Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.55+517.96

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАЦИОНАЛЬНЫХ КОНУСАХ

Т. И. Яковлева

Аннотация. Исследуется задача Коши для многомерного разностного уравнения в классе функций, заданных в целых точках рационального конуса. Найдено просто проверяемое условие на коэффициенты характеристического многочлена уравнения, достаточное для разрешимости задачи. На основе понятия амебы алгебраической гиперповерхности сформулирован многомерный аналог условия, которое обеспечивает устойчивость задачи Коши.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.218

Ключевые слова: многомерные разностные уравнения, корректность задачи Коши, рациональный конус.

§ 1. Введение

Сформулируем общую постановку задачи. На комплекснозначных функциях $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ целочисленных переменных $x_1, \dots, x_n$ определим операторы δ_j сдвига по переменным x_j:

$$\delta_j f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

и полиномиальный разностный оператор вида

$$P(\delta) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \delta^\omega,$$

где $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ — конечное множество точек n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$, $\delta^\omega = \delta_1^{\omega_1} \cdot \ldots \cdot \delta_n^{\omega_n}$, c_ω — постоянные коэффициенты разностного оператора. Функции $f(x)$, на которые действует оператор $P(\delta)$, естественно рассматривать на множестве K, содержащем множество сдвигов $\Omega \subset K$ и выдерживающем сдвиги на $x \in K$. В качестве такого множества возьмем рациональный конус.

Пусть $a^1, \dots, a^n$ — линейно независимые векторы с целочисленными координатами $a^j = \left(a_1^j, \dots, a_n^j\right)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$. *Рациональным конусом* (см. [1, 2]), *порожденным векторами* $a^1, \dots, a^n$, называется множество

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n,\ \lambda_j \in \mathbb{R}_+,\ j = 1, \dots, n\}.$$

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете при поддержке гранта Правительства РФ (договор № 14.Y26.31.0006) для научных исследований под руководством ведущих ученых, а также в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (№ НШ–9149.2016.1).

Отметим, что такой конус *симплициален*, т. е. каждый его элемент выражается через образующие единственным образом.

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geq}$ следующим образом:

$$u \underset{K}{\geq} v \Leftrightarrow u \in v + K,$$

где $v + K$ — сдвиг конуса K на вектор v. Кроме того, будем писать $u \underset{K}{\ngeq} v$, если $u - v \notin K$.

Для фиксированного $m \in K \cap \mathbb{Z}^n$ обозначим

$$X_m = \{x \in K \cap \mathbb{Z}^n : x \underset{K}{\ngeq} m\}$$

и будем называть точки этого множества *начальными* (*граничными*).

Будем рассматривать разностные уравнения вида

$$P(\delta)f(x) = g(x), \quad x \in K \cap \mathbb{Z}^n, \tag{1}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$, $\varphi(x)$ — заданные на множестве $K \cap \mathbb{Z}^n$ функции. Сформулируем следующую задачу.

Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) *и совпадающую на множестве X_m с заданной функцией $\varphi(x)$:*

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_m. \tag{2}$$

Эту задачу естественно назвать *задачей Коши* для уравнения (1), а условие (2) — *начальными данными* задачи Коши. Задача Коши называется *разрешимой*, если она имеет решение и оно единственно. При заданном конусе K и заданном множестве сдвигов Ω разрешимость задачи зависит от точки $m \in \Omega$ и коэффициентов c_ω оператора $P(\delta)$. В одномерном случае для $K = \mathbb{R}_+$ известно (см., например, [3]), что задача Коши (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда $P(\delta) = \sum\limits_{\omega=0}^{m} c_\omega \delta^\omega$, т. е. точка m является порядком разностного оператора (степенью характеристического многочлена). Таким образом, для $n > 1$ представляется естественным условие $m \in \Omega$. Однако этого условия недостаточно (см. [4]) и вопрос о правильной постановке задачи Коши, обеспечивающей существование и единственность решения, нетривиален. Стандартной для задач, возникающих в комбинаторном анализе, является ситуация, когда $K \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n_+$. Этот случай исследовался в [5], а именно, там приведены достаточные условия разрешимости задачи Коши (см. [5, теорема 5, с. 55]). В обозначениях данной работы в [5] рассматривался вопрос об условиях на точку m и множество сдвигов Ω, обеспечивающих разрешимость задачи Коши. В § 1 данной работы этот вопрос рассматривается в более общей ситуации, а именно когда решения задачи (1), (2) ищутся в пересечении рационального конуса K содержащего множество сдвигов Ω, с целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^n$. При этом возникает вопрос об определении понятия порядка разностного оператора $P(\delta)$.

Двойственным к конусу K называется конус

$$K^* = \{k \in \mathbb{R}^n : \langle k, x\rangle \geq 0, \ x \in K\},$$

где $\langle k, x\rangle = k_1x_1 + \dots + k_nx_n$. Обозначим множество его внутренних точек через $\mathring{K}^*$ и зафиксируем $\nu \in \mathring{K}^* \cap \mathbb{Z}^n$. Для всех $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ *взвешенно-однородной степенью монома* z^x назовем неотрицательное число

$$|x|_\nu = \langle \nu, x\rangle,$$

а (взвешенно-однородную) *степень многочлена Лорана* $Q(z) = \sum\limits_x q_x z^x$ определим формулой

$$\deg_\nu Q(z) = \max_x |x|_\nu.$$

Характеристическим многочленом для разностного оператора (1) назовем многочлен Лорана $P(z) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} c_\omega z^\omega$.

