Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.518.15+514.7

О ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СУБРИМАНОВОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ГРУПП КАРНО

М. Б. Карманова

Аннотация. Установлена полиномиальная субриманова дифференцируемость широких классов гёльдеровых в субримановом смысле отображений таких, как классы гладких отображений, их графики и графики липшицевых в субримановом смысле отображений, определенных на нильпотентных градуированных группах. Получено описание специальных базисов, переносящих субриманову структуру с прообраза на образ.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.206

Ключевые слова: группа Карно, нильпотентная градуированная группа, гёльдерово отображение, полиномиальный субриманов дифференциал, внутренний базис.

Субримановы структуры являются одним из естественных обобщений римановых многообразий, свойства которого позволяют развивать многие актуальные приложения и решать задачи, возникающие в разных областях науки: геометрическая теория управления [1–3], задачи о машинах с прицепами [4–6], проблемы перемещения масс [7, 8], робототехника (см., например, [9]); движение самопропульсирующих микроорганизмов и падающих кошек (см. описание этих и подобных задач в [10]), квантовое управление [11–14], термодинамика черных дыр (см., например, [15, 16]), астродинамика [17], экономика [18, 19], нейробиология (математические модели работы человеческого мозга) [20–24] и др.

Примером субримановой структуры общего характера является пространство Карно — Каратеодори. В частном классическом случае оно представляет собой многообразие $\mathbb{M}$ с подрасслоением $H\mathbb{M}$ в касательном расслоении $T\mathbb{M}$, порождающим все $T\mathbb{M}$ с помощью операции коммутирования:

$$H\mathbb{M} = H_1 \subset H_2 = \operatorname{span}\{H_1, [H_1, H_1]\} \subset H_3 = \operatorname{span}\{H_2, [H_1, H_2]\} \\ \subset \ldots \subset H_M = \operatorname{span}\{H_{M-1}, [H_1, H_{M-1}]\} = T\mathbb{M}.$$

Число M определяет глубину пространства, а фильтрация подрасслоениями — согласованную с ней квазиметрику d_∞. Нетрудно показать, что справедливы следующие оценки сравнения d_∞ с римановой метрикой ρ:

$$\frac{1}{C}\rho \le d_\infty \le C\rho^{1/M},\ C < \infty. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–31–60036–мол–а–дк).

© 2017 Карманова М. Б.

Частные случаи пространства Карно — Каратеодори — это группы Гейзенберга, группы Карно, а также нильпотентные градуированные группы. *Нильпотентной градуированной группой* (*Ли*) называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$, для алгебры Ли V которой справедливо $V = \bigoplus\limits_{j=1}^{M} V_j$, $[V_1, V_j] \subset V_{j+1}$, $j < M$, $[V_1, V_M] = \{0\}$. Если $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ для всех $j < M$, то $\mathbb{G}$ называется *группой Карно* (см. [25], определение стратифицированной однородной группы, а также далее определения 1.1 и 1.3). Из неравенства (1) следует, что, во-первых, построение примеров липшицевых (относительно d_∞) отображений сложных неголономных структур является довольно нетривиальной задачей, требующей проведения глубоких исследований и заслуживающей написания отдельных работ (см., например, [26–29]), и, во-вторых, отображения класса C^1 (в римановом смысле) будут в общем случае гёльдеровыми с показателем $1/M$. Так как теория субримановой дифференцируемости [30–32] разработана для классов липшицевых отображений или отображений, рассмотрение которых можно свести к липшицевым с помощью разбиений области определения [33], даже к такому «привычному» для исследований классу, как $C^\infty(\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}})$, где $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, теория субримановой дифференцируемости неприменима.

Отметим также, что в силу оценок (1) и специфики групповых операций при естественном обобщении понятия отображения-графика на неголономный случай полученное отображение не будет липшицевым ни в классическом, ни в субримановом смысле, даже если исходное отображение, по которому строился график, липшицево в субримановом смысле. Следовательно, и для этого класса применение субримановой теории дифференцирования невозможно. На данный момент автором получено несколько результатов об отображениях-графиках функций на группах Карно [34–36], а также об отображениях-графиках отображений трехмерных многообразий Карно [37, 38]. Основным инструментом исследования является обобщение концепции неголономной дифференцируемости — полиномиальная субриманова дифференцируемость, построенная на идее аппроксимации не линейным отображением, а полиномом, где порядок приближения по определенной координате зависит от степеней соответствующих векторных полей.

Цель настоящей работы — выявить субримановы «дифференциальные» свойства как хорошо известного в классической теории дифференцирования класса гладких отображений многообразий с групповой структурой (иными словами, нильпотентных градуированных групп), так и установить «дифференцируемость» отображений-графиков, построенных по неголономным липшицевым отображениям, и найти вид их дифференциалов. Подчеркнем, что для достаточно гладких отображений, являющихся гёльдеровыми в субримановом смысле, не обязательно требовать дифференцируемости до порядка $\widetilde{M}$ по всем переменным (как в случае известной формулы Тейлора), а в силу специфики квазиметрики на прообразе такое ограничение по гладкости можно заменить менее жестким. Как итог исследований мы описываем метод построения адаптированных субримановых базисов для гёльдеровых отображений и отображений-графиков (классов липшицевых и гёльдеровых отображений). Заметим, что в отличие от работ [34–38] даже при построении адаптированного базиса не накладывается никаких ограничений на 1) структурные константы, 2) топологическую размерность, 3) глубину, 4) коммутаторы базисных полей как образа, так и прообраза. Тем самым выведенные результаты носят общий характер и не требуют проверок свойств, являющихся в ряде случаев довольно трудоемкими (см., например, [34]).

В разд. 1 изложены основные определения и утверждения, полезные для доказательств главных результатов. Разд. 2 посвящен полиномиальной субримановой дифференцируемости отображений $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ групп Карно. В разд. 3 установлена полиномиальная субриманова дифференцируемость графиков как липшицевых отображений, так и классов гёльдеровых в субримановом смысле отображений, а также найден явный вид полиномиальных субримановых дифференциалов. В разд. 4 вводится понятие адаптированного (или внутреннего) базиса и с помощью невырожденных преобразований базиса показывается, каким способом возможно согласование образов полиномиальных субримановых дифференциалов различных классов отображений с субримановыми структурами области определения и пространства-образа.

1. Группы Карно и их свойства

Опишем нильпотентные градуированные группы и их частные случаи — группы Карно (см., например, [25]).

Определение 1.1. *Группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е. представляется в виде

$$V = \bigoplus_{j=1}^{M} V_j, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1},\ j < M, \quad [V_1, V_M] = \{0\}. \tag{1.1}$$

Размерности пространств $V_j(x)$, $j = 1, \dots, M$, не зависят от точки x.

Определение 1.2. Пусть N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$ и $X_1, X_2, \dots, X_N$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли V, причем

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_{\dim V_1} & \text{— базис } V_1, \\ X_{\dim V_1 + \dots + \dim V_{k-1} + 1}, \dots, X_{\dim V_1 + \dots + \dim V_k} & \text{— базис } V_k,\ 1 < k \leq M. \end{cases}$$

Здесь символ $\dim V_k$ означает размерность V_k в каждой точке x. Если $X_j \in V_k$, то число k называется *степенью* поля X_j и обозначается через $\deg X_j$. Векторные поля степени 1 далее будем называть *горизонтальными*.

Определение 1.3. *Нильпотентной градуированной группой* (*Ли*) называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$, для алгебры Ли V которой справедливо

$$V = \bigoplus_{j=1}^{M} V_j, \quad [V_1, V_j] \subset V_{j+1},\ j < M, \quad [V_1, V_M] = \{0\}.$$

Размерности пространств $V_j(x)$, $j = 1, \dots, M$, не зависят от точки x. Степени базисных полей задаются аналогично определению 1.2.

Иными словами, для нильпотентной градуированной группы соотношение $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ из (1.1) может не выполняться. Группа Карно является частным случаем нильпотентной градуированной группы.

Определение 1.4. Минимальное число M такое, что $V_M \neq \{0\}$, а $V_{M+1} = \{0\}$, называется *глубиной* нильпотентной градуированной группы $\mathbb{G}$.

Обозначение 1.5. Обозначим символом $\mathbf{0}$ единицу группы $\mathbb{G}$.

Из формулы Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа и условия левоинвариантности базисных полей выводятся следующие выражения для групповой операции на $\mathbb{G}$. Если $x = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j\Bigr)(\mathbf{0})$, $y = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\Bigr)(\mathbf{0})$, то $x \cdot y = z = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} z_j X_j\Bigr)(\mathbf{0})$, где

$$z_j = x_j + y_j + \sum_{\substack{\mu>0,\, \beta>0,\\ |\mu+\beta|_h = \deg X_j}} F^j_{\mu,\beta} x^\mu y^\beta,$$

и для каждого N-мерного мультииндекса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ его *однородная норма* обозначается через $|\lambda|_h = \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i \deg X_i$.

Здесь умножение $x \cdot y$ понимается в следующем смысле. Сначала движение идет до точки x вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j$ с началом в $\mathbf{0}$, а затем — вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j$ с началом в x. Таким образом, интегральная линия поля $\sum\limits_{j=1}^{N} z_j X_j$ соединяет точки $\mathbf{0}$ и $z = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\Bigr)(x)$.

Определение 1.6. Константы $\bigl\{F^j_{\mu,\beta}\bigr\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами группы* $\mathbb{G}$.

Определение 1.7. Рассмотрим точку $u \in \mathbb{G}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^{N} v_i X_i\Biggr)(u).$$

Известно, что θ_u — гладкий диффеоморфизм. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (*относительно* $u \in \mathbb{G}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

Определение 1.8. Пусть $\mathbb{G}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности N и глубины M, и пусть $x = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i X_i\Bigr)(u)$. Определим величину d_∞ следующим образом:

$$d_\infty(x, u) = \max_{i=1,\dots,N}\{|x_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}.$$

Свойство 1.9. Величина $d_\infty(v, w)$ локально является квазиметрикой: она неотрицательна (и равна нулю тогда и только тогда, когда $v = w$), обладает свойством симметричности, и для всякой окрестности $D \subset \mathbb{G}$ существует константа $C_D < \infty$ такая, что выполнено обобщенное неравенство треугольника

$$d_\infty(v, w) \le C_D(d_\infty(v, u) + d_\infty(u, w))$$

для всех $v, u, w \in D$.

Обозначение 1.10. Шар в квазиметрике d_∞ радиуса r с центром в точке x, равный $\{y \in \mathbb{G} : d_\infty(x, y) < r\}$, обозначим через $\mathrm{Box}(x, r)$.

Свойство 1.11. Образ шара $\mathrm{Box}(x, r)$ при отображении θ_x^{-1} — декартово произведение M кубов, длины сторон которых равны $2r, 2r^2, \ldots, 2r^M$.

Свойство 1.12. С помощью свойства 1.11 непосредственно проверяется, что хаусдорфова размерность группы $\mathbb{G}$ относительно d_∞ равна $\nu = \sum\limits_{j=1}^{M} j \dim V_j$.

Определение 1.13 [34]. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы Ли, $E \subset \mathbb{G}$ и $\psi : E \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Пусть еще $\tilde{\mathfrak{d}} : \psi(E) \times \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{R}_+$. Будем говорить, что ψ *полиномиально субриманово дифференцируемо*, или *полиномиально hc-дифференцируемо*, в (предельной) точке $x \in E$ относительно $\tilde{\mathfrak{d}}$, если существует отображение $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такое, что

1) $\tilde{\mathfrak{d}}(\psi(w), \mathscr{L}_x\langle w\rangle) = o(d_\infty(x, w))$, $E \ni w \to x$;

2) $\mathscr{L}_x(w) = \theta_{\psi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w)$, где L_x — оператор с полиномиальными относительно $w_1, \ldots, w_N$ коэффициентами, а $\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(x) = w$.

Отображение $\mathscr{L}_x$ называется *полиномиальным субримановым дифференциалом*, или *полиномиальным hc-дифференциалом*, отображения ψ в точке x.

Замечание 1.14. Заметим, что требуемые в определении 1.13 свойства не обеспечивают единственности в выборе полиномиального hc-дифференциала. Например, если изучаемое отображение гладкое, то существуют приближения многочленами Тейлора до произвольно большого порядка, причем каждое такое приближение удовлетворяет свойствам 1 и 2. Далее в похожих случаях будем рассматривать минимально возможный приближающий отображение полином. Однако при необходимости (см., например, второй шаг доказательства теоремы 4.3, а также описание доказательства теоремы 4.6) будем рассматривать полиномиальный субриманов дифференциал, приближающий отображение с большей, чем оговорено в определении 1.13, точностью.

