закона Де Моргана имеем

$$P \vee Q = (P^{\perp} \wedge Q^{\perp})^{\perp} = I - P^{\perp} \wedge Q^{\perp} = I - P^{\perp}Q^{\perp} = P + Q - PQ.$$

Так как $P \vee Q \ge P \wedge Q$, то $P \vee Q - P \wedge Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ и импликация (iii)⇒(ii) очевидна. Предложение доказано. □

Лемма 1. *Пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{A}$, элементы $A, B \in \mathscr{A}$ такие, что $A - B \in \mathfrak{M}_{\varphi}$. Тогда $AB - BA \in \mathfrak{M}_{\varphi}$ и $\varphi(AB - BA) = 0$.*

Доказательство. Напомним, что $\mathfrak{M}_{\varphi}$ является идеалом в $\mathscr{A}$, причем

$$\varphi(XY) = \varphi(YX) \quad \text{для всех } X \in \mathfrak{M}_{\varphi},\ Y \in \mathscr{A} \tag{3}$$

[9, гл. 6, упражнение 6]. Имеем $AB - BA = (A-B)B - B(A-B) \in \mathfrak{M}_{\varphi}$ и

$$\begin{aligned}\varphi(A-B) = \varphi((A-B)B) + \varphi((A-B)(I-B)) &= \varphi((A-B)B) + \varphi((I-B)(A-B)) \\ &= \varphi(AB + (A-B) - BA) = \varphi(A-B) + \varphi(AB - BA).\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Следующая теорема является C^*-аналогом известного утверждения [6] (см. также [5]): *если $P, Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{id}}$ и $P - Q$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1$ ядерных операторов, то канонический след $\mathrm{tr}(P-Q)$ принадлежит $\mathbb{Z}$.*

Теорема 3. *Пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{A}$ и $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$. Если $P - Q \in \mathfrak{M}_{\varphi}$, то $\varphi(P-Q) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Для $P \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$ существует единственное разложение $P = \widetilde{P} + Z$, где $\widetilde{P} \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ и нильпотент Z принадлежит $\mathscr{A}$ с $Z^2 = 0$, причем

$$Z\widetilde{P} = 0, \quad \widetilde{P}Z = Z \tag{4}$$

[17, теорема 1.3]. Пусть $Q = \widetilde{Q} + T$ — описанное выше разложение для $Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$. Поскольку $\mathfrak{M}_\varphi$ является идеалом в $\mathscr{A}$, имеем

$$-T\widetilde{P} + \widetilde{Q}Z - Z = (P - Q)\widetilde{P} + \widetilde{Q}(P - Q) - (P - Q) \in \mathfrak{M}_\varphi$$

и $T\widetilde{P} = -(-T\widetilde{P} + \widetilde{Q}Z - Z)\widetilde{P} \in \mathfrak{M}_\varphi$. Следовательно,

$$\widetilde{P} - \widetilde{Q}\widetilde{P} = T\widetilde{P} + (P - Q)\widetilde{P} \in \mathfrak{M}_\varphi.$$

Аналогично проверяется, что $Z\widetilde{Q}, \widetilde{P}\widetilde{Q} - \widetilde{Q} \in \mathfrak{M}_\varphi$. Тем самым

$$\widetilde{P} - \widetilde{Q} = \widetilde{P} - \widetilde{Q}\widetilde{P} + (\widetilde{P}\widetilde{Q} - \widetilde{Q})^* \in \mathfrak{M}_\varphi.$$

Стало быть, $Z - T = P - Q - (\widetilde{P} - \widetilde{Q}) \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $(Z - T)\widetilde{P}, (Z - T)\widetilde{P}^\perp \in \mathfrak{M}_\varphi$. В силу (3), (4) и определения следа φ

$$\begin{aligned}\varphi(Z - T) = \varphi((Z - T)\widetilde{P}) + \varphi((Z - T)\widetilde{P}^\perp) = \varphi((Z - T)\widetilde{P}) + \varphi(\widetilde{P}^\perp(Z - T))\\ = \varphi(-T\widetilde{P}) + \varphi(-\widetilde{P}^\perp T) = -\varphi(T\widetilde{P}) - \varphi(\widetilde{P}^\perp T).\end{aligned}$$

Из равенств

$$\begin{aligned}\varphi(P - Q) = \varphi(T(P - Q)) + \varphi((I - T)(P - Q)) = \varphi(T(P - Q)) + \varphi((P - Q)(I - T))\\ = \varphi(P - Q) + \varphi(T(P - Q) - (P - Q)T)\end{aligned}$$