Порядком d_ν *разностного оператора* $P(\delta)$ назовем взвешенно-однородную степень $\deg_\nu P(z)$ характеристического многочлена, т. е. $d_\nu = \max\limits_{\omega\in\Omega} |\omega|_\nu$. Далее индекс ν при d будем опускать.

Обозначим через $P_d(\delta) = \sum\limits_{|\omega|_\nu = d} c_\omega \delta^\omega$ главный символ разностного оператора $P(\delta)$.

Теорема 1. *Пусть* $m \in \Omega$ *и* $|m|_\nu = d$ *— порядок разностного оператора. Если для коэффициентов* c_ω *главного символа* $P_d(\delta)$ *разностного оператора выполнено условие*

$$|c_m| > \sum_{|\omega|_\nu = d,\, \omega\neq m} |c_\omega|, \tag{3}$$

то задача (1), (2) *разрешима.*

Заметим, что условие (3) теоремы 1 слабее условий разрешимости задачи Коши из [5, теорема 5]. Из теоремы 1 также следуют теоремы о разрешимости из [6, теорема 1; 7, теорема 1]. В [5, 6] рассмотрен случай $K = \mathbb{R}^n_+$, а в [7] — общий случай рационального конуса, однако главный символ разностного оператора состоит из одного слагаемого $P_d(\delta) = c_m \delta^m$.

В случае разрешимости задачи Коши понятие устойчивости введем следующим образом. Для функции $f(x)$, заданной на множестве $K \cap \mathbb{Z}^n$, определим ее норму

$$\|f\| = \sup_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} |f(x)|$$

и назовем задачу Коши (1), (2) *устойчивой*, если существует константа $C > 0$ такая, что для любых $\varphi(x)$ и $g(x)$ соответствующее решение $f(x)$ задачи удовлетворяет условию

$$\|f\| \le C(\|\varphi\| + \|g\|).$$

Отметим, что в теории разностных схем устойчивость определяется аналогичным образом (см., например, [8, 9]).

Задача Коши *поставлена корректно*, если она разрешима и устойчива.

В одномерном случае разностный оператор имеет вид $P(\delta) = \sum\limits_{\omega=0}^{m} c_\omega \delta^\omega$, $c_m \neq 0$, $K = \mathbb{R}_+$, а $X_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Задача (1), (2) очевидным образом имеет единственное решение, а устойчивость сводится (см., например, [10]) к следующему свойству характеристического многочлена $P(z) = \sum\limits_{\omega=0}^{m} c_\omega z^\omega$ уравнения (1):

(∗) во внешности единичного круга $\{|z| \ge 1\}$ комплексной плоскости нет корней характеристического уравнения $P(z) = 0$.

Это следует (см. [10]) из вида общего решения однородного уравнения, которое является суммой элементарных решений вида $p_j(x)\lambda_j^x$, где $p_j(x)$ — некоторый многочлен от x, степень которого меньше кратности корня λ_j характеристического многочлена $P(z)$.

Асимптотика решений разностного уравнения, в частности, различного вида понятия устойчивости исследуются в рамках теории дискретных динамических систем. Так, в теории цифровой обработки сигналов устойчивость является важнейшей характеристикой цифрового рекурсивного фильтра и сводится к вопросу о сходимости ряда из модулей коэффициентов Тейлора передаточной функции фильтра (см. [11]). Для $n = 2$ проблема устойчивости цифрового рекурсивного фильтра решалась в [12].

В § 2 сформулирован многомерный аналог условия $(*)$, обеспечивающий ее устойчивость. Для его формулировки нам потребуются некоторые понятия и утверждения теории амеб алгебраических гиперповерхностей (см. [13, 14]).

Многогранником Ньютона N_P многочлена $P(z) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} c_\omega z^\omega$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества Ω, *амебой* $\mathscr{A}$ — образ множества нулей V многочлена $P(z)$ при отображении $\mathrm{Log} : z = (z_1, \dots, z_n) \to (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|) = \mathrm{Log}\,|z|$.

Дополнение амебы $\mathbb{R}^n \backslash \mathscr{A}$ состоит из конечного числа связных открытых компонент $\{E\}$. Между этим набором и точками множества $N_P \cap \mathbb{Z}^n$ существует инъективное отображение $\alpha : \{E\} \to N_P \cap \mathbb{Z}^n$ [14, теорема 3.4.10], что позволяет «нумеровать» компоненты целыми точками из $N_P \cap \mathbb{Z}^n$. Если точка $\alpha \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$ многогранника Ньютона N_P соответствует связной компоненте дополнения E_α, то двойственный конус $C_\alpha = \{s \in \mathbb{R}^n : \max\limits_{x\in N_P} \langle s, x\rangle = \langle s, \alpha\rangle\}$ является асимптотическим для нее. Это означает, что вместе с каждой точкой $u \in E_\alpha$ этой компоненте принадлежит и сдвиг асимптотического конуса: $u + C_\alpha \subset E_\alpha$, и никакой конус, содержащий C_α, этим свойством не обладает.