Обозначение 1.15. Здесь и далее полиномиальный субриманов дифференциал $\mathscr{L}_x$ будем обозначать через $\widehat{D}_P\psi(x)$.

2. Класс гёльдеровых отображений групп

В данном разделе выведем субримановы дифференциальные свойства класса отображений нильпотентных градуированных групп, являющихся гёльдеровыми в субримановой геометрии и достаточно гладкими в классическом смысле. В частности, покажем, что в силу особенностей квазиметрики d_∞ применение формулы Тейлора для аппроксимации таких отображений не является необходимым (см. ниже замечание 2.5). Так как группы Карно — частный случай нильпотентных градуированных групп, результаты справедливы и для отображений групп Карно.

Обозначение 2.1. Для $\mathbb{G} \ni y = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} y_i X_i\right)(x)$ коэффициенты при полях степени k будем называть *переменными степени* k, $k = 1, \ldots, M$.

Предположение 2.2. *Будем рассматривать* $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, *где*

1) $\Omega \subset \mathbb{G}$ — *открытое множество;*

2) $\mathbb{G}$ — *нильпотентная градуированная группа топологической размерности* N, *с базисными полями* $X_1, \dots, X_N$, *хаусдорфовой размерности* ν, *с алгеброй Ли векторных полей* $V = \bigoplus_{i=1}^{M} V_i$, *где размерность* V_i *в каждой точке равна* n_i, *а поля* $X_{d_{i-1}+1}, \dots, X_{d_i}$ *составляют базис* V_i, $d_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$, $d_0 = 0$, $i = 1, \dots, M$, *и единицей* $\mathbf{0}$*;*

3) $\widetilde{\mathbb{G}}$ — *нильпотентная градуированная группа топологической размерности* $\widetilde{N}$, *с базисными полями* $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{\widetilde{N}}$, *хаусдорфовой размерности* $\tilde{\nu}$, *с алгеброй Ли векторных полей* $\widetilde{V} = \bigoplus_{i=1}^{\widetilde{M}} \widetilde{V}_i$, *где размерность* $\widetilde{V}_i$ *в каждой точке равна* $\tilde{n}_i$, *а поля* $\widetilde{X}_{\tilde{d}_{i-1}+1}, \dots, \widetilde{X}_{\tilde{d}_i}$ *составляют базис* $\widetilde{V}_i$, $\tilde{d}_i = \sum_{k=1}^{i} \tilde{n}_k$, $\tilde{d}_0 = 0$, $i = 1, \dots, \widetilde{M}$, *и единицей* $\tilde{\mathbf{0}}$*;*

4) *каждая координатная функция* φ_i *имеет гладкость* $\left[\frac{\widetilde{M}+k-1}{k}\right]$ *по переменным степени* k, $i = 1, \dots, \widetilde{N}$, $k = 1, \dots, M$.

Замечание 2.3. Требование на гладкость по переменным степени k корректно. Действительно, пусть $y = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} y_j X_j\right)(\mathbf{0})$, $x = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} x_j X_j\right)(\mathbf{0})$, тогда $y = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} y_j^{\Delta} X_j\right)(x)$, где

$$y_j^{\Delta} = y_j - x_j + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_j, \\ \alpha,\beta>0}} F^j_{\alpha,\beta}(-x)^{\alpha} y^{\beta},$$

$j = 1, \dots, N$. Таким образом, если φ_i принадлежит классу C^l по x_j и y_j, то она будет принадлежать тому же классу C^l и по y_j^{Δ}, $j = 1, \dots, N$. Это следует из того, что по переменным, входящим в произведения $(-x)^{\alpha} y^{\beta}$, $\alpha, \beta > 0$, эта координатная функция имеет не меньшую гладкость в силу ограничения $|\alpha + \beta|_h = \deg X_j$.

Замечание 2.4. В исследуемом в статье случае свойство контактности отображения φ не требуется. Следовательно, степени полей, входящих в представление образа векторного поля при $D\varphi$, могут быть строго больше степени самого поля. Поэтому такой класс отображений гёльдеров с точки зрения субримановых (квази)метрик и, таким образом, субриманова теория дифференцируемости [30–32] к ним неприменима.

Из [32] вытекает, что существует хотя бы одно горизонтальное векторное поле, в представление образа которого входит одно или несколько полей степени строго больше единицы. Действительно, в противном случае φ было бы контактным отображением класса C^1, являющимся, в частности, липшицевым в субримановом смысле.

Замечание 2.5. Подчеркнем, что для аппроксимации $C^{\infty}(\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}})$-отображений полиномом не обязательно применение формулы Тейлора до порядка $\widetilde{M}$.

Действительно, требуемая гладкость отображения по тем или иным переменным зависит от степени поля, при котором в прообразе находится этот коэффициент: если он относится к полю степени q, достаточно дифференцируемости отображения до порядка $\left[\frac{\widetilde{M}+q-2}{q}\right]$ или $\left[\frac{\widetilde{M}+q-1}{q}\right]$ в зависимости от номера координатной функции (см. далее теорему 2.10).

Таким образом, класс изучаемых в данном разделе отображений гораздо шире, чем $C^\infty(\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}})$.

Обозначение 2.6. Пусть $\psi:\mathbb{G}\to\mathbb{R}$. Обозначим символом $D_{s,q}\psi(x)\langle y\rangle$, $y=\exp\Big(\sum\limits_{k=1}^{N}y_kX_k\Big)(x)$, минимальную часть многочлена Тейлора, состоящую из производных порядка не выше qs функции ψ в точке x по переменным $(y_1,\dots,y_{d_q})$ степеней, не превосходящих q, которая аппроксимирует значение

$$\psi\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{d_q}y_kX_k\right)(x)\right)-\psi\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{d_{q-1}}y_kX_k\right)(x)\right)-D\psi(x)\left\langle\sum_{l=d_{q-1}+1}^{d_q}y_lX_l\right\rangle \quad (2.1)$$

с точностью до величины $o(\max\limits_{i=1,\dots,d_q}\{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\})^{qs}$.

Следующие замечания поясняют корректность использования введенного выше значения для структур неголономной геометрии.

Замечание 2.7. Перейдем в координаты относительно точки x. Заметим, что

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{d_q}y_kX_k\right)(x)=\exp\left(\sum_{l=d_{q-1}+1}^{d_q}y_lX_l+\sum_{m\colon m>d_q}\bar{y}_mX_m\right)\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{d_{q-1}}y_kX_k\right)(x)\right),$$

где каждая величина $\bar{y}_m=O(d_\infty(x,y)^{\deg X_m})$ для $m>d_q$ — полином от переменных, степени которых не превосходят q. Следовательно, при $\bar{\psi}=\psi\circ\theta_x$ (2.1) равно выражению

$$\begin{aligned}&\bar{\psi}(y_1,\dots,y_{d_q},0_{d_q+1},\dots,0_N)-\bar{\psi}(y_1,\dots,y_{d_{q-1}},0_{d_{q-1}+1},\dots,0_N)\\&\quad-D\bar{\psi}(\bar{x}^{q-1})\langle 0,\dots,0,y_{d_{q-1}+1},\dots,\bar{y}_N\rangle+D\bar{\psi}(\bar{x}^{q-1})\langle 0,\dots,0,\bar{y}_{d_q+1},\dots,\bar{y}_N\rangle\\&\qquad\qquad+(D\bar{\psi}(\bar{x}^{q-1})-D\bar{\psi}(0))\langle 0,\dots,0,y_{d_{q-1}+1},\dots,y_{d_q},0,\dots,0\rangle,\end{aligned}$$

где $\bar{x}^t=(y_1,\dots,y_{d_t},0_{d_t+1},\dots,0_N)$ для всех возможных $t\le d_q$, а нули с индексами обозначают нулевые координаты с соответствующими номерами. Из формул групповой операции на $\mathbb{G}$ вытекает, что $\max\limits_{m\colon m>d_q}\{|\bar{y}_m|\}=o(\max\limits_{k=d_{q-1}+1,\dots,d_q}\{|y_k|\})$. Поэтому в координатах первого рода относительно x корректно рассматривать величину $D\bar{\psi}(\bar{x}^{q-1})\langle 0,\dots,0,y_{d_{q-1}+1},\dots,y_{d_q},0,\dots,0\rangle$ в качестве значения дифференциала вместо согласованного с групповой операцией значения $D\bar{\psi}(\bar{x}^{q-1})\langle 0,\dots,0,y_{d_{q-1}+1},\dots,\bar{y}_N\rangle$.

Кроме того, при $s=1$ имеем $D_{s,q}\psi(x)\langle y\rangle=0$.

Замечание 2.8. Так как $q\left[\frac{\widetilde{M}+q-1}{q}\right]\ge\widetilde{M}$, $\max\limits_{i=1,\dots,d_q}\{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}\le d_\infty(x,y)$, то $D_{s,q}\psi(x)\langle y\rangle$ при $s=\left[\frac{\widetilde{M}+q-1}{q}\right]$ аппроксимирует (2.1) с точностью до величины $o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}})$.

Поясним, что требований на гладкость φ, описанных в предположении 2.2, достаточно для корректности определения $D_{\left[\frac{\widetilde{M}+q-1}{q}\right],q}\psi(x)\langle y\rangle$, $q = 1,\dots,M$. Действительно, достаточно учесть, что $D\bar{\psi}(\bar{x}^t) - D\bar{\psi}(\bar{x}^{t-1})$ можно приблизить в $\bar{x}^{t-1}$ по переменным степени t с точностью до порядка $\left[\frac{\widetilde{M}+t-1}{t}\right]-1$, а $|\bar{x}^t - \bar{x}^{t-1}| = O(d_\infty(x,y)^t)$. Тогда каждое слагаемое с номером t из разности

$$(D\bar{\psi}(\bar{x}^{q-1}) - D\bar{\psi}(\bar{x}^{q-2}))\langle 0,\dots,0,y_{d_{q-1}+1},\dots,y_{d_q},0,\dots,0\rangle \\ + \dots + (D\bar{\psi}(\bar{x}^1) - D\bar{\psi}(x))\langle 0,\dots,0,y_{d_{q-1}+1},\dots,y_{d_q},0,\dots,0\rangle$$

можно приблизить по переменным степени t с точностью до $o(d_\infty(x,y))$ в степени $t\left(\left[\frac{\widetilde{M}+t-1}{t}\right]-1\right)+q \geq \widetilde{M}$, $t = 1,\dots,q-1$. Поясним дальнейшие рассуждения в общем виде для всех $l = 2,\dots,q-1$ при $q-l>0$. Пусть $q-l>0$, и рассмотрим одно из слагаемых, входящих в приближение в точке $\bar{x}^{q-l}$. Это производная, которая имеет порядок k_1 по переменным степени $q-1$, k_2 по переменным степени $q-2$ и k_s по переменным степени $q-s$, $s=3,\dots,l-1$. Так как $\left[\frac{\widetilde{M}+t-1}{t}\right] \geq \left[\frac{\widetilde{M}+t-2}{t-1}\right]$ для всякого t, то по переменным степени $q-l$ в точке $\bar{x}^{q-l-1}$ (при переходе к ней от $\bar{x}^{q-l}$) можно дифференцировать не более $\left[\frac{\widetilde{M}+q-l-1}{q-l}\right] - \sum\limits_{s=1}^{l-1} k_s \geq 0$ раз. Кроме того, при этой производной коэффициент сравним с расстоянием в степени $q + \sum\limits_{s=1}^{l-1}(q-s)k_s$. Тогда приближение в точке $\bar{x}^{q-l-1}$ будет сравнимо с $o(d_\infty(x,y))$ в степени

$$(q-l)\left[\frac{\widetilde{M}+q-l-1}{q-l}\right] - \sum_{s=1}^{l-1}(q-l)k_s + q + \sum_{s=1}^{l-1}(q-s)k_s \geq \widetilde{M}+q.$$

Подчеркнем, что это соотношение верно и при $\left[\frac{\widetilde{M}+q-l-1}{q-l}\right] - \sum\limits_{s=1}^{l-1} k_s = 0$; тогда для перехода от $\bar{x}^{q-l}$ к x разность значений рассматриваемого слагаемого будет $o(1)$. Таким образом, предположения на гладкость φ достаточно для корректного определения вышеупомянутых величин.