следует, что $\varphi(T(P - Q) - (P - Q)T) = 0$. Применив лемму 1 с $A = Z$, $B = T$, с учетом соотношений $T^2 = 0$, $T\widetilde{Q} = 0$ и $\widetilde{Q}T = T$ получаем

$$\begin{aligned}0 = \varphi(T(P - Q) - (P - Q)T) = \varphi(TP - PT + T) = \varphi(T\widetilde{P} + TZ - \widetilde{P}T - ZT + T)\\ = \varphi(TZ - ZT) + \varphi(T\widetilde{P} - \widetilde{P}T + T) = \varphi(T\widetilde{P}) + \varphi(\widetilde{P}^\perp T) = -\varphi(Z - T).\end{aligned}$$

Поскольку φ — положительный функционал на $\mathfrak{M}_\varphi$, имеем $\varphi(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathrm{sa}}) \subset \mathbb{R}$, поэтому

$$\varphi(P - Q) = \varphi(\widetilde{P} - \widetilde{Q}) - \varphi(Z - T) = \varphi(\widetilde{P} - \widetilde{Q}) \in \mathbb{R}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 5. *Пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{A}$ и трипотенты A, B принадлежат $\mathscr{A}$. Если $A - B \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(A - B) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $A = P_1 - Q_1$, $B = P_2 - Q_2$ — представления из [7, предложение 1], т. е. $P_k, Q_k \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$ и $P_kQ_k = Q_kP_k = 0$ для $k = 1, 2$. Легко видеть, что элементы $A^2 = P_1 + Q_1$ и $B^2 = P_2 + Q_2$ лежат в $\mathscr{A}^{\mathrm{id}}$. Поскольку $A - B = P_1 - Q_1 - P_2 + Q_2 \in \mathfrak{M}_\varphi$, элемент

$$A^2 - B^2 = \frac{1}{2}((A + B)(A - B) + (A - B)(A + B)) = P_1 + Q_1 - P_2 - Q_2$$

также лежит в $\mathfrak{M}_\varphi$. Тогда элементы

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}(A - B + A^2 - B^2), \quad Q_2 - Q_1 = \frac{1}{2}(A - B - (A^2 - B^2))$$

лежат в $\mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(P_1 - P_2), \varphi(Q_2 - Q_1) \in \mathbb{R}$ в силу теоремы 3. Следовательно,

$$\varphi(A - B) = \varphi(P_1 - Q_1 - P_2 + Q_2) = \varphi(P_1 - P_2) + \varphi(Q_2 - Q_1) \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Следствие 6 [18, теорема 3.6]. *Пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{A}$, $P \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$ и $P = \widetilde{P} + Z$ — описанное выше разложение. Тогда*

$$P \in \mathfrak{M}_\varphi \Leftrightarrow \widetilde{P} \in \mathfrak{M}_\varphi$$

и при выполнении этих условий имеем $\varphi(P) = \varphi(\widetilde{P}) \in \mathbb{R}^+$.

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{A}$ — C^*-алгебра, $(\mathscr{E}, \prec)$ — частично упорядоченное множество. Для отображения $\rho : \mathscr{A}^+ \to \mathscr{E}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\rho(A) \prec \rho(B)$ для всех $A, B \in \mathscr{A}^+$ с $A \leq B$;*

(ii) *$\rho(XY + YX) \prec \rho(X^2 + Y^2)$ для всех $X, Y \in \mathscr{A}^+$ с $XY + YX \in \mathscr{A}^+$.*

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). В силу неравенства $(X - Y)^2 \geq 0$ имеем $0 \leq XY + YX \leq X^2 + Y^2$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Пусть $A \in \mathscr{A}^{\mathrm{sa}}$, $B \in \mathscr{A}^+$ и $-B \leq A \leq B$. Тогда существуют такие $X \in \mathscr{A}^{\mathrm{sa}}$ и $Y \in \mathscr{A}^+$, что $A = XY + YX$, $B = X^2 + Y^2$ [19, лемма 1]. Действительно, положим

$$X = \frac{1}{2}(\sqrt{A + B} - \sqrt{B - A}), \quad Y = \frac{1}{2}(\sqrt{A + B} + \sqrt{B - A}) \tag{5}$$

и воспользуемся операторной монотонностью функции $f(t) = \sqrt{t}$ $(t \geq 0)$. Из (5) видно, что если $A \in \mathscr{A}^+$, то и $X \in \mathscr{A}^+$. Утверждение доказано. $\square$

Отображение $\rho : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ называется *идеальной F-псевдонормой* [20], если $\rho(0) = 0$ и выполнены следующие условия:

(i) $\rho(A) = \rho(A^*) = \rho(|A|)$ для всех $A \in \mathscr{A}$;

(ii) $\rho(A) \leq \rho(B)$ для всех $A, B \in \mathscr{A}^+$ с $A \leq B$;

(iii) $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ для всех $A, B \in \mathscr{A}$.

При этом множество $J_\rho = \{A \in \mathscr{A} : \rho(A) < +\infty\}$ является идеалом в $\mathscr{A}$.