Отметим, что конусы тех связных компонент дополнения амебы, которые соответствуют вершинам многогранника N_P, имеют непустую внутренность.

Теорема 2. *Пусть $m \in \Omega$, $|m|_\nu = d$ — порядок разностного оператора и двойственный к точке m конус C_m содержит конус K^*, двойственный к K. Задача* (1), (2) *устойчива тогда и только тогда, когда компонента E_m дополнения амебы содержит нуль:*

$(**)$ $0 \in E_m$.

Для $n = 1$ условие $(**)$ совпадает с условием $(*)$. Пусть λ_j — корни характеристического уравнения $P(\lambda_j) = 0$ и $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots \le |\lambda_m|$, тогда $\mathscr{A} = \{\log|\lambda_j|\}_{j=1}^m$ и $\mathbb{R}\backslash\mathscr{A}$ — объединение интервалов, а $E_m = (\log|\lambda_m|, \infty)$. Из $(**)$ следует, что $0 \in E_m$, а значит, $|\lambda_m| < 1$. Таким образом, компонента дополнения амебы E_m для $n > 1$ в исследовании устойчивости играет роль внешности единичного круга.

Отметим, что при $K \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n_+$ теорема 2 доказана в [4, теорема 1].

§ 2. Разрешимость задачи Коши

Доказательство теоремы 1 сводится к разрешимости бесконечной системы линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных. Она имеет специфический вид, а именно, в каждое уравнение входит только конечное число неизвестных $f(x)$. Такая система совместна, если любая система из конечного числа уравнений совместна (см., например, [15, гл. 6, лемма 6.3.7]). Далее построена последовательность подсистем системы (1), (2), состоящих из конечного числа уравнений. Эти подсистемы устроены так, что в каждую следующую входят все уравнения предыдущей. Совместность каждой такой подсистемы в силу упомянутой выше леммы будет означать совместность системы (1), (2).

Дадим алгоритм упорядочения уравнений и «неизвестных» в системе (1), (2).

Введем отношение лексикографического порядка $\underset{K}{\prec}$ на целых точках рационального конуса K. Любой $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации $x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, где $a^1, \dots, a^n$ — образующие конуса K. Так как конус K симплициальный, это представление единственно. Обозначим через $\pi^j x = \lambda_j a^j$ проекцию вектора x на вектор a^j. Для $x, y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ определим отношение $\underset{K}{\prec}$ лексикографического порядка в рациональном конусе следующим образом: если для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и для всех $j < i$ справедливо $\pi^j x = \pi^j y$ и при этом $\pi^i x \underset{K}{<} \pi^i y$, то по определению $x \underset{K}{\prec} y$.

Для фиксированного вектора $\nu \in \mathring{K}^* \cap \mathbb{Z}^n$ рассмотрим линейную по x функцию $\langle \nu, x \rangle$, $x \in K$. Множество ее значений на точках множества $K \cap \mathbb{Z}^n$ упорядочим: $s_1 < s_2 < \dots < s_n < \dots$ (это можно сделать, поскольку симплициальный конус K выступающий, т. е. не содержит прямых), и обозначим через S_ν. Заметим, что $S_\nu \subset \mathbb{Z}_+$, так как $\nu \in \mathring{K}^*$. Взвешенно-лексикографический порядок $\lhd$ на множестве целых точек конуса K определим следующим образом. Для $x, y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ отношение $x \lhd y$ означает, что $\langle \nu, x \rangle < \langle \nu, y \rangle$, а если $\langle \nu, x \rangle = \langle \nu, y \rangle$, то $x \underset{K}{\prec} y$.

Возьмем произвольное $s_j \in S_\nu$. Неизвестные будем нумеровать элементами множества $J_j = \{y \in K \cap \mathbb{Z}^n : \langle \nu, y \rangle \le s_j\}$. Разобьем множество J_j на два:

$$J_j \cap X_m = \{y \in K \cap \mathbb{Z}^n : m \underset{K}{\nleq} y,\ \langle \nu, y \rangle \le s_j\},$$

$$J_j \backslash (J_j \cap X_m) = \{y \in K \cap \mathbb{Z}^n : m \underset{K}{\leq} y,\ \langle \nu, y \rangle \le s_j\}.$$

Заметим, что $J_j \backslash (J_j \cap X_m) = m + I_j$, где $I_j = \{x \in K \cap \mathbb{Z}^n : \langle \nu, x \rangle \le s_j - \langle \nu, m \rangle\}$. Уравнения (1) будем нумеровать элементами множества I_j, а уравнения (2) — элементами множества $I_{m,j} = \{\mu \in X_m : \langle \nu, \mu \rangle \le s_j\}$, при этом точкам x множества I_j «присвоим номера» точек $m + x \in J_j$. Если обозначить через $\# M$ число элементов конечного множества M, то $\# I_j + \# I_{m,j} = \# J_j$. Таким образом получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $f(y)$, $y \in J_j$, вида

$$\sum_{\omega \in \Omega} c_\omega f(x + \omega) = g(x), \quad x \in I_j, \tag{4}$$

$$f(\mu) = \varphi(\mu), \quad \mu \in I_{m,j}. \tag{5}$$

Обозначим через $\Delta_{m,j}$ определитель системы (4), (5).