Замечание 2.9. Очевидно, что величина

$$\bar{\psi}(y_1,\dots,y_{d_q},0_{d_q+1},\dots,0_N) - \bar{\psi}(y_1,\dots,y_{d_{q-1}},0_{d_{q-1}+1},\dots,0_N)$$

аппроксимируется с точностью до $o(d_\infty(x,y))$ в степени $q\left[\frac{\widetilde{M}+q-1}{q}\right]$ в точке $\bar{x}^{q-1}$. Далее для них применимы рассуждения замечания 2.8 с той разницей, что соотношение будет

$$(q-l)\left[\frac{\widetilde{M}+q-l-1}{q-l}\right] - \sum_{s=1}^{l-1}(q-l)k_s + \sum_{s=1}^{l-1}(q-s)k_s \geq \widetilde{M}.$$

Окончательно, все предположения на гладкость координатных функций корректны.

Следующий результат является основным в этом разделе.

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия предположения* 2.2. *Отображение* $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ *полиномиально субриманово дифференцируемо всюду, и* $\widehat{D}_P\varphi(x)$

в нормальных координатах относительно $\varphi(x)$ *сопоставляет элементу* y *набор* $(\Delta_1(x,y),\dots,\Delta_N(x,y))$, *где для* $\deg\widetilde{X}_i = k$, $k \le \widetilde{M}-1$,

$$\Delta_i(x,y) = D\varphi_i(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_i(x)\langle y\rangle$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\varphi(x))^{\alpha} \prod_{q=1}^{\widetilde{N}} \Bigg(\varphi_q(x) + D\varphi_q(x)\langle y\rangle$$

$$+ \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-3}{p}],p}\varphi_q(x)\langle y\rangle\Bigg)^{\beta_q} \Bigg(\varphi_l(x)\bigg(D\varphi_j(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_j(x)\langle y\rangle\bigg)$$

$$- \varphi_j(x)\bigg(D\varphi_l(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_l(x)\langle y\rangle\bigg)\Bigg)$$

и для $\deg\widetilde{X}_i = \widetilde{M}$

$$\Delta_i(x,y) = D\varphi_i(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-1}{p}],p}\varphi_i(x)\langle y\rangle$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\varphi(x))^{\alpha} \prod_{q=1}^{\widetilde{N}} \Bigg(\varphi_q(x) + D\varphi_q(x)\langle y\rangle$$

$$+ \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_q(x)\langle y\rangle\Bigg)^{\beta_q} \Bigg(\varphi_l(x)\bigg(D\varphi_j(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-1}{p}],p}\varphi_j(x)\langle y\rangle\bigg)$$

$$- \varphi_j(x)\bigg(D\varphi_l(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-1}{p}],p}\varphi_l(x)\langle y\rangle\bigg)\Bigg),$$

$\beta = (\beta_1,\dots,\beta_{\widetilde{N}})$.

Доказательство. Фиксируем $x \in \Omega$ и точку y из ее окрестности. Их образы равны

$$\varphi(x) = \exp\Bigg(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}} \varphi_i(x)\widetilde{X}_i\Bigg)(\tilde{\mathbf{0}}), \quad \varphi(y) = \exp\Bigg(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}} \varphi_i(y)\widetilde{X}_i\Bigg)(\tilde{\mathbf{0}}).$$

Дальнейшая задача — выразить координаты $\varphi(y)$ относительно $\varphi(x)$ и найти явное выражение для полиномиального субриманова дифференциала. Для этого прежде всего найдем точность покоординатного «риманова» приближения φ полиномиальным дифференциалом $\widehat{D}_P\varphi$, необходимую для получения аппроксимации в субримановом смысле. Пусть $\varphi(y) = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{N}} \delta_i(x,y)\widetilde{X}_i\Big)(\varphi(x))$ и $\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{N}} \Delta_i(x,y)\widetilde{X}_i\Big)(\varphi(x))$. По формулам групповой операции для $\varphi(y) = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{N}} \omega_i(x,y)\widetilde{X}_i\Big)(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)$ получаем

$$\omega_i(x,y) = \delta_i(x,y) - \Delta_i(x,y), \quad \deg\widetilde{X}_i = 1,$$

$$\omega_i(x,y)=\delta_i(x,y)-\Delta_i(x,y)$$
$$+\sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\Delta)^\alpha\delta^\beta(\Delta_l(x,y)\delta_j(x,y)-\Delta_j(x,y)\delta_l(x,y)),\ \deg\widetilde{X}_i=k,$$

где $\delta=(\delta_1(x,y),\dots,\delta_{\widetilde{N}}(x,y))$ и $\Delta=(\Delta_1(x,y),\dots,\Delta_{\widetilde{N}}(x,y))$, $k=2,\dots,\widetilde{M}$. По определению аппроксимации должны выполняться оценки

$$|\omega_i(x,y)|=o(d_\infty(x,y)^{\deg\widetilde{X}_i}),\quad i=1,\dots,N. \tag{2.2}$$

Однако если $|\alpha|=|\beta|=0$, а одно из значений $\deg X_l$ или $\deg X_j$ равно единице, то возможно получение соотношения $|\omega_i(x,y)|=o(d_\infty(x,y)^2)$ вместо искомого (2.2). Это вытекает из того, что оценки вида $|\Delta_l(x,y)|=O(d_\infty(x,y)^{\deg\widetilde{X}_l})$ и $|\delta_j(x,y)|=O(d_\infty(x,y)^{\deg\widetilde{X}_j})$ для неконтактного отображения в общем случае неверны. Поэтому необходимо получение более тонких оценок

$$|\omega_i(x,y)|=o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}-1}),\quad i=1,\dots,\tilde{d}_{\widetilde{M}-1},$$
$$|\omega_i(x,y)|=o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}}),\quad i>\tilde{d}_{\widetilde{M}-1}.$$

Напомним, что по формулам групповой операции для разности верно

$$\delta_i(x,y)=\varphi_i(y)-\varphi_i(x),\quad \deg\widetilde{X}_i=1,$$

$$\delta_i(x,y)=\varphi_i(y)-\varphi_i(x)$$
$$+\sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\varphi(x))^\alpha\varphi(y)^\beta(\varphi_l(x)\varphi_j(y)-\varphi_j(x)\varphi_l(y)),\ \deg\widetilde{X}_i=k,$$

$k=2,\dots,\widetilde{M}$. Пусть $\deg\widetilde{X}_i=1$. Заметим, что для $\bar{\varphi}_i=\varphi_i\circ\theta_x$ и $y=\exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^N y_jX_j\Bigr)(x)$ справедливо

$$\begin{aligned}\varphi_i(y)-\varphi_i(x)&=\bar{\varphi}_i(\theta_x^{-1}(y))-\bar{\varphi}_i(0)\\ &=\bar{\varphi}_i(y_1,\dots,y_N)-\bar{\varphi}_i(y_1,\dots,y_{d_{M-1}},0_{d_{M-1}+1},\dots,0_N)\\ &+\bar{\varphi}_i(y_1,\dots,y_{d_{M-1}},0_{d_{M-1}+1},\dots,0_N)-\bar{\varphi}_i(y_1,\dots,y_{d_{M-2}},0_{d_{M-2}+1},\dots,0_N)\\ &+\bar{\varphi}_i(y_1,\dots,y_{d_{M-2}},0_{d_{M-2}+1},\dots,0_N)-\bar{\varphi}_i(y_1,\dots,y_{d_{M-3}},0_{d_{M-3}+1},\dots,0_N)\\ &+\dots+\bar{\varphi}_i(y_1,\dots,y_{d_2},0_{d_2+1},\dots,0_N)-\bar{\varphi}_i(y_1,\dots,y_{d_1},0_{d_1+1},\dots,0_N)\\ &+\bar{\varphi}_i(y_1,\dots,y_{n_1},0_{n_1+1},\dots,0_N)-\bar{\varphi}_i(0)\end{aligned} \tag{2.3}$$

(напомним, что $d_1=n_1$), и положим

$$\Delta_i(x,y)=D\varphi_i(x)\langle y\rangle+\sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_i(x)\langle y\rangle,\quad i=1,\dots,\tilde{n}_1.$$

Из определения следует, что

$$|\delta_i(x,y)-\Delta_i(x,y)|=o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}-1}), \tag{2.4}$$

$i=1,\dots,\tilde{n}_1$ (см. замечания 2.7, 2.8 и 2.9).

Рассмотрим случай $\deg \widetilde{X}_i = 2$. Имеем

$$\delta_i(x,y) = \varphi_i(y) - \varphi_i(x) + \sum_{\substack{\deg \widetilde{X}_j = \deg \widetilde{X}_l = 1,\\ j<l}} G^i_{j,l}(\varphi_l(x)\varphi_j(y) - \varphi_j(x)\varphi_l(y)),$$

$$\begin{aligned}\omega_i(x,y) &= \delta_i(x,y) - \Delta_i(x,y) \\ &\quad + \sum_{\substack{\deg \widetilde{X}_j = \deg \widetilde{X}_l = 1,\\ j<l}} G^i_{j,l}(\Delta_l(x,y)\delta_j(x,y) - \Delta_j(x,y)\delta_l(x,y)) \\ &= \varphi_i(y) - \varphi_i(x) - \Delta_i(x,y) \\ &\quad + \sum_{\substack{\deg \widetilde{X}_j = \deg \widetilde{X}_l = 1,\\ j<l}} G^i_{j,l}(\varphi_l(x)\varphi_j(y) - \varphi_j(x)\varphi_l(y)) + o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}}).\end{aligned}$$

Следовательно, так как $|\omega_i(x,y)| = o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}-1})$, нужно выполнение условия

$$\begin{aligned}\varphi_i(y) - \varphi_i(x) + \sum_{\substack{\deg \widetilde{X}_j = \deg \widetilde{X}_l = 1,\\ j<l}} G^i_{j,l}(\varphi_l(x)\varphi_j(y) - \varphi_j(x)\varphi_l(y)) \\ = \Delta_i(x,y) + o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}-1}).\end{aligned}$$

Для этого достаточно разложить $\varphi_i(y)$, $\varphi_j(y)$ и $\varphi_l(y)$ до порядка $\widetilde{M}-1$ по горизонтальным координатам и до порядка $\left[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}\right]$ по координатам, соответствующим полям степени $p = 2, \dots, M$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_i(x,y) &= D\varphi_i(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_i(x)\langle y\rangle \\ &\quad + \sum_{\substack{\deg \widetilde{X}_j = \deg \widetilde{X}_l = 1,\\ j<l}} G^i_{j,l}\Bigg(\varphi_l(x)\bigg(D\varphi_j(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_j(x)\langle y\rangle\bigg) \\ &\quad - \varphi_j(x)\bigg(D\varphi_l(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_l(x)\langle y\rangle\bigg)\Bigg).\end{aligned}$$

В случае если $\deg \widetilde{X}_i = k$, $2 < k < \widetilde{M}$, то

$$\begin{aligned}\omega_i(x,y) &= \varphi_i(y) - \varphi_i(x) - \Delta_i(x,y) \\ &\quad + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h = k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\varphi(x))^\alpha \varphi(y)^\beta (\varphi_l(x)\varphi_j(y) - \varphi_j(x)\varphi_l(y)) \\ &+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h = k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\Delta(x,y))^\alpha \delta(x,y)^\beta (\Delta_l(x,y)\delta_j(x,y) - \Delta_j(x,y)\delta_l(x,y)),\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\Delta_i(x,y) &= o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}-1}) + \varphi_i(y) - \varphi_i(x)\\ &+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\varphi(x))^\alpha \varphi(y)^\beta(\varphi_l(x)\varphi_j(y) - \varphi_j(x)\varphi_l(y))\\ &+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\Delta(x,y))^\alpha \delta(x,y)^\beta(\Delta_l(x,y)\delta_j(x,y) - \Delta_j(x,y)\delta_l(x,y)).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Из полученного выражения и представления (2.3) вытекает, что координатную функцию φ_i достаточно разложить до порядка $\widetilde{M}-1$ по горизонтальным переменным и до $\bigl[\frac{\widetilde{M}+l-2}{l}\bigr]$ по переменным степени l, $l=2,\dots,M$. Действительно, в этом случае для величины приближения имеем

$$o(d_\infty(x,y))^{l[\frac{\widetilde{M}+l-2}{l}]} \leq o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}-1}).$$

Рассмотрим первое суммирование в (2.5). Так как

$$\varphi_l(x)\varphi_j(y) - \varphi_j(x)\varphi_l(y) = \varphi_l(x)(\varphi_j(y)-\varphi_j(x)) - \varphi_j(x)(\varphi_l(y)-\varphi_l(x)),$$

координатные функции φ_j и φ_l следует разложить до тех же порядков, что и φ_i. Кроме того, для $\beta \neq 0$ координатные функции, входящие в произведение $\varphi(y)^\beta$, разложим до порядка $\widetilde{M}-2$ по горизонтальным переменным и до $\bigl[\frac{\widetilde{M}+l-3}{l}\bigr]$ по переменным степени $l=2,\dots,M$. В этом случае

$$\left|\varphi(y)^\beta - \prod_{q=1}^{\widetilde{N}}\left(\varphi_q(x) + D\varphi_q(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-3}{p}],p}\varphi_q(x)\langle y\rangle\right)^{\beta_q}\right| = o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}-2}),$$

где $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_{\widetilde{N}})$. Осталось учесть, что $\varphi_l(x)\varphi_j(y)-\varphi_j(x)\varphi_l(y) = O(d_\infty(x,y))$.