Следствие 7. *Пусть ρ — идеальная F-псевдонорма на W^*-алгебре $\mathscr{A}$ такая, что $\rho(2X) = 2\rho(X)$ для всех $X \in \mathscr{A}$, и пусть $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$. Тогда*

(i) *$\rho((P - Q)_+) \leq \rho(P \vee Q - Q)$;*

(ii) *$\rho((P - Q)_-) \leq \rho(P \vee Q - P)$;*

(iii) *$\rho(P - Q) \leq \min\{\rho(P + Q), \rho(P \vee Q - P \wedge Q)\}$.*

Доказательство. Имеем [20, лемма 4]

$$\rho(X^*X) = \rho(XX^*) \quad \text{для всех } X \in \mathscr{A}. \tag{6}$$

(i) Из п. (ii) теоремы 2 получаем

$$0 \leq 2(P - Q)_+ = |P - Q| + P - Q \leq P \vee Q - Q + P - P \wedge Q.$$

С учетом 2-однородности, монотонности ρ, неравенства треугольника, (2) и (6) приходим к соотношению

$$\begin{aligned} 2\rho((P - Q)_+) = \rho(2(P - Q)_+) &\leq \rho(P \vee Q - Q + P - P \wedge Q) \\ &\leq \rho(P \vee Q - Q) + \rho(P - P \wedge Q) = 2\rho(P \vee Q - Q). \end{aligned}$$

(ii) В силу п. (i) имеем $\rho((P - Q)_-) = \rho((Q - P)_+) \leq \rho(P \vee Q - P)$.

(iii) В силу пп. (ii) и (iii) теоремы 2 получаем $\rho(P - Q) \leq \rho(P \vee Q - P \wedge Q)$ и с учетом (6) будет

$$\begin{aligned} 2\rho(P - Q)) = \rho(2|P - Q|) &\leq \rho(P + Q) + \rho(S(P + Q)S) \\ &= \rho(P + Q) + \rho(\sqrt{P + Q}S^2\sqrt{P + Q}) = 2\rho(P + Q). \end{aligned}$$

Следствие доказано. $\square$

Автор благодарит рецензента за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koliha J. J., Rakočević V.* Invertibility of the difference of idempotents // Linear Multilinear Algebra. 2003. V. 51, N 1. P. 97–110.
2. *Koliha J. J., Rakočević V., Straškraba I.* The difference and sum of projectors // Linear Algebra Appl. 2004. V. 388. P. 279–288.
3. *Koliha J. J., Rakočević V.* Fredholm properties of the difference of orthogonal projections in a Hilbert space // Integral Equations Oper. Theory. 2005. V. 52, N 1. P. 125–134.
4. *Бикчентаев А. М.* Об идемпотентных τ-измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 492–503.
5. *Kalton N. J.* A note on pairs of projections // Bol. Soc. Mat. Mex., III, Ser. 1997. V. 3, N 2. P. 309–311.
6. *Avron J., Seiler R., Simon B.* The index of a pair of projections // J. Funct. Anal. 1994. V. 120, N 1. P. 220–237.
7. *Bikchentaev A. M., Yakushev R. S.* Representation of tripotents and representations via tripotents // Linear Algebra Appl. 2011. V. 435, N 9. P. 2156–2165.
8. *Bikchentaev A. M.* Tripotents in algebras: invertibility and hyponormality // Lobachevskii J. Math. 2014. V. 35, N 3. P. 281–285.
9. *Мерфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.
10. *Kadison R. V., Ringrose J. R.* Fundamentals of the theory of operator algebras. V. 1. Elementary theory. New York; London: Acad. Press, 1983. (Pure Appl. Math.; V. 100).
11. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. Berlin: Springer-Verl., 1979. V. I.
12. *Бикчентаев А. М.* Оператор блочного проектирования в нормированных идеальных пространствах измеримых операторов // Изв. вузов. Математика. 2012. № 2. С. 86–91.
13. *Topping D. M.* Vector lattices of self-adjoint operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 115, N 1. P. 14–30.
14. *Бикчентаев А. М.* Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1228–1236.
15. *Bikchentaev A. M.* Commutation of projections and characterization of traces on von Neumann algebras. III // Int. J. Theor. Phys. 2015. V. 54, N 12. P. 4482–4493.
16. *Бикчентаев А. М.* Неравенство для следа на унитальной C^*-алгебре // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 4. С. 483–488.
17. *Koliha J. J.* Range projections of idempotents in C^*-algebras // Demonstr. Math. 2001. V. 24, N 1. P. 91–103.
18. *Бикчентаев А. М.* К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Мат. заметки. 2015. Т. 98, № 3. С. 337–348.
19. *Бикчентаев А. М.* Об операторно монотонных и операторно выпуклых функциях // Изв. вузов. Математика. 2016. № 5. С. 70–74.
20. *Бикчентаев А. М.* Идеальные F-нормы на C^*-алгебрах // Изв. вузов. Математика. 2015. № 5. С. 69–74.

Статья поступила 21 марта 2016 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Airat.Bikchentaev@kpfu.ru