Пример 1. Рассмотрим разностное уравнение (1), когда конус K порожден векторами $(1,1)$ и $(-1,1)$:

$$c_{0,0} f(x_1, x_2) + c_{-1,1} f(x_1 - 1, x_2 + 1) + c_{0,1} f(x_1, x_2 + 1) \\ + c_{1,1} f(x_1 + 1, x_2 + 1) = 0, \quad x \in K \cap \mathbb{Z}^2.$$

В данном случае $\Omega = \{(0,0), (-1,1), (0,1), (1,1)\}$. Сформулируем задачу Коши для $m = (0,1)$: будем искать решение уравнения, удовлетворяющее начальным данным

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in X_m,$$

где $X_m = \{(\mu_1, \mu_2) \in K \cap \mathbb{Z}^2 : (\mu_1, \mu_2) \underset{K}{\not\geq} (0,1)\}$.

Покажем, как будет выглядеть система (4), (5) для сформулированной выше задачи Коши при $\nu = (0,1)$ и для $s_2 = 2$:

$$c_{0,0}f(x_1,x_2)+c_{-1,1}f(x_1-1,x_2+1)+c_{0,1}f(x_1,x_2+1)+c_{1,1}f(x_1+1,x_2+1) = 0, x \in I_2, \tag{6}$$

$$f(\mu_1,\mu_2) = \varphi(\mu_1,\mu_2), \mu \in I_{(0,1),2}, \tag{7}$$

где множество $J_2 = \{(0,0),\ (-1,1),\ (0,1),\ (1,1),\ (-2,2),\ (-1,2),\ (0,2),\ (1,2),\ (2,2)\}$ нумерует неизвестные $f(y_1,y_2)$, а также $I_{(0,1),2} = \{(0,0),\ (-1,1),\ (1,1),\ (-2,2),\ (2,2)\}$, $I_2 = \{(\bar{0},\bar{0}),\ (-\bar{1},\bar{1}),\ (\bar{0},\bar{1}),\ (\bar{1},\bar{1})\}$. Черта над координатами точки $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ означает, что эта точка имеет тот же номер, что и точка $(x_1, 1+x_2)$. Приведем множество $I_2 + I_{(0,1),2}$ в порядке входящих в него элементов $I_2 + I_{(0,1),2} = \{(0,0),\ (-1,1),\ (\bar{0},\bar{0}),\ (1,1),\ (-2,2),\ (-\bar{1},\bar{1}),\ (\bar{0},\bar{1}),\ (\bar{1},\bar{1}),\ (2,2)\}$. Тогда определитель матрицы системы (6), (7) будет иметь следующий вид:

$$\Delta_{(0,1),2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{0,0} & c_{-1,1} & c_{0,1} & c_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{0,0} & 0 & 0 & c_{-1,1} & c_{0,1} & c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{0,0} & 0 & 0 & c_{-1,1} & c_{0,1} & c_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{0,0} & 0 & 0 & c_{-1,1} & c_{0,1} & c_{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Лемма 1. *Задача (1), (2) разрешима для всех $\varphi(x)$ и $g(x)$ тогда и только тогда, когда для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ определители $\Delta_{m,j}$ отличны от нуля.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 в [6], только вместо $\mathbb{Z}_+$ нужно взять множество S_ν.

В определителях $\Delta_{m,j}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, отвечающих за разрешимость задачи Коши, присутствуют все коэффициенты c_ω характеристического многочлена $P(z)$. Покажем, что разрешимость задачи (4), (5) зависит в действительности только от коэффициентов главного символа оператора $P_d(\delta)$.

Обозначим

$$J'_q = \{y \in K \cap \mathbb{Z}^n : \langle \nu, y\rangle = s_q\}, \quad I'_q = \{x \in K \cap \mathbb{Z}^n : \langle \nu, x\rangle = s_q - \langle \nu, m\rangle\},$$

$$I'_{m,q} = \{\mu \in X_m : \langle \nu, \mu\rangle = s_q\}.$$

Нетрудно видеть, что $\#I'_q + \#I'_{m,q} = \#J'_q = N'_q$, где N'_q — число целых неотрицательных решений уравнения $\langle \nu, y\rangle = s_q$. Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{j} N'_{s_i} = N_{s_j}$ — число целых неотрицательных решений неравенства $\langle \nu, y\rangle \le s_j$.

Для $s_q \in S_\nu$, $q \le j$, обозначим через $D_{m,q}$ миноры определителя $\Delta_{m,q}$, составленные из его строк, соответствующих уравнениям

$$\sum_{\omega \in \Omega} c_\omega f(x+\omega) = g(x), \quad x \in I'_q,$$

$$f(\mu) = \varphi(\mu), \quad \mu \in I'_{m,q},$$

и столбцов, соответствующих неизвестным $f(y)$, где $y \in J'_q$.

Отметим, что в определителях $D_{m,q}$ присутствуют только коэффициенты главного символа оператора $P_d(\delta)$.

Пример 2. Для разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$, рассмотренного в примере 1, для $q = 0, 1, 2$ имеем

$$D_{(0,1),0} = 1, D_{(0,1),1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{-1,1} & c_{0,1} & c_{1,1} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_{(0,1),2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{-1,1} & c_{0,1} & c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{-1,1} & c_{0,1} & c_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & c_{-1,1} & c_{0,1} & c_{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Связь между определителями $\Delta_{m,s}$ и $D_{m,q}$ дается следующей леммой.