Подчеркнем, что в нашем случае (в отличие от ситуации, когда отображение контактно) следует учесть и третье слагаемое в (2.5), которое в силу выбора порядка приближения будет равно $o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}})$ (см. (2.4), а также пояснения далее).

Если $k=\widetilde{M}$, то в соотношении (2.5) величину $o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}-1})$ нужно заменить на $o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}})$. Поэтому координатную функцию φ_i необходимо разложить до порядка $\widetilde{M}$ по горизонтальным переменным и до $\bigl[\frac{\widetilde{M}+l-1}{l}\bigr]$ по переменным степени $l=2,\dots,M$. Кроме того, для $\beta\neq 0$ координатные функции, входящие в произведение $\varphi(y)^\beta$, надо разложить до порядка $\widetilde{M}-1$ по горизонтальным переменным и до $\bigl[\frac{\widetilde{M}+l-2}{l}\bigr]$ по переменным степени $l=2,\dots,M$. Заметим, что номерам j и l могут соответствовать пары степеней 1 и $\widetilde{M}-1$, 2 и $\widetilde{M}-2$ и т. д. Тогда сумма (2.5) будет включать слагаемые вида $G^i_{j,l}(\Delta_l(x,y)\delta_j(x,y) - \Delta_j(x,y)\delta_l(x,y))$, или

$$\begin{aligned}\Delta_l(x,y)\delta_j(x,y) &- \Delta_j(x,y)\delta_l(x,y)\\ &= \Delta_l(x,y)(\delta_j(x,y)-\Delta_j(x,y)) - \Delta_j(x,y)(\delta_l(x,y)-\Delta_l(x,y)).\end{aligned}$$

Так как по построению $|\delta_j(x,y)-\Delta_j(x,y)| = o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}-1})$ для всех $j \le d_{\widetilde{M}-1}$, соотношение (2.5) верно и для $\deg \widetilde{X}_i = \widetilde{M}$, где величина $o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}-1})$ заменена на $o(d_\infty(x,y)^{\widetilde{M}})$.

Таким образом, полагая $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{\widetilde{N}})$, выводим

$$\begin{aligned}\Delta_i(x,y) = D\varphi_i(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_i(x)\langle y\rangle \\ + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\varphi(x))^\alpha \prod_{q=1}^{\widetilde{N}}\Bigg(\varphi_q(x) + D\varphi_q(x)\langle y\rangle \\ + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-3}{p}],p}\varphi_q(x)\langle y\rangle\Bigg)^{\beta_q}\Bigg(\varphi_l(x)\Bigg(D\varphi_j(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_j(x)\langle y\rangle\Bigg) \\ - \varphi_j(x)\Bigg(D\varphi_l(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_l(x)\langle y\rangle\Bigg)\Bigg) \qquad (2.6)\end{aligned}$$

для $\deg \widetilde{X}_i = k$, $k \le \widetilde{M}-1$, и

$$\begin{aligned}\Delta_i(x,y) = D\varphi_i(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-1}{p}],p}\varphi_i(x)\langle y\rangle \\ + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\varphi(x))^\alpha \prod_{q=1}^{\widetilde{N}}\Bigg(\varphi_q(x) + D\varphi_q(x)\langle y\rangle \\ + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-2}{p}],p}\varphi_q(x)\langle y\rangle\Bigg)^{\beta_q}\Bigg(\varphi_l(x)\Bigg(D\varphi_j(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-1}{p}],p}\varphi_j(x)\langle y\rangle\Bigg) \\ - \varphi_j(x)\Bigg(D\varphi_l(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{\widetilde{M}+p-1}{p}],p}\varphi_l(x)\langle y\rangle\Bigg)\Bigg) \qquad (2.7)\end{aligned}$$

для $\deg \widetilde{X}_i = \widetilde{M}$. Теорема доказана. $\square$

Обозначение 2.11. Для $Q \in \mathbb{N}$ и $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, положим

$$\mathscr{D}_Q\psi(x)\langle y\rangle = D\psi(x)\langle y\rangle + \sum_{p=1}^{M} D_{[\frac{Q+p-1}{p}],p}\psi(x)\langle y\rangle.$$

Замечание 2.12. С учетом новых обозначений, в нормальных координатах относительно $\varphi(x)$ действие полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P\varphi(x) : y \mapsto (\Delta_1(x,y), \dots, \Delta_{\widetilde{N}}(x,y))$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta_i(x,y) = \mathscr{D}_{\widetilde{M}-1}\varphi_i(x)\langle y\rangle \\ + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\varphi(x))^\alpha \prod_{q=1}^{\widetilde{N}}(\varphi_q(x) + \mathscr{D}_{\widetilde{M}-2}\varphi_q(x)\langle y\rangle)^{\beta_q} \\ \times (\varphi_l(x)\mathscr{D}_{\widetilde{M}-1}\varphi_j(x)\langle y\rangle - \varphi_j(x)\mathscr{D}_{\widetilde{M}-1}\varphi_l(x)\langle y\rangle)\end{aligned}$$

для $\deg \widetilde{X}_i = k$, $k \leq \widetilde{M}-1$, и

$$\Delta_i(x,y) = \mathscr{D}_{\widetilde{M}}\varphi_i(x)\langle y\rangle + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_j+e_l|_h=k,\\ j<l}} G^i_{\alpha,\beta,j,l}(-\varphi(x))^\alpha \prod_{q=1}^{\widetilde{N}}(\varphi_q(x)+\mathscr{D}_{\widetilde{M}-1}\varphi_q(x)\langle y\rangle)^{\beta_q} \times (\varphi_l(x)\mathscr{D}_{\widetilde{M}}\varphi_j(x)\langle y\rangle - \varphi_j(x)\mathscr{D}_{\widetilde{M}}\varphi_l(x)\langle y\rangle)$$

для $\deg \widetilde{X}_i = \widetilde{M}$, где $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_{\widetilde{N}})$.

Замечание 2.13. Если $\widetilde{M} = 2$ и $M \geq 2$, то $\Delta_i(x,y) = D\varphi_i(x)\langle y\rangle$ для $\deg \widetilde{X}_i = 1$ и

$$\Delta_i(x,y) = \mathscr{D}_2\varphi_i(x)\langle y\rangle + \sum_{\substack{|e_j+e_l|_h=2,\\ j<l}} G^i_{j,l}(\varphi_l(x)\mathscr{D}_2\varphi_j(x)\langle y\rangle - \varphi_j(x)\mathscr{D}_2\varphi_l(x)\langle y\rangle)$$

для $\deg \widetilde{X}_i = 2$. Заметим, что в этом случае $\mathscr{D}_2\psi(x)\langle y\rangle = D\psi(x)\langle y\rangle + D_{2,1}\psi(x)\langle y\rangle$. Таким образом, если $\deg \widetilde{X}_i = 2$, то

$$\Delta_i(x,y) = D\varphi_i(x)\langle y\rangle + D_{2,1}\varphi_i(x)\langle y\rangle + \sum_{\substack{|e_j+e_l|_h=2,\\ j<l}} G^i_{j,l}(\varphi_l(x)[D\varphi_j(x)\langle y\rangle + D_{2,1}\varphi_j(x)\langle y\rangle] - \varphi_j(x)[D\varphi_l(x)\langle y\rangle + D_{2,1}\varphi_l(x)\langle y\rangle]). \quad (2.8)$$

Определение 2.14. *Контактное горизонтальное подпространство* $V_1^C(x,\varphi)$ в точке x отображения φ — это подпространство в $V_1(x)$, образ которого при $D\varphi$ лежит в $H_{\varphi(x)}\widetilde{\mathbb{G}}$.

Контактное горизонтальное подрасслоение $V_1^C\mathbb{G}(\varphi)$ отображения φ — это подрасслоение в V_1, образ которого при $D\varphi$ лежит в $\widetilde{V}_1$.

Если существует набор независимых горизонтальных полей $\{X_1,\dots,X_m\}$, образы которых всегда горизонтальны, то подрасслоение, соответствующее максимальному набору, будем называть *максимальным контактным горизонтальным подрасслоением* $V_1^{C_m}\mathbb{G}(\varphi)$ отображения φ.

Замечание 2.15. 1. Рассмотрим максимальное контактное горизонтальное расслоение, всевозможные коммутаторы его полей (до порядка $M-1$) и интегральное многообразие $\mathbb{G}^{C_m} \subset \mathbb{G}$ получившегося набора. Тогда $\varphi : \mathbb{G}^{C_m} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ будет контактным отображением.

2. Объединим $\widetilde{V}_1$ с базисными полями $\widetilde{X}_{j_1},\dots,\widetilde{X}_{j_q}$, где q — минимальное число такое, что

$$D\varphi\langle V_1\rangle \subset \operatorname{span}\{\widetilde{V}_1, \widetilde{X}_{j_1},\dots,\widetilde{X}_{j_q}\},$$

и перенумеруем степени базисных полей с помощью рассмотрения всевозможных коммутаторов этих полей (до порядка $\widetilde{M}-1$). Обозначим $\widetilde{\mathbb{G}}$ с новой структурой символом $\widetilde{\mathbb{G}}^H$. Тогда $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}^H$ будет контактным отображением.

3. В вышеописанных случаях к φ с новым образом или прообразом применима теория субримановой дифференцируемости.

3. Графики отображений групп Карно

Цель этого раздела — вывод дифференциальных свойств отображений-графиков, построенных по отображениям групп Карно. Кроме того, получим явное аналитическое выражение полиномиальных субримановых дифференциалов и для графиков липшицевых отображений, и для графиков гладких отображений, рассмотренных в разд. 2.

Прежде всего опишем структуру, в условиях которой будем рассматривать отображения-графики.

Предположение 3.1. *Пусть* $(\mathbb{G},\{X_1,\dots,X_N\})$ *и* $(\widetilde{\mathbb{G}},\{\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_{\widetilde{N}}\})$ — *группа Карно и нильпотентная градуированная группа соответственно, для которых справедливы условия и обозначения предположения* 2.2. *Пусть, кроме того,*

(1) $\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}\subset\mathbb{U}$, *где* $\mathbb{U}$ — *нильпотентная градуированная группа топологической размерности* $N+\widetilde{N}$, $\mathbb{G}\cap\widetilde{\mathbb{G}}=0=(\mathbf{0},\tilde{\mathbf{0}})$;

(2) *поля* $X_1,\dots,X_N$ *и* $\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_{\widetilde{N}}$ *базисные для всей группы* $\mathbb{U}$;

(3) $\varphi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{G}}$ — *липшицево в субримановом смысле отображение, где* $\Omega\subset\mathbb{G}$ — *открытое множество.*

Свойство 3.2. Так как наборы $\{X_1,\dots,X_N\}$ и $\{\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_{\widetilde{N}}\}$ являются наборами базисных векторных полей для $\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}\subset\mathbb{U}$, соответствующие распределения интегрируемы.