Лемма 2. *Для всякого $j \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство*

$$\Delta_{m,j} = \prod_{s_q \in S_\nu,\, q \le j} D_{m,q}.$$

Доказательство см. в [6, лемма 1].

Из лемм 1 и 2 сразу следует

Лемма 3. *Задача (4), (5) разрешима для всех $\varphi(x)$ и $g(x)$ тогда и только тогда, когда $D_{m,j} \ne 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$.*

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 2 имеем

$$\Delta_{m,j} = \prod_{s_q \in S_\nu,\, q \le j} D_{m,q},$$

где $D_{m,q}$ — главные миноры определителя $\Delta_{m,j}$ порядка N'_q. Определители $D_{m,q}$ зависят только от коэффициентов c_ω главного символа оператора $P_d(\delta)$. У определителя $\Delta_{m,j}$ на главной диагонали стоят единицы и выделенный коэффициент c_m. Действительно, при определенном в начале § 2 способе упорядочения неизвестных $f(y)$ и уравнений (4), (5) «номер» уравнения из (5) кодируется элементом $\mu \in I_{m,j}$. В строке определителя $\Delta_{m,j}$ с номером, который имеет точка μ, единственным ненулевым (равным единице) элементом будет коэффициент при неизвестной $f(\mu)$, у этой неизвестной номер тот же, что и у точки $\mu \in J_j$. Поэтому этот ненулевой элемент лежит на диагонали определителя.

В строке определителя $\Delta_{m,j}$ с номером, который имеет точка $x \in I_j$, на диагонали стоит элемент c_m. Это объясняется тем, что в соответствии со способом упорядочения точка x имеет тот же номер, что и неизвестная $f(x+m)$, коэффициент при которой в (4) равен c_m.

Если выполнено условие (3), то $D_{m,q}$ являются определителями матриц с диагональным преобладанием (говорят, что квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ *обладает свойством диагонального преобладания*, если $|a_{ii}| > \sum\limits_{j \ne i} |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \ldots, n$), поэтому $D_{m,q} \ne 0$ (см. например, [16]). По лемме 3 задача (4), (5) разрешима для любого j, что и означает разрешимость задачи (1), (2). □

§ 3. Устойчивость задачи Коши

В данном параграфе рассматривается проблема устойчивости задачи Коши (1), (2). Она тесно связана со свойствами фундаментального решения, так как всякое решение выражается через него и входные данные (начальные условия и правую часть уравнения, см. лемму 4). Кроме того, устойчивость эквивалентна абсолютной суммируемости фундаментального решения (лемма 5). В условиях теоремы 2 фундаментальное решение составят коэффициенты разложения в ряд Лорана функции $\frac{1}{P(z)}$. Леммы 6, 7 потребуются для исследования сходимости этого ряда.

Заметим, что условие (3) обеспечивает разрешимость задачи Коши, но не является достаточным для устойчивости. Например, рассмотрим разностное уравнение

$$f(x+1,y+1)-3f(x,y+1)+f(x-1,y+1)+f(x,y)=g(x,y),\ (x,y)\in K\cap\mathbb{Z}^2,$$

где K — конус, порожденный векторами $(1,1)$ и $(-1,1)$, а начальные данные равны $f(k,k)=f(-k,k)=1$, $k=0,1,2,\dots$. Положим

$$g(x)=\begin{cases}-3, & \text{если } x=0,\\ -1, & \text{если } x\neq 0.\end{cases}$$

Если $\nu=(0,1)$, то $d=1$. Точка $m=(0,1)$ удовлетворяет условию (3), и эта задача имеет единственное решение

$$f(x,y)=y+1-|x|,$$

но она не является устойчивой, поскольку решение не ограничено: $f(0,y)=y+1$.

Фундаментальным решением задачи (1), (2) называется решение $\mathscr{P}_m(x)$ разностного уравнения (1) с правой частью

$$g(x)=\delta_0(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\neq 0,\\ 1, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

такое, что $\mathscr{P}_m(x)=0$ для $x\in X_m$.

Лемма 4. *Если задача* (1), (2) *разрешима для любых* $g(x)$ *и* $\varphi(x)$, *то для* $x\in K\cap\mathbb{Z}^n$ *ее решение можно записать в виде*

$$f(x)=\sum_{y\in X_m}\varphi(y)\sum_{\mu\not\leq_K y}c_\mu\mathscr{P}_m(x+\mu-y)+\sum_{y\in K\cap\mathbb{Z}^n}g(y)\mathscr{P}_m(x-y),\tag{8}$$

где $\mathscr{P}_m$ *— фундаментальное решение задачи* (1), (2). *При этом для любого фиксированного* $x\in K\cap\mathbb{Z}^n$ *число слагаемых в суммах правой части формулы* (8) *конечно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 в [6], только вместо $\mathbb{R}^n_+$ нужно взять рациональный конус K.

Функция дискретного аргумента $f(x)$, $x\in X$, называется *абсолютно суммируемой*, если ряд $\sum\limits_{x\in X}|f(x)|$ сходится.

Лемма 5. *Задача Коши* (1), (2) *устойчива тогда и только тогда, когда ее фундаментальное решение* $\mathscr{P}_m(x)$, $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$, *абсолютно суммируемо.*

Доказательство. Необходимость. Найдем решение задачи (1), (2) для начальных данных $\varphi(x) \equiv 0$ и правой части $g(x)$, построенной для произвольного фиксированного $x_1 \in K \cap \mathbb{Z}^n$ следующим образом:

$$g_{x_1}(x) = \begin{cases} \frac{\overline{\mathscr{P}_m(x_1-x)}}{|\mathscr{P}_m(x_1-x)|}, & \text{если } \mathscr{P}_m(x_1-x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mathscr{P}_m(x_1-x) = 0. \end{cases}$$

Согласно лемме 4 для решения $f_{x_1}(x)$ задачи (1), (2) с этими входными данными имеем

$$f_{x_1}(x) = \sum_{y \in K \cap \mathbb{Z}^n} g_{x_1}(y) \mathscr{P}_m(x-y).$$

При $x = x_1$ получим

$$f_{x_1}(x_1) = \sum_{y \in K \cap \mathbb{Z}^n} \frac{\overline{\mathscr{P}_m(x_1-y)}}{|\mathscr{P}_m(x_1-y)|} \mathscr{P}_m(x_1-y)$$
$$= \sum_{y \in K \cap \mathbb{Z}^n} |\mathscr{P}_m(x_1-y)| = \sum_{0 \underset{K}{\leq} y' \underset{K}{\leq} x_1} |\mathscr{P}_m(y')|.$$

Так как $\|\varphi\| = 0$ и $\|g_{x_1}\| \leq 1$, в силу устойчивости задачи (1), (2) получим

$$|f_{x_1}(x_1)| = \sum_{0 \leq y' \leq x_1} |\mathscr{P}_m(y')| \leq C$$

для некоторого $C > 0$ и произвольного $x_1 \in K \cap \mathbb{Z}^n$.

Достаточность. По лемме 4 $f(x) = f_0(x) + f^*(x)$, где

$$f_0(x) = \sum_{y \in X_m} \varphi(y) \sum_{\mu \underset{K}{\not\leq} y} c_\mu \mathscr{P}_m(x+\mu-y)$$

— решение однородной задачи Коши (1), (2) и

$$f^*(x) = \sum_{y \in K \cap \mathbb{Z}^n} g(y) \mathscr{P}_m(x-y)$$

— решение неоднородной задачи Коши с нулевыми начальными данными.

Обозначим $C_1 = \max\limits_{\omega \in \Omega} |c_\omega|$ и оценим $|f_0(x)|$ и $|f^*(x)|$:

$$|f_0(x)| \leq \sum_{y \in X_m} |\varphi(y)| \sum_{\mu \underset{K}{\not\leq} y} |c_\mu| |\mathscr{P}_m(x+\mu-y)|$$
$$\leq C_1 \|\varphi\| \sum_{y \in X_m} \sum_{\mu \underset{K}{\not\leq} y} |\mathscr{P}_m(x+\mu-y)| \leq C_1 \|\varphi\| \sum_{0 \underset{K}{\leq} y \underset{K}{\leq} x+m} |\mathscr{P}_m(y)|.$$

Далее,

$$|f^*(x)| \leq \sum_{y \in K \cap \mathbb{Z}^n} |g(y)| |\mathscr{P}_m(x-y)| \leq \|g\| \sum_{0 \underset{K}{\leq} y \underset{K}{\leq} x} |\mathscr{P}_m(y)|.$$

Так как фундаментальное решение абсолютно суммируемо, т. е.

$$\sum_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} |\mathscr{P}_m(x)| \le C_2$$

для некоторого $C_2 > 0$, тем самым

$$\|f\| \le C_1\|\varphi\|C_2 + \|g\|C_2 \le C(\|\varphi\| + \|g\|). \quad \square$$

Для доказательства теоремы 2 потребуются два дополнительных утверждения, касающиеся сходимости рядов Лорана с носителями в рациональных конусах.

Пусть $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{C}^n$. Рассмотрим ряд геометрической прогрессии с носителем в рациональном конусе K. Пусть

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{Z}^n : x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n,\ \lambda_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, n\}$$

— подрешетка решетки $\mathbb{Z}^n$, порожденная векторами $a^1, \dots, a^n$. Пусть $\tau = a^1 + \dots + a^n$ и $\Pi_\tau = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\le} x \underset{K}{<} \tau\}$ — полуоткрытый параллелотоп. Обозначим через $\{v\}$ множество точек v с целыми координатами, лежащими в параллелотопе Π_τ. Очевидно, что

$$\bigcup_{v\in\Pi_\tau\cap\mathbb{Z}^n} (v + \Lambda) = \mathbb{Z}^n.$$

Лемма 6. *Геометрическая прогрессия* $\sum\limits_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} q^x$ *сходится для* q *таких, что* $|q^{a^j}| < 1$, $j = 1, \dots, n$, *и ее сумма равна*

$$\sum_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} q^x = \Big(\sum_{v\in\Pi_\tau\cap\mathbb{Z}^n} q^v\Big) \prod_{i=1}^n (1 - q^{a^i})^{-1}.$$