Свойство 3.3. Пусть $\widetilde{\mathbb{G}}_x$ — интегральное многообразие распределения $\{\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_{\widetilde{N}}\}$, проходящее через $x\in\mathbb{G}$, а отображение $\varphi_x:\mathbb{G}\to\widetilde{\mathbb{G}}_x$ на элементе y определено следующим образом:

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\varphi_j(y)\widetilde{X}_j\right)(x),$$

где $\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{\widetilde{N}}\varphi_j(y)\widetilde{X}_j\right)(\tilde{\mathbf{0}})=\varphi(y)$. Тогда φ_x также липшицево и, кроме того, $\widehat{D}\varphi(v)=\widehat{D}\varphi_x(v)$ для всех $v\in\Omega$. Действительно, оба утверждения следуют непосредственно из постоянства структурных констант на однородной группе $\mathbb{U}$.

Определение 3.4 (ср. [34]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы, $\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}\subset\mathbb{U}$, $\Omega\subset\mathbb{G}$ и $\varphi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{G}}$. Положим значение в точке $x\in\Omega$ *отображения-графика* φ_Γ равным

$$\varphi_\Gamma(x)=\exp\left(\sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\varphi_j(x)\widetilde{X}_j\right)(x),$$

где $\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{\widetilde{N}}\varphi_j(x)\widetilde{X}_j\right)(\tilde{\mathbf{0}})=\varphi(x)$.

Замечание 3.5. Имеем $\varphi_\Gamma(x)=\varphi_x(x)$.

Определение 3.6 [30, 32]. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, а $\widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа, $D\subset\mathbb{G}$ — измеримое множество и $\varphi:D\to\widetilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ называют *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в точке $x\in D$, если существует горизонтальный гомоморфизм

$\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$d_\infty(\varphi(y), \mathscr{L}_x\langle y\rangle) = o(d_\infty(x,y)) \quad \text{при } y \to x,\ y \in D.$$

hc-Дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathscr{L}_x$ обозначим через $\widehat{D}\varphi(x)$.

Теорема 3.7 ([30], см. также [32]). *Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение. Тогда φ hc-дифференцируемо почти всюду.*

Основной результат раздела — следующая теорема о полиномиальной субримановой дифференцируемости отображений-графиков.

Теорема 3.8. *Пусть выполнены условия предположения 3.1. Отображение-график $\varphi_\Gamma : \Omega \to \mathbb{U}$, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, полиномиально субриманово дифференцируемо почти всюду (а именно в точках hc-дифференцируемости φ), и $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)$ сопоставляет элементу $\exp\Bigl(\sum\limits_{p=1}^{N} y_pX_p\Bigr)(x)$ в координатах относительно $\varphi_\Gamma(x)$ набор $(\Delta_1(x,y), \dots, \Delta_N(x,y), \widetilde{\Delta}_1(x,y), \dots, \widetilde{\Delta}_{\widetilde{N}}(x,y))$, где*

$$\begin{aligned}\Delta_i(x,y) = y_i &+ \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg X_i,\\ \kappa, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa(-\varphi(x))^\mu(\varphi(x))^\lambda \\ &+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h = \deg X_i,\\ \alpha,\tau>0}} L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^\beta(\varphi(x))^\gamma y^\alpha(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau, \quad i = 1,\dots,N,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}_j(x,y) = (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j &+ \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg \widetilde{X}_j,\\ \kappa, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa(-\varphi(x))^\mu(\varphi(x))^\lambda \\ &+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h = \deg \widetilde{X}_j,\\ \alpha,\tau>0}} L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^\beta(\varphi(x))^\gamma y^\alpha(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau, \quad j = 1,\dots,\widetilde{N},\end{aligned} \tag{3.1}$$

$y = (y_1, \dots, y_N)$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{\widetilde{N}}(x))$, а $K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda}$, $L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$, $K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda}$ и $L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$ — константы для всех мультииндексов κ, μ, λ, α, β, γ, τ, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, \widetilde{N}$.

Доказательство. За основу доказательства положим метод из [34]. Фиксируем точку $x \in \Omega$ субримановой дифференцируемости φ и точку $y \in \Omega$ из ее окрестности. Построим дополнительную точку $\varphi_y(x)$ и оценим ее координаты относительно $\varphi_\Gamma(x) = \varphi_x(x)$, а затем сравним ее с $\varphi_y(y) = \varphi_\Gamma(y)$. Получаем, что y — концевая точка интегральной линии поля

$$Z = \sum_{l=1}^{N} z_l X_l + \sum_{m=1}^{\widetilde{N}} \tilde{z}_m \widetilde{X}_m,$$

с началом в точке $\varphi_\Gamma(x)$, где

$$z_l = y_l + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_l,\\ \alpha,\beta>0}} F^{X_l}_{\alpha,\beta}(-\varphi(x))^\alpha y^\beta, \quad l = 1,\dots,N,$$

$$\tilde{z}_m = -\varphi_m(x) + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \widetilde{X}_m, \\ \alpha,\beta>0}} F^{\widetilde{X}_m}_{\alpha,\beta}(-\varphi(x))^\alpha y^\beta, \quad m = 1,\dots,\widetilde{N}.$$

Обозначим вектор $(z_1,\dots,z_N,\tilde{z}_1,\dots,\tilde{z}_{\widetilde{N}})$ символом ζ. Тогда $\varphi_y(x)$ — концевая точка интегральной линии поля

$$S = \sum_{l=1}^{N} s_l X_l + \sum_{m=1}^{\widetilde{N}} \tilde{s}_m \widetilde{X}_m$$

с началом в точке $\varphi_\Gamma(x)$, где

$$s_l = y_l + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_l, \\ \alpha,\beta>0}} F^{X_l}_{\alpha,\beta}(-\varphi(x))^\alpha y^\beta + \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_l, \\ \mu,\lambda>0}} F^{X_l}_{\mu,\lambda}\zeta^\mu(\varphi(x))^\lambda, \quad l = 1,\dots,N,$$

$$\tilde{s}_m = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \widetilde{X}_m, \\ \alpha,\beta>0}} F^{\widetilde{X}_m}_{\alpha,\beta}(-\varphi(x))^\alpha y^\beta + \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg \widetilde{X}_m, \\ \mu,\lambda>0}} F^{\widetilde{X}_m}_{\mu,\lambda}\zeta^\mu(\varphi(x))^\lambda, \quad m = 1,\dots,\widetilde{N}.$$

Так как при $(y_1,\dots,y_N) = (0,\dots,0)$ имеем

$$\sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_l, \\ \mu,\lambda>0}} F^{X_l}_{\mu,\lambda}(-\varphi(x))^\mu(\varphi(x))^\lambda = \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg \widetilde{X}_m, \\ \mu,\lambda>0}} F^{\widetilde{X}_m}_{\mu,\lambda}(-\varphi(x))^\mu(\varphi(x))^\lambda = 0$$

для соответствующих множителей ζ^μ, состоящих только из произведений координат из набора $(\tilde{z}_1,\dots,\tilde{z}_{\widetilde{N}})$, коэффициенты имеют вид

$$s_l = y_l + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg X_l, \\ \kappa,|\lambda|+|\mu|>0}} K^{X_l}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa(-\varphi(x))^\mu(\varphi(x))^\lambda, \quad l = 1,\dots,N,$$

$$\tilde{s}_m = \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg \widetilde{X}_m, \\ \kappa,|\lambda|+|\mu|>0}} K^{\widetilde{X}_m}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa(-\varphi(x))^\mu(\varphi(x))^\lambda, \quad m = 1,\dots,\widetilde{N},$$

где $K^{X_l}_{\kappa,\mu,\lambda}$ и $K^{\widetilde{X}_m}_{\kappa,\mu,\lambda}$ — константы для всех κ, μ, λ, $l = 1,\dots,N$, $m = 1,\dots,\widetilde{N}$.

Поскольку x — точка субримановой дифференцируемости φ, она является и точкой субримановой дифференцируемости φ_y. Кроме того, матрицы их субримановых дифференциалов совпадают (см. свойство 3.3). Следовательно, записывая образы $\widehat{D}\varphi_y(x)$ и $\widehat{D}\varphi(x)$ в виде комбинаций полей образа с коэффициентами $\{y_i\}_{i=1}^N$, выводим

$$\begin{aligned} &d_\infty(\exp(\widehat{D}\varphi_y(x)\langle y\rangle)(\varphi_y(x)), \varphi_y(y)) \\ &\qquad = d_\infty(\exp(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)(\varphi_y(x)), \varphi_y(y)) = o(d_\infty(x,y)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Обозначим символом δ_i элемент $(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_i$, $i = 1,\dots,\widetilde{N}$. По свойствам субриманова дифференциала $|\delta_i| \le T|(y_{d_{\deg X_i - 1}+1},\dots,y_{d_{\deg X_i}})|$, $T = T(\varphi) < \infty$, $i = 1,\dots,\widetilde{N}$ (здесь $d_0 = 0$).

Обозначим $\sigma = (s_1, \dots, s_N, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{\widetilde{N}})$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{\widetilde{N}})$. Выразим координаты точки $\exp(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)(\varphi_y(x))$ относительно $\varphi_\Gamma(x)$ в терминах координат σ и δ. Имеем $\exp(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)(\varphi_y(x)) = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} \Delta_i X_i + \sum\limits_{j=1}^{N} \widetilde{\Delta}_j \widetilde{X}_j\right)(\varphi_\Gamma(x))$, где

$$\Delta_i = y_i + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg X_i,\\ \kappa, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_i,\\ \alpha,\beta>0}} F^{X_i}_{\alpha,\beta} \sigma^\alpha \delta^\beta, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\widetilde{\Delta}_j = \delta_j + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg \widetilde{X}_j,\\ \kappa, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \widetilde{X}_j,\\ \alpha,\beta>0}} F^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta} \sigma^\alpha \delta^\beta, \quad j = 1, \dots, \widetilde{N},$$

или

$$\Delta_i = y_i + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg X_i,\\ \kappa, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h = \deg X_i,\\ \alpha,\tau>0}} L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau} (-\varphi(x))^\beta (\varphi(x))^\gamma y^\alpha (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\widetilde{\Delta}_j = (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg \widetilde{X}_j,\\ \kappa, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h = \deg \widetilde{X}_j,\\ \alpha,\tau>0}} L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau} (-\varphi(x))^\beta (\varphi(x))^\gamma y^\alpha (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau, \quad j = 1, \dots, \widetilde{N},$$

где $K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda}$, $L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$, $K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda}$ и $L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$ — константы для всех мультииндексов κ, μ, λ, α, β, γ, τ, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, \widetilde{N}$. В силу определения полиномиальной субримановой дифференцируемости и свойства (3.2) отображение-график φ_Γ полиномиально субриманово дифференцируемо в точках субримановой дифференцируемости φ и отображение

$$\exp\left(\sum_{l=1}^{N} y_l X_l\right)(x) = y \mapsto \widehat{D}_P \varphi_\Gamma(x)\langle y\rangle = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \Delta_i X_i + \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} \widetilde{\Delta}_j \widetilde{X}_j\right)(\varphi_\Gamma(x))$$

является его полиномиальным субримановым дифференциалом $\widehat{D}_P \varphi_\Gamma(x)$ для всех точек x субримановой дифференцируемости φ. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.9. В частном случае, когда коммутаторы вида $[X_i, \widetilde{X}_j]$ равны 0, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, \widetilde{N}$, имеем $[X, Y] = 0$, где $X = \sum\limits_{j=1}^{\widetilde{N}} \varphi_j \widetilde{X}_j$ и $Y =$

$\sum\limits_{i=1}^{N} y_i X_i$. Следовательно, $Z = X + Y$, а $\varphi_y(x)$ — концевая точка интегральной линии поля Y, так как $[-X, X+Y] = 0$. Поэтому в таком случае

$$\Delta_i = y_i,\ i = 1,\dots,N, \quad \widetilde{\Delta}_j = (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j,\ j = 1,\dots,\widetilde{N}.$$

В качестве следствия выведем результат о полиномиальной субримановой дифференцируемости графиков гладких отображений.

Теорема 3.10. *Пусть для* $\mathbb{G}$ *и* $\widetilde{\mathbb{G}}$ *выполнены условия предположения* 3.1, *а отображение* φ *такое, как описано в предположении* 2.2. *Отображение-график* $\varphi_\Gamma : \Omega \to \mathbb{U}$, *где* $\Omega \subset \mathbb{G}$ *— открытое множество, непрерывно полиномиально субриманово дифференцируемо всюду, и* $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)$ *сопоставляет в нормальных координатах относительно* $\varphi_\Gamma(x)$ *каждому элементу* $\exp\left(\sum\limits_{p=1}^{N} y_p X_p\right)(x)$ *набор* $(\Gamma_1(x,y),\dots,\Gamma_N(x,y),\widetilde{\Gamma}_1(x,y),\dots,\widetilde{\Gamma}_{\widetilde{N}}(x,y))$, *где*

$$\begin{gathered}\Gamma_i(x,y) = y_i + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg X_i,\\ \kappa, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda \\ + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h = \deg X_i,\\ \alpha,\tau>0}} L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau} (-\varphi(x))^\beta (\varphi(x))^\gamma y^\alpha (\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau, \quad i = 1,\dots,N, \\ \widetilde{\Gamma}_j(x,y) = (\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_j + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg \widetilde{X}_j,\\ \kappa, |\lambda|+|\mu|>0}} K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda \\ + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h = \deg \widetilde{X}_j,\\ \alpha,\tau>0}} L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau} (-\varphi(x))^\beta (\varphi(x))^\gamma y^\alpha (\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)^\tau, \quad j = 1,\dots,\widetilde{N},\end{gathered} \tag{3.3}$$

$y = (y_1,\dots,y_N)$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\dots,\varphi_{\widetilde{N}}(x))$, $\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle$ *— значение полиномиального субриманова дифференциала* φ *в точке* x *на элементе* y, *а* $K^{X_i}_{\kappa,\mu,\lambda}$, $L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$, $K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa,\mu,\lambda}$ *и* $L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}$ *— константы для всех* κ, μ, λ, α, β, γ, τ, $i = 1,\dots,N$, $j = 1,\dots,\widetilde{N}$.

4. Согласование хаусдорфовых размерностей

Как видно из вычислений, приведенных в предыдущих разделах, при полиномиальном hc-дифференциале, рассмотренном в исходном базисе, хаусдорфова размерность относительно исходной субримановой структуры не сохраняется в силу присутствия слишком «больших» коэффициентов при полях степени, большей единицы (см., например, теорему 2.10 и соотношения (3.1) и (3.3)). Значит, в таком виде формулы не имеют смысла при получении неголономных метрических характеристик поверхностей-образов, поэтому возникает необходимость построения специального *внутреннего*, или *адаптированного, базиса* (ср. [34]).

В данном разделе опишем, каким образом нужно преобразовать базис в образе отображения-графика, чтобы в нем каждая координатная функция полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle y\rangle$ (или $\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle$) была сравнима с величиной $d_\infty(x,y)$ в степени, равной степени соответствующего ей поля.

Определение 4.1. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\psi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Если координаты $\{\kappa_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$ полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P\psi(x)\langle y\rangle$, рассмотренные относительно точки $\psi(x)$ в базисе $\{Y_i\}_{i=1}^{\widetilde{N}}$, обладают свойством $|\kappa_j| = O(d_\infty(x,y)^{\deg \widetilde{X}_j})$, $j = 1,\dots,\widetilde{N}$, то базис $\{Y_i\}_{i=1}^{\widetilde{N}}$ называется *внутренним*, или *адаптированным*.

Далее в доказываемых утверждениях будем искать адаптированные базисы, позволяющие аппроксимировать полиномиальные hc-дифференциалы таким образом, чтобы локальное искажение меры характеризовалось в терминах этих полиномиальных hc-дифференциалов.

Рассмотрим сначала отображения-графики, полиномиальная субриманова дифференцируемость которых доказана в разд. 3, в условиях описания 3.1 (графики липшицевых отображений).

Замечание 4.2. Дифференциал $D(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$ полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)$ (см. (3.1)) имеет блочно-нижнетреугольную структуру, если перегруппировать базисные поля на $\mathbb{U}$ по их степеням.

Теорема 4.3. *Пусть φ в условиях теоремы* 3.8 *является контактным отображением, имеющим гладкость* $\left[\frac{\max\{M,\widetilde{M}\}+p-1}{p}\right]$ *по переменным степени* $p = 1,\dots,M$. *Тогда для всех $x \in \Omega$ существуют полученный линейными преобразованиями базис $\{Y_j\}_{j=1}^N$ и адаптированный базис $\{{}^xX_1,\dots,{}^xX_N,{}^x\widetilde{X}_1,\dots,{}^x\widetilde{X}_{\widetilde{N}}\}$ такие, что множество*

$$\big(\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)} \circ \theta^{-1}_{\varphi_\Gamma(x)}\big)(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle)$$

совпадает с $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle$, *а*

$$\big(\theta_{Y,\varphi_\Gamma(x)} \circ \theta^{-1}_{\varphi_\Gamma(x)}\big)(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle) = D(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle.$$

Здесь $\theta_{\varphi_\Gamma(x)}$ — отображение нормальных координат в исходном базисе, $\theta_{Y,\varphi_\Gamma(x)}$ — в преобразованном базисе, $\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}$ — в адаптированном базисе, D_{diag} — блочно-диагональная часть дифференциала, состоящая из блоков размерностей $(n_i + \tilde{n}_i) \times n_i$, $i = 1,\dots,\min\{M,\widetilde{M}\}$ (полученная при перегруппировке полей на $\mathbb{U}$ по степеням).

Доказательство состоит из четырех шагов. На шаге 1 заменой базиса $X_1,\dots,X_N$ оставляем в каждой координате из представления (3.1) в качестве линейной части либо y_i (для полей $T\mathbb{G}$), либо $(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j$ (для полей $T\widetilde{\mathbb{G}}$). На шаге 2 проверяем, сохраняется ли аппроксимация полиномиальным субримановым дифференциалом отображения-графика φ_Γ в базисах, отличных от исходного, и при замене субриманова дифференциала $\widehat{D}\varphi(x)$ полиномиальным субримановым дифференциалом $\widehat{D}_P\varphi(x)$, а также описываем структуру $\widehat{D}_P\varphi(x)$. На шаге 3 рассматриваем образ субриманова шара при $\psi(y) = \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle y\rangle$ и при $D\psi(x)$ и, используя лемму о касательном отображении, показываем, что образ $\psi(\mathrm{Box}(x,r))$ может быть параметризован множеством $D\psi(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle$, которое представляет собой образ субриманова шара при отображении, состоящем из линейных частей $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma$ (записанном в построенном на шаге 1 базисе). На последнем шаге 4 строим новые базисные поля и устанавливаем их свойства. Кроме того, в ходе доказательства будет проверено, что линейные части полиномиального субриманова дифференциала не изменятся.

Шаг 1. Запишем соотношения (3.1) в точке x субримановой дифференцируемости в виде

$$\begin{aligned}\Delta_i(x,y) = y_i &+ \sum_{q\colon \deg X_q<\deg X_i} P_q^i(x)y_q \\ &+ \sum_{\substack{|\kappa_1+\kappa_2+\mu+\lambda|_h=\deg X_i,\\ \kappa_1,\kappa_2,|\lambda|+|\mu|>0}} K^{X_i}_{\kappa_1+\kappa_2,\mu,\lambda} y^{\kappa_1+\kappa_2}(-\varphi(x))^{\mu}(\varphi(x))^{\lambda} \\ &+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h=\deg X_i,\\ \alpha,\tau>0}} L^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^{\beta}(\varphi(x))^{\gamma}y^{\alpha}(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^{\tau}, \quad i=1,\dots,N,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}_j(x,y) = (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j &+ \sum_{p\colon \deg X_p<\deg \widetilde{X}_j} \widetilde{P}_p^j(x)y_p \\ &+ \sum_{\substack{|\kappa_1+\kappa_2+\mu+\lambda|_h=\deg \widetilde{X}_j,\\ \kappa_1,\kappa_2,|\lambda|+|\mu|>0}} K^{\widetilde{X}_j}_{\kappa_1+\kappa_2,\mu,\lambda} y^{\kappa_1+\kappa_2}(-\varphi(x))^{\mu}(\varphi(x))^{\lambda} \\ &+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h=\deg \widetilde{X}_j,\\ \alpha,\tau>0}} L^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^{\beta}(\varphi(x))^{\gamma}y^{\alpha}(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^{\tau}, \quad j=1,\dots,\widetilde{N}.\end{aligned}$$

Рассмотрим линейные преобразования

$$X_q \mapsto Y_q = X_q + \sum_{i:\deg X_i>\deg X_q} P_q^i(x)X_i + \sum_{j:\deg \widetilde{X}_j>\deg X_q} \widetilde{P}_q^j(x)\widetilde{X}_j, \tag{4.1}$$

$q=1,\dots,N$. Положим $\deg Y_q = \deg X_q$, $q=1,\dots,N$. Подчеркнем, что поля $\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_N$ не меняются. Из непосредственных линейных преобразований коэффициентов в соотношениях

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta_i(x,y)X_i + \sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\widetilde{\Delta}_j(x,y)\widetilde{X}_j = \sum_{i=1}^{N}\widehat{\Delta}_i(x,y)Y_i + \sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\widehat{\widetilde{\Delta}}_j(x,y)\widetilde{X}_j$$

вытекает, что формулы (3.1) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta}_i(x,y) = y_i &+ \sum_{\substack{|\kappa_1+\kappa_2+\mu+\lambda|_h\le\deg X_i,\\ \kappa_1,\kappa_2,|\lambda|+|\mu|>0}} \widehat{K}^{X_i}_{\kappa_1+\kappa_2,\mu,\lambda} y^{\kappa_1+\kappa_2}(-\varphi(x))^{\mu}(\varphi(x))^{\lambda} \\ &+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h\le\deg X_i,\\ \alpha,\tau>0}} \widehat{L}^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^{\beta}(\varphi(x))^{\gamma}y^{\alpha}(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^{\tau}, \quad i=1,\dots,N,\end{aligned}$$

$$\widehat{\widetilde{\Delta}}_j(x,y) = (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j + \sum_{\substack{|\kappa_1+\kappa_2+\mu+\lambda|_h \le \deg \widetilde{X}_j,\\ \kappa_1,\kappa_2,|\lambda|+|\mu|>0}} \widehat{K}^{\widetilde{X}_j}_{\kappa_1+\kappa_2,\mu,\lambda} y^{\kappa_1+\kappa_2}(-\varphi(x))^{\mu}(\varphi(x))^{\lambda} + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h \le \deg \widetilde{X}_j,\\ \alpha,\tau>0}} \widehat{L}^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^{\beta}(\varphi(x))^{\gamma} y^{\alpha}(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^{\tau}, \quad j = 1,\dots,\widetilde{N}. \tag{4.2}$$

В этом случае дифференциал $D(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$ полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)$ (см. (3.1)) имеет блочно-диагональную структуру (при перегруппировке полей на $\mathbb{U}$ по степеням).

Шаг 2. Так как при указанной замене базиса субриманово расстояние не сохраняется (одно оценивается через другое в степени $1/\max\{M,\widetilde{M}\} < 1$), для получения нужной точности субримановой аппроксимации, равной $o(d_\infty(x,y))$, полиномиальным субримановым дифференциалом отображения φ_Γ в новом базисе в соотношениях (3.1) к дифференциалу $\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle$ необходимо добавить величину $R(\varphi,x)\langle y\rangle$, чтобы получить аппроксимацию φ с точностью до величины $o(d_\infty(x,y)^{\max\{M,\widetilde{M}\}})$.