Доказательство. Действительно, так как $\bigcup\limits_{v\in\Pi_\tau\cap\mathbb{Z}^n} (v + \Lambda) = \mathbb{Z}^n$ и $x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, имеем

$$\sum_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} q^x = \sum_{v\in\Pi_\tau\cap\mathbb{Z}^n} \sum_{x\in K\cap\Lambda} q^{v+x} = \sum_{v\in\Pi_\tau\cap\mathbb{Z}^n} q^v \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n_+} q^{\lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n}.$$

При $|q^{a^j}| < 1$, $j = 1, \dots, n$, ряд $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}^n_+} (q^{a^1})^{\lambda_1} \dots (q^{a^n})^{\lambda_n}$ сходится, а значит,

$$\sum_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} q^x = \Big(\sum_{v\in\Pi_\tau\cap\mathbb{Z}^n} q^v\Big) \prod_{i=1}^n (1 - q^{a^i})^{-1}. \quad \square$$

Сформулируем вариант леммы Абеля (см. [17]) для рядов Лорана с носителями в рациональном конусе. Обозначим через $\operatorname{Int} K^*$ внутренность двойственного конуса.

Лемма 7. *Если члены ряда Лорана* K

$$\sum_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} \frac{f(x)}{z^x} \tag{9}$$

с носителями в рациональном конусе ограничены в точке z_0, то ряд сходится для всех z таких, что $z \in \operatorname{Int}(z_0 + \operatorname{Log}^{-1} K^*)$.

Доказательство. Пусть $\left\{\frac{f(x)}{z_0^x}\right\}_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n}$ ограничено числом $M > 0$ и $x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$. Тогда

$$\left|\frac{f(x)}{z^x}\right| = \left|\frac{f(x)}{z_0^x}\right| \left|\frac{z_0^x}{z^x}\right| \le M \left|\frac{z_0^{\lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n}}{z^{\lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n}}\right| \le M |(q^{a^1})^{\lambda_1} \dots (q^{a^n})^{\lambda_n}|,$$

где $q = \left(\frac{z_0}{z}, \dots, \frac{z_0}{z}\right)$. При $|q^{a^j}| < 1$, $j = 1, \dots, n$, по лемме 6 ряд (9) сходится абсолютно, т. е. сходится абсолютно для z таких, что $\left|z_0^{a^j}\right| < |z^{a^j}|$, $j = 1, \dots, n$. После логарифмирования получим, что ряд сходится для z, удовлетворяющих системе неравенств $\langle \operatorname{Log} z, a^j \rangle > \langle \operatorname{Log} z_0, a^j \rangle$, $j = 1, \dots, n$. Это значит, что $\operatorname{Log} z \in \operatorname{Int}(\operatorname{Log} z_0 + K^*)$, или $z \in \operatorname{Int}(z_0 + \operatorname{Log}^{-1} K^*)$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Заметим, что условие теоремы 2 на точку $m \in \Omega$ означает, что m — вершина многогранника Ньютона N_P. Действительно, пусть m не является вершиной многогранника Ньютона. Так как $m \in \Omega$, то m лежит или во внутренности многогранника, или на его ненулевой грани Γ. Поэтому размерность C_m будет равна $n - \dim \Gamma$ (см. [13, с. 46]), т. е. меньше n (в первом случае C_m равен $\{0\}$). Значит, C_m не может содержать конус K^*, поскольку он n-мерный.

В частности, из того, что m — вершина многогранника Ньютона, следует, что соответствующая компонента дополнения E_m амебы непустая. Кроме того, так как $|m|_\nu = d$, главный символ разностного оператора состоит из одного слагаемого $P_d(\delta) = c_m \delta^m$. Значит, условия теоремы 1 выполнены, т. е. решение задачи Коши существует и единственно. Заметим также, что из условий теоремы 2 следует $N_P \subset \Pi_m = \{t : 0 \underset{K}{\le} t \underset{K}{\le} m\}$.

Покажем, что условие $K^* \subset C_m$ на точку m многогранника Ньютона N_P обеспечивает не только существование и единственность (по теореме 1) фундаментального решения задачи Коши, но и возможность его конструктивного построения. Действительно, характеристический многочлен можно записать следующим образом: $P(z) = \sum\limits_{0 \underset{K}{\le} \omega \underset{K}{\le} m} c_\omega \delta^\omega$, и разложить рациональную функцию $\frac{1}{P(z)}$ в ряд Лорана

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{c_m z^m + \sum\limits_{\omega \ne m} c_\omega z^\omega} = \frac{1}{c_m z^m \left(1 - \sum\limits_{\omega \ne m} \frac{\tilde{c}_\omega}{z^{m-\omega}}\right)}.$$

Так как $\omega \underset{K}{\le} m$, имеем $m - \omega \underset{K}{\ge} 0$, т. е. $m - \omega \in K \cap \mathbb{Z}^n$, тогда

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{c_m z^m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\omega \ne m} \frac{\tilde{c}_\omega}{z^{m-\omega}}\right)^k = \sum_{x \in m + K_m} \frac{\widetilde{\mathscr{P}}_m(x)}{z^x}.$$