Поскольку по условию гладкость координатных функций по переменным степени $p = 1,\dots,M$ равна $\left[\frac{\max\{M,\widetilde{M}\}+p-1}{p}\right]$, в силу аргументов, аналогичных приведенным в доказательстве теоремы 2.10, существует полиномиальный субриманов дифференциал $\widehat{D}_P\varphi(x)$ (зависящий от производных координатных функций высоких порядков), аппроксимация φ которым по всем компонентам равна $o(d_\infty(x,y)^{\max\{M,\widetilde{M}\}})$. В таком случае точность аппроксимации φ_Γ полиномиальным hc-дифференциалом с $\widehat{D}_P\varphi$ вместо $\widehat{D}\varphi$ при любых преобразованиях базиса сохранится. Действительно, если

$$\varphi_\Gamma(y) = \exp\Bigl(\sum_{i,j}\omega_i(x,y)X_i + \widetilde{\omega}_j(x,y)\widetilde{X}_j\Bigr)(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle y\rangle),$$

где $|\omega_j(x,y)|, |\widetilde{\omega}_j(x,y)| = o(d_\infty(x,y)^{\max\{M,\widetilde{M}\}})$, то и в произвольном новом базисе $\{\widehat{X}_i, \widehat{\widetilde{X}}_j\}_{i,j}$ для элементов

$$\varphi_\Gamma(y) = \exp\Bigl(\sum_{i,j}\widehat{\omega}_i(x,y)\widehat{X}_i + \widehat{\widetilde{\omega}}_j(x,y)\widehat{\widetilde{X}}_j\Bigr)(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle y\rangle)$$

будет также справедлива оценка «разности»

$$|\widehat{\omega}_i(x,y)|,\ |\widehat{\widetilde{\omega}}_j(x,y)| = o(d_\infty(x,y)^{\max\{M,\widetilde{M}\}}), \quad i = 1,\dots,N,\ j = 1,\dots,\widetilde{N}.$$

Поэтому в дальнейших рассуждениях поменяем вид (4.2) полиномиального субриманова дифференциала φ_Γ на следующий:

$$\widehat{\Delta}_i(x,y) = y_i + \sum_{\substack{|\kappa_1+\kappa_2+\mu+\lambda|_h \le \deg X_i,\\ \kappa_1,\kappa_2,|\lambda|+|\mu|>0}} \widehat{K}^{X_i}_{\kappa_1+\kappa_2,\mu,\lambda} y^{\kappa_1+\kappa_2}(-\varphi(x))^{\mu}(\varphi(x))^{\lambda} + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h \le \deg X_i,\\ \alpha,\tau>0}} \widehat{L}^{X_i}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^{\beta}(\varphi(x))^{\gamma} y^{\alpha}(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)^{\tau}, \quad i = 1,\dots,N,$$

$$\widehat{\widehat{\Delta}}_j(x,y) = (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j + ((\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_j - (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j)$$
$$+ \sum_{\substack{|\kappa_1+\kappa_2+\mu+\lambda|_h\le\deg\widetilde{X}_j,\\ \kappa_1,\kappa_2,|\lambda|+|\mu|>0}} \widehat{K}^{\widetilde{X}_j}_{\kappa_1+\kappa_2,\mu,\lambda} y^{\kappa_1+\kappa_2}(-\varphi(x))^{\mu}(\varphi(x))^{\lambda}$$
$$+ \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h\le\deg\widetilde{X}_j,\\ \alpha,\tau>0}} \widehat{L}^{\widetilde{X}_j}_{\alpha,\beta,\gamma,\tau}(-\varphi(x))^{\beta}(\varphi(x))^{\gamma} y^{\alpha}(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)^{\tau}, \quad j=1,\dots,\widetilde{N}.$$

Покажем, что в $(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_j - (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j$ не будет слагаемых, содержащих линейные комбинации координат степени, меньшей либо равной $\deg\widetilde{X}_j$, $j=1,\dots,\widetilde{N}$. Иными словами, докажем, что в силу блочно-диагонального вида субриманова дифференциала $\widehat{D}\varphi$ полиномиальное приближение каждой координатной функции-разности

$$\varphi^{\Delta}_j(x,y) = \varphi_j(y) - \varphi_j(x) + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h=\deg\widetilde{X}_j,\\ \alpha,\beta>0}} F^j_{\alpha,\beta}(-\varphi(x))^{\alpha}\varphi(y)^{\beta} \tag{4.3}$$

не будет содержать в линейной части переменных степени, меньшей либо равной $\deg\widetilde{X}_j$, $j=1,\dots,\widetilde{N}$, кроме элемента $(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j$. Утверждение очевидно для $\deg\widetilde{X}_j=1$ (разность $\varphi_j(y)-\varphi_j(x)$ не может быть приближена линейными отображениями с разными горизонтальными частями). Пусть $\deg\widetilde{X}_j=k>1$. Тогда из определения субримановой дифференцируемости и формул групповой операции имеем

$$\Big|\varphi^{\Delta}_j(x,y) - (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h=k,\\ \alpha,\beta>0}} F^j_{\alpha,\beta}(-\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^{\alpha}(\varphi^{\Delta}(x,y))^{\beta}\Big| = o(d_\infty(x,y)^k),$$

где $\varphi^{\Delta}(x,y) = \big(\varphi^{\Delta}_1(x,y),\dots,\varphi^{\Delta}_{\widetilde{N}}(x,y)\big)$. По свойству hc-дифференциала

$$|(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j| = O(d_\infty(x,y)^k), \quad |(-\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^{\alpha}| = O(d_\infty(x,y)^{|\alpha|_h})$$

и $|\varphi^{\Delta}(x,y)^{\beta}| = O(d_\infty(x,y)^{|\beta|_h})$. Так как при замене в соотношении

$$\sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h=k,\\ \alpha,\beta>0}} F^j_{\alpha,\beta}(-\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^{\alpha}(\varphi^{\Delta}(x,y))^{\beta}$$
$$= \sum_{\substack{|\kappa+\lambda+e_l+e_m|_h=k,\\ l<m}} G^j_{\kappa,\lambda,l,m}(-\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)^{\kappa}(\varphi^{\Delta}(x,y))^{\lambda}((\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_m\varphi^{\Delta}_l(y)$$
$$- (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_l\varphi^{\Delta}_m(y))$$

элементов $(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_p$ значениями $(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_p$, каждое из которых приближает соответствующую координату разности $(\varphi^{\Delta}(x,y))_p$ с точностью до величины $o(d_\infty(x,y)^{\max\{M,\widetilde{M}\}})$, $p=1,\dots,\tilde{d}_{k-1}$, получим

$$\sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h=k,\\ \alpha,\beta>0}} F^j_{\alpha,\beta}(-\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)^{\alpha}(\varphi^{\Delta}(x,y))^{\beta} = o(d_\infty(x,y)^{\max\{M,\widetilde{M}\}}),$$

то

$$|\varphi_j^{\Delta}(x,y) - (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j| = o(d_\infty(x,y)^k).$$

Поэтому осталось заменить $(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j$ на $(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_j$, который приблизит значение $\varphi_j^{\Delta}(x,y)$ с точностью до величины $o(d_\infty(x,y)^{\max\{M,\widetilde{M}\}})$. Так как

$$|(\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j - (\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_j| = o(d_\infty(x,y)^k),$$

в $(\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle)_j - (\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle)_j$ не будет слагаемых, содержащих линейные комбинации координат степени, меньшей либо равной $k = \deg \widetilde{X}_j$. Таким образом, получили описание структуры полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P\varphi(x)$. Кроме того, из (4.3) и (2.3) следует, что требований на гладкость отображения φ по переменным разной степени достаточно для его аппроксимации с точностью до $o(d_\infty(x,y)^{\max\{M,\widetilde{M}\}})$.

Заметим, что для упрощения рассуждений без ограничения общности можно считать, что разность $\widehat{D}\varphi(x)\langle y\rangle - \widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle$ не содержит координат y в первой степени (в противном случае достаточно применить линейное преобразование базиса $\{Y_q\}_{q=1}^N$, аналогичное построенному на первом шаге).

Шаг 3. Фиксируем $x \in \Omega$, положим $\psi(y) = \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle y\rangle$ и рассмотрим образы субриманова шара $\mathrm{Box}(x,r)$ при ψ и при $\eta = D\psi(x)$. Из непосредственных вычислений и результатов предыдущих шагов вытекает, что матрица $D\psi(x)$ имеет $N + \widetilde{N}$ строк и N столбцов, причем первые N строк суть строки единичной матрицы, а следующие $\widetilde{N}$ строк — строки блочно-диагональной матрицы, диагональные блоки которой совпадают с соответствующими блоками матрицы $\widehat{D}\varphi(x)$. Иными словами, при перегруппировке базисных полей на $\mathbb{U}$ по степеням имеем $D\psi(x) = D_{\mathrm{diag}}\psi(x)$. Так как $D\psi(x)$ имеет максимальный ранг N, отображение ψ в окрестности точки x действует биективно на свой образ. Рассмотрим $D\psi(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle$, лежащее в субримановом шаре сравнимого с r радиуса, и построим отображение

$$\eta(\mathrm{Box}(x,r)) = D\psi(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle \ni s \mapsto (\psi\circ\eta^{-1})(s).$$

В силу максимальности ранга $D\psi(x)$ и по лемме о касательном отображении (см., например, [39]) для риманова расстояния $\tilde\rho$ в $\mathbb{U}$ и ρ в $\mathbb{G}$ имеем $|\tilde\rho(\eta(y),\eta(z)) - \tilde\rho(\psi(y),\psi(z))| = o(1)\rho(y,z)$, где $o(1) \to 0$ при $\rho(y,z) \to 0$ равномерно по x. Таким образом, если $s = \eta(y)$, а $t = \eta(z)$, то

$$|\tilde\rho(s,t) - \tilde\rho((\psi\circ\eta^{-1})(s),(\psi\circ\eta^{-1})(t))| = o(1)\rho(\eta^{-1}(s),\eta^{-1}(t)) = o(1)\tilde\rho(s,t),$$

где $o(1) \to 0$ при $\tilde\rho(s,t) \to 0$ равномерно по x. Иными словами,

$$\tilde\rho((\psi\circ\eta^{-1})(s),(\psi\circ\eta^{-1})(t)) = (1+o(1))\tilde\rho(s,t)$$

для $s,t \in \eta(\mathrm{Box}(x,r))$, достаточно близких к $\varphi_\Gamma(x)$. Поскольку $D\psi(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle$ лежит в субримановом шаре радиуса Kr в $\mathbb{U}$, где величина K равномерна по $x \in \Omega$, отображение $\psi\circ\eta^{-1}$ — невырожденная параметризация $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle$ множеством $D\psi(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle$, субриманова структура которого согласована с прообразом.

Распространим $\psi\circ\eta^{-1}$ до отображения $\chi : U(\varphi_\Gamma(x)) \to \mathbb{U}$ на некоторую малую окрестность $U(\varphi_\Gamma(x))$ точки $\varphi_\Gamma(x)$ в $\mathbb{U}$ следующим образом: если

$s \in U(\varphi_\Gamma(x))$, то так как $\dim \operatorname{span}\{T\eta(\mathrm{Box}(x,r)), T\widetilde{\mathbb{G}}\} = N + \widetilde{N}$, существуют единственная точка t, принадлежащая множеству $\exp(\widetilde{\mathbb{G}})(\varphi_\Gamma(x))$ такая, что

$$s \in \theta_{Y,t}\big(\theta^{-1}_{Y,\varphi_\Gamma(x)}(D\psi(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle)\big)$$

(здесь отображение $\theta_{Y,v}$ координат первого рода построено относительно v и в базисе $\{Y_k, \widetilde{X}_l\}$, $k = 1,\dots,N$, $l = 1,\dots,\widetilde{N}$), и точка $z \in D\psi(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle$, имеющая те же координаты относительно $\varphi_\Gamma(x)$, что и s относительно t. Тогда $\chi(s) = \theta_{Y,t}\big(\theta^{-1}_{Y,\varphi_\Gamma(x)}(\psi\circ\eta^{-1}(z))\big)$. Таким образом, $\chi|_{D\psi(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle} = \psi\circ\eta^{-1}$, и так как $D\psi(x) = D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$, то

$$\chi(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle) = \psi\circ\eta^{-1}(D\psi(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle) = \psi(\mathrm{Box}(x,r)).$$

Кроме того, дифференциал $D\chi$ невырожденный в окрестности $\varphi_\Gamma(x)$.