Отметим, что $\widetilde{\mathscr{P}}_m(x)|_{X_m} = 0$ и $\operatorname{supp} \widetilde{\mathscr{P}}_m(x) \subset m + K_m$, где K_m — конус, построенный на векторах $m - \omega$, $\omega \in \Omega$, $K_m \subset K$. Полученный ряд сходится в области $\mathscr{E} \subset \mathbb{C}^n$ такой, что $\operatorname{Log} \mathscr{E} = E_m$ (см. [13]). Учитывая, что $K_m \subset K$, запишем разложение в ряд следующим образом:

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{x \underset{K}{\ge} 0} \frac{\widetilde{\mathscr{P}}_m(x)}{z^x}.$$

Покажем, что коэффициенты $\widetilde{\mathscr{P}}_m(x)$ разложения в ряд функции $\frac{1}{P(z)}$ являются фундаментальным решением задачи (1), (2). Домножим последнее равенство на $P(z)$ и с учетом $\widetilde{\mathscr{P}}_m(x)|_{X_m} = 0$ получим тождество

$$1 = \Bigl(\sum_{0 \underset{K}{\leq} \omega \underset{K}{\leq} m} c_\omega z^\omega\Bigr)\Bigl(\sum_{x \underset{K}{\ngeq} \omega} \frac{\widetilde{\mathscr{P}}_m(x)}{z^x} + \sum_{x \underset{K}{\geq} \omega} \frac{\widetilde{\mathscr{P}}_m(x)}{z^x}\Bigr)$$

$$= \sum_{0 \underset{K}{\leq} \omega \underset{K}{\leq} m} c_\omega \sum_{x \underset{K}{\geq} \omega} \frac{\widetilde{\mathscr{P}}_m(x)}{z^{x-\omega}} = \sum_{0 \underset{K}{\leq} \omega \underset{K}{\leq} m} c_\omega \sum_{x \underset{K}{\geq} 0} \frac{\widetilde{\mathscr{P}}_m(x+\omega)}{z^x}$$

$$= \sum_{x \underset{K}{\geq} 0} \sum_{0 \underset{K}{\leq} \omega \underset{K}{\leq} m} \frac{c_\omega \widetilde{\mathscr{P}}_m(x+\omega)}{z^x}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z^x, $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$, найдем, что $\sum\limits_{\omega} c_\omega \widetilde{\mathscr{P}}_m(x) = \delta_0(x)$, поэтому в силу единственности решения задачи Коши (1), (2) коэффициенты разложения в ряд Лорана функции $\frac{1}{P(z)}$ совпадают с ее фундаментальным решением $\mathscr{P}_m(x)$.

Необходимость. По условию теоремы задача Коши устойчива, поэтому по лемме 5 числовой ряд $\sum\limits_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} |\mathscr{P}_m(x)|$ сходится. Отсюда и из равенства $\widetilde{\mathscr{P}}_m(x) = \mathscr{P}_m(x)$, доказанного выше, следует, что ряд Лорана $\sum\limits_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} \frac{\mathscr{P}_m(x)}{\xi^x}$ сходится для всех ξ таких, что $|\xi_j| = 1$, $j = 1, \dots, n$, к функции $\frac{1}{P(\xi)}$, т. е. $P(\xi) \neq 0$. По лемме 7 этот ряд сходится и в области $\operatorname{Int}(\xi + \operatorname{Log}^{-1} K^*)$, поскольку $K^* \subset C_m$ по условию. Поэтому $\operatorname{Int}(\operatorname{Log}\xi + K^*) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{Log}\xi + C_m) \subset E_m$ и $0 = \operatorname{Log}\xi \in E_m$.

Достаточность. Обратно, если $0 \in E_m$, то найдется точка $\xi \in \mathscr{E} = \operatorname{Log}^{-1} E_m$ такая, что $|\xi_j| = 1$, $j = 1, \dots, n$, в которой ряд $\sum\limits_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} \frac{\mathscr{P}_m(x)}{\xi^x}$ сходится абсолютно, т. е. фундаментальное решение абсолютно суммируемо. Тогда по лемме 5 задача (1), (2) устойчива.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н.* Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО, 2009.
2. *Brion M., Vergne M.* Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes // J. Amer. Math. Soc. 1997. V. 10, N 4. P. 797–833.
3. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: КомКнига, 2006.
4. *Лейнартас Е. К.* Устойчивость задачи Коши для многомерного разностного оператора и амеба характеристического множества // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1087–1095.
5. *Bousquet-Mélou M., Petkovšek M.* Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case // Discrete Math. 2000. V. 225, N 2. P. 51–75.
6. *Лейнартас Е. К., Рогозина М. С.* Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора и мономиальные базисы факторов в кольце полиномов // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 111–121.
7. *Nekrasova T. I.* On the Cauchy problem for multidimensional difference equations in rational cone // J. Sib. Feder. Univ. 2015. V. 8, N 2. P. 184–191.
8. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
9. *Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
10. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984.
11. *Даджион Д., Мерсеро О.* Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988.

12. *Цих А. К.* Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфных функций двух переменных // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 11. С. 1588–1612.
13. *Forsberg M., Passare M., Tsikh A.* Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Adv. Math. 2000. V. 151. P. 45–70.
14. *Садыков Т. М., Цих А. К.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014.
15. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
16. *Шарый С. П.* Курс вычислительных методов. Новосибирск: НГУ, 2012.
17. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ: функции нескольких переменных. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 13 декабря 2015 г.

Яковлева Татьяна Игоревна
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
t.neckrasova@gmail.com