Шаг 4. Заметим, что χ зависит от фиксированной точки x, а образы базисных полей вида $D\psi(x)\langle X_i\rangle$ — суммы $Y_i + \sum\limits_{l\colon \deg \widetilde{X}_l = \deg X_i} b^i_l \widetilde{X}_l$, $i = 1,\dots,N$, с постоянными коэффициентами. Рассмотрим замену базисных полей

$$Y_k \mapsto {}^xX_k = D\chi(v)\langle X_k(v)\rangle, \quad \widetilde{X}_l \mapsto {}^x\widetilde{X}_l = D\chi(v)\langle \widetilde{X}_l(v)\rangle, \tag{4.4}$$

$k = 1,\dots,N$, $l = 1,\dots,\widetilde{N}$. Тогда при отображении $D\psi(x) = D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$ образ экспоненциального отображения $\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}\big(\theta^{-1}_{Y,\varphi_\Gamma(x)}(D\psi(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle)\big)$, где $\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}$ построено по новому базису $\{{}^xX_k, {}^x\widetilde{X}_l\}$, $k = 1,\dots,N$, $l = 1,\dots,\widetilde{N}$, будет совпадать с $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\big(\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}\circ\theta^{-1}_{Y,\varphi_\Gamma(x)}\big)\left(D\psi(x)\left\langle \sum_{i=1}^N x_iX_i\right\rangle\right)\\
&\quad= \big(\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}\circ\theta^{-1}_{Y,\varphi_\Gamma(x)}\big)\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N x_i D\psi(x)\langle X_i\rangle\right)(\varphi_\Gamma(x))\right)\\
&\quad= \big(\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}\circ\theta^{-1}_{Y,\varphi_\Gamma(x)}\big)\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N x_i\Big(Y_i + \sum_{l\colon \deg \widetilde{X}_l = \deg X_i} b^i_l\widetilde{X}_l\Big)\right)(\varphi_\Gamma(x))\right)\\
&\quad= \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i\Big(D\chi\langle Y_i\rangle + \sum_{l\colon \deg \widetilde{X}_l = \deg X_i} b^i_l D\chi\langle\widetilde{X}_l\rangle\Big)\right)(\varphi_\Gamma(x))\\
&\quad= \chi\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N x_i\Big(Y_i + \sum_{l\colon \deg \widetilde{X}_l = \deg X_i} b^i_l\widetilde{X}_l\Big)\right)(\varphi_\Gamma(x))\right) \in (\psi\circ\eta^{-1})(\eta(\mathrm{Box}(x,r))),
\end{aligned}$$

так как отображение $\big(\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}\circ\theta^{-1}_{Y,\varphi_\Gamma(x)}\big)$ меняет базисные поля $\{Y_i, \widetilde{X}_j\}$, $i = 1,\dots,N$, $j = 1,\dots,\widetilde{N}$, на адаптированные (4.4). Таким образом, (4.4) — искомый адаптированный базис. Теорема доказана. □

Определение 4.4. Если $w = \exp\Big(\sum\limits_{k=1}^N w_k{}^xX_k + \sum\limits_{l=1}^{\widetilde{N}} w_{N+l}{}^x\widetilde{X}_l\Big)(v)$, то

$${}^xd_\infty(v,w) = \max_{\substack{k=1,\dots,N,\\ l=1,\dots,\widetilde{N}}}\{|w_k|^{\frac{1}{\deg X_k}}, |w_{N+l}|^{\frac{1}{\deg \widetilde{X}_l}}\}.$$

Кроме того, положим $\deg {}^xX_k = \deg X_k$ и $\deg {}^x\widetilde{X}_l = \deg \widetilde{X}_l$, $k = 1,\dots,N$, $l = 1,\dots,\widetilde{N}$.

Следствие 4.5. *В адаптированном базисе* $\{{}^xX_1,\dots,{}^xX_N,{}^x\widetilde{X}_1,\dots,{}^x\widetilde{X}_{\widetilde{N}}\}$ *образ* $\varphi_\Gamma(\mathrm{Box}(x,r))$ *лежит в субримановом шаре радиуса, сравнимого с* r.

Это следует из оценки в [40, теорема 15.4.1] и того факта, что субриманово ${}^xd_\infty$-расстояние относительно адаптированного базиса от $\varphi_\Gamma(x)$ до границ $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle$ сравнимо с r, а полиномиальный субриманов дифференциал аппроксимирует график φ_Γ с точностью до величины $o(d_\infty(x,y)^{\max\{M,\widetilde{M}\}})$ (в том числе и относительно адаптированного базиса).

Аналогичными рассуждениями получается

Теорема 4.6. *Пусть* $\varphi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{G}}$, $\Omega\subset\mathbb{G}$, *в условиях теоремы* 3.10 *имеет гладкость* $\left[\frac{\max\{M,\widetilde{M}\}+p-1}{p}\right]$ *по переменным степени* $p=1,\dots,M$. *Тогда для всех* $x\in\Omega$ *существуют полученный линейными преобразованиями базис* $\{Y_j\}_{j=1}^N$ *и адаптированный базис* $\{{}^xX_1,\dots,{}^xX_N,{}^x\widetilde{X}_1,\dots,{}^x\widetilde{X}_{\widetilde{N}}\}$ *такой, что множество*

$$\big(\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}\circ\theta^{-1}_{\varphi_\Gamma(x)}\big)(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle)$$

совпадает с $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle$, *а*

$$\big(\theta_{Y,\varphi_\Gamma(x)}\circ\theta^{-1}_{\varphi_\Gamma(x)}\big)(D_{\mathrm{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle)=D(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle.$$

Здесь $\theta_{\varphi_\Gamma(x)}$ — *отображение нормальных координат в исходном базисе,* $\theta_{Y,\varphi_\Gamma(x)}$ — *в преобразованном базисе,* $\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}$ — *в адаптированном базисе, а* D_{diag} — *блочно-диагональная часть дифференциала, состоящая из блоков размеров* $(n_i+\tilde{n}_i)\times n_i$, $i=1,\dots,\min\{M,\widetilde{M}\}$ *(полученная при перегруппировке полей на* $\mathbb{U}$ *по степеням).*

Доказательство повторяет схему доказательства теоремы 4.3 почти дословно с очевидными изменениями. Подчеркнем, что аппроксимации φ полиномиальным дифференциалом $\widehat{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle$, выведенным в теореме 3.10, недостаточно, поэтому его необходимо заменить значением $\widetilde{D}_P\varphi(x)\langle y\rangle$, приближающим любую координату φ с точностью до $o(d_\infty(x,y)^{\max\{M,\widetilde{M}\}})$.

В качестве приложения приведенных выше рассуждений получаем следующий результат.

Теорема 4.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.6. *Если в точке* $x\in\Omega$ *существует невырожденное преобразование* η_x *базиса в образе, приводящее матрицу* $D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ *к блочно-верхнетреугольному виду, где «диагональные» блоки имеют размеры* $\tilde{n}_i\times n_i$, $i=1,\dots,\min\{M,\widetilde{M}\}$, *то адаптированный в точке* x *базис существует и состоит из полей*

$$\widetilde{X}_l\mapsto{}^x\widetilde{X}_l=(D\chi_x(v)\circ\eta_x)\langle\widetilde{X}_l(v)\rangle,$$

$l=1,\dots,\widetilde{N}$. *Здесь* $\chi_x=\widehat{D}_P\varphi(x)\circ(D(\widehat{D}_P\varphi(x)))^{-1}$, *если ранг матрицы* $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$ *равен* $\widetilde{N}$ *и* $N=\widetilde{N}$. *Если ранг* $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$ *максимален, но меньше* $\widetilde{N}$, *то* χ_x — *продолжение отображения* $\widehat{D}_P\varphi(x)\circ(D(\widehat{D}_P\varphi(x)))^{-1}$, *построенное с помощью сдвигов (см. теорему 4.3, шаг 3) вдоль дополнения образа дифференциала* $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$. *В этом случае множество*

$$\big(\tilde{\theta}_{\varphi(x)}\circ\theta^{-1}_{\varphi(x)}\big)(D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)\langle\mathrm{Box}(x,r)\rangle)$$

совпадает с $\widehat{D}_P\varphi(x)\langle \mathrm{Box}(x,r)\rangle$, где матрица $D_\Delta(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ равна матрице $D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ при преобразовании η_x базиса, а $\tilde{\theta}_{\varphi(x)}$ — отображение нормальных координат в преобразованном базисе.

Если ранг $D(\widehat{D}_P\varphi(x))$ не максимален, то аналогичный результат справедлив для ограничений φ на поверхности меньшей размерности, на которых $D(\widehat{D}_P\varphi(x))(x)$ имеет максимальный ранг.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agrachev A. A., Sachkov Yu. L.* Control theory from the geometric viewpoint. Berlin: Springer-Verl., 2004.

2. *Зеликин М. И.* Оптимальное управление и вариационное исчисление. 2-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2004.

3. *Zelikin M. I., Borisov V. F.* Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering. Boston, MA: Birkhäuser, 1994.

4. *Bryant R., Hsu L.* Rigidity of integral curves of rank 2 distributions // Invent. Math. 1993. V. 114. P. 435–461.

5. *Laumond J. P.* Controllability of a multibody mobile robot // IEEE Trans. Robotics Automation. 1993. V. 9, N 6. P. 755–763.

6. *Liu W., Sussmann H. J.* Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions // Mem. Amer. Math. Soc. 1996. V. 118, N 564. P. 1–104.

7. *Khesin B., Lee P.* A nonholonomic Moser theorem and optimal transport // J. Symplectic Geom. 2009. V. 7, N 4. P. 381–414.

8. *Villani C.* Optimal transport. Old and new. Berlin: Springer, 2009. (Grundlehren Math. Wiss.; V. 338).

9. *Bloch A. M.* Nonholonomic mechanics and control. New York: Springer-Verl., 2003.

10. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.

11. *Accardi L., Pechen A., Volovich I. V.* A stochastic golden rule and quantum Langevin equation for the low density limit // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2003. V. 6, N 3. P. 431–453.

12. *Khaneja N., Reiss T., Kehlet C.* Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithms // J. Magn. Reson. 2005. V. 172. P. 296–305.

13. *Nielsen N. C., Kehlet C., Glaser S. J., Khaneja N.* Optimal control methods in NMR spectroscopy. Encyclopedia of nuclear magnetic resonance. Chichester, NY: Wiley, 2010.

14. *Pechen A.* Engineering arbitrary pure and mixed quantum states // Phys. Rev. A. 2011. V. 84, N 4. P. 042106.

15. *Udriste C., Ciancio V.* Controllability of nonholonomic black holes systems // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2013. V. 10, N 2. P. 1250097.

16. *Anastasiei M., Vacaru S. I.* Nonholonomic black ring and solitonic solutions in Finsler and extra dimension gravity theories // Int. J. Theor. Phys. 2010. V. 49, N 8. P. 1788–1804.

17. *Whiting J. K.* Path optimization using sub-Riemannian manifolds with applications to astrodynamics: Ph. D. Thesis. Cambridge, MA: Massachusetts Inst. Technology, 2011.

18. *Hobson D. G., Rogers L. C. G.* Complete models with stochastic volatility // Math. Finance. 1998. V. 8, N 1. P. 27–48.

19. *Foschi P., Pascucci A.* Path dependent volatility // Decis. Econ. Finance. 2008. V. 31, N 1. P. 13–32.

20. *Field A., Heyes A., Hess R. F.* Contour integration by the human visual system // Vision Res. 1993. V. 33. P. 173–193.

21. *Hoffman W. C.* The visual cortex is a contact bundle // Appl. Math. Comput. 1989. V. 32. P. 137–167.

22. *Hladky R. K., Pauls S. D.* Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging Vision. 2005. V. 36, N 1. P. 1–27.

23. *Sarti A., Citti G., Petitot J.* The symplectic structure of the primary visual cortex // Biol. Cybern. 2008. V. 98, N 1. P. 33–48.

24. *Petitot J.* Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionelles. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.

25. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
26. *Koranyi A., Reimann H. M.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
27. *Koranyi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
28. *Warhurst B.* Contact and quasiconformal mappings on real model filiform groups // Bull. Austral. Math. Soc. 2003. V. 68. P. 329–343.
29. *Warhurst B.* Jet spaces as nonrigid Carnot groups // J. Lie Theory. 2005. V. 15. P. 341–356.
30. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.
31. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О дифференцируемости отображений пространств Карно — Каратеодори // Докл. АН. 2003. Т. 389, № 5. С. 592–596.
32. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Contemporary mathematics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
33. *Basalaev S. G., Vodopyanov S. K.* Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Euras. Math. J. 2013. V. 4, N 2. P. 10–48.
34. *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
35. *Карманова М. Б.* Поверхности-графики над трехмерными пространствами Карно — Каратеодори // Докл. АН. 2015. Т. 463, № 3. С. 265–268.
36. *Карманова М. Б.* Поверхности-графики над трехмерными группами Ли с субримановой структурой // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1351–1365.
37. *Карманова М. Б.* Поверхности-графики коразмерности два над трехмерными пространствами Карно — Каратеодори // Сиб. мат. журн. (принята к печати).
38. *Карманова М. Б.* Трехмерные поверхности-графики на пятимерных пространствах Карно — Каратеодори // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 6. С. 614–617.
39. *Водопьянов С. К.* Интегрирование по Лебегу: учеб. пособие [Электрон. ресурс] // http://math.nsc.ru/∼matanalyse/Lebesgue.pdf.
40. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007.

Статья поступила 7 июля 2016 г.

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`maryka@math.nsc.ru`