Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 517.53/57

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ H_p, $0 < p < \infty$

Х. Х. Бурчаев, В. Г. Рябых, Г. Ю. Рябых

Аннотация. Доказывается, что если функция в задании линейного функционала над пространством Харди аналитична в круге радиуса, большего единицы, то экстремальная функция этого функционала аналитична в том же круге.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.303

Ключевые слова: пространство Харди, линейный функционал, экстремальная функция, единственность, производная.

§ 1. Введение

Пусть $0 < p < \infty$, A — множество всех функций, аналитических в $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, и

$$H_p = \left\{ \varphi \in A : \sup_{0<\rho<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(\rho e^{i\theta})|^p d\theta = \|\varphi\|_p^p < \infty \right\}$$

— пространства Харди в единичном круге Δ (если $1 \le p < \infty$, то $\|\bullet\|_p$ — норма в H_p).

Обозначим через l линейный функционал над H_p, $1 \le p < \infty$, определяемый формулой (всюду в дальнейшем $t = e^{i\theta}$)

$$l(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t)\overline{\omega}(t)\, d\theta, \quad \psi \in H_p, \tag{1.1}$$

где $\omega \in H_q$, $1/p + 1/q = 1$.

Назовем функцию $F \in H_p$ *экстремальной* для функционала l, если $l(F) = \|l\|$ и $\|F\|_p = 1$.

Известно, что экстремальная функция функционала (1.1) при $p \in (0, \infty)$ существует и единственна, а при $p = 1$ существует по крайней мере для $\omega \in C(\overline{\Delta}) \cap H_\infty$ (см., например, [1, 2]). В общей постановке нас интересует вопрос, как изменения в регулярности функции ω в функционале (1.1) скажутся на свойствах соответствующей экстремальной функции F.

В настоящей работе рассматривается случай, когда в функционале (1.1) функция ω аналитична в круге $\Delta(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $1 < R < \infty$. Аналогичная задача изучается относительно линейного функционала над пространством H_p при $0 < p < 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–00331).

Поставленная задача относится к типу экстремальных задач, изученных в [3, 4] при более жестких ограничениях на функцию ω в задании функционала (1.1).

Пусть $T = \{t : |t| = 1\}$ и $\Lambda_\alpha A = \{b \in C(\overline{\Delta}) \cap A : b(t) \in \operatorname{Lip}\alpha,\ 0 < \alpha < 1\}$. Впервые (в 1972 г.) в [3] было установлено, что принадлежность экстремальных функций линейных функционалов над H_1 вида (1.1) тому или иному классу зависит от определенных свойств функций ω, образующих эти функционалы. Процитируем один из результатов в [3]: если в функционале (1.1) $p = 1$ и $\omega \in \Lambda_\alpha A$, $0 < \alpha < 1$, то $F \in \Lambda_\alpha A$.

Статья [4] о качественных свойствах экстремальных функций линейных функционалов над H_p, $1 < p < \infty$, была опубликована в 2006 г. Приведем из этой статьи аналог цитируемой выше теоремы: если в функционале (1.1) $1 < p \le 2$ и $\omega \in \Lambda_\alpha A$, $0 < \alpha < 1$, то $F \in \Lambda_\alpha A$. В той же статье, в частности, установлено: если в функционале (1.1) $1 < p < \infty$ и $\omega \in \Lambda_\alpha A$, $0 < \alpha < 1$, то $|F_*(t)|^p \in \operatorname{Lip}\alpha$, где F_* — внешняя функция функции F.

В данной работе поставленная задача в случае $1 < p < \infty$ решается методом погружения H_p в более широкий класс. Случай $0 < p \le 1$ сводится к предыдущему с помощью интегральной формулы Коши. Указанный подход к решению поставленной задачи существенно отличается от методов, примененных ранее в исследовании подобных экстремальных задач в пространствах аналитических функций. Он находит применение в изучении аналогичной задачи в пространствах функций, близких к H_p (см., например, [5]).

Отметим, что если $0 < p < 1$, то H_p является метрическим пространством с инвариантной метрикой $d(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_p^p$. Если функция g аналитична в $\Delta(R)$, $0 < p \le 1$, то соотношением

$$L(f) = \lim_{\rho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho t)\bar{g}(t)\, d\theta, \quad f \in H_p, \tag{1.2}$$

определяется линейный функционал L над пространством H_p (для $0 < p < 1$ это следует из теоремы об общей форме элементов пространства $(H_p)^*$, сопряженного H_p, $0 < p < 1$ (см. [6]); случай $p = 1$ сводится к функционалу вида (1.1), $p = 1$).

Всюду в дальнейшем $A(R)$ ($A(\mathbb{C})$) — множество всех функций, аналитических в $\Delta(R)$ ($\mathbb{C}$), $1 < R < \infty$; $\varphi_\rho(z) = \varphi(\rho z)$, где $0 < \rho < 1$, $\varphi \in A$.

Напомним, что $\varphi \in H_p$ имеет почти всюду на T граничные значения $\varphi(t)$ по некасательным путям: $\|\varphi\|_{L_p(T)} = \|\varphi\|_p$. Функция $\|\varphi_\rho\|_p$ неубывающая относительно $\rho \in (0,1)$, $\|\varphi - \varphi_\rho\|_p \to 0$, $\|\varphi_\rho\|_p \to \|\varphi\|_{L_p(T)}$ при $\rho \to 1$.

Нам понадобится теорема о двойственной связи двух различных экстремальных задач (см., например, [7, теорема 4.1]). Имея в виду дальнейшее применение этой теоремы, сформулируем ее, следуя [8, гл. 4, теорема 1.2] (там же и в [7] имеются сведения по истории вопроса).

Теорема A. *Пусть в функционале* (1.1) $1 < p < \infty$ *и* $\omega \in H_q$. *Тогда справедливо равенство* ($\|\bullet\|_q = \|\bullet\|_{L_q(T)}$)

$$\|l\| = \sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(t)\overline{\omega}(t)\, d\theta\right| : \|\psi\|_p \le 1\right\}$$
$$= \inf\left\{\|\overline{\omega} - a\|_q : a \in H_q^0 = \{a \in H_q : a(0) = 0\}\right\}.$$

Существуют единственные функции $F \in H_p$, $\|F\|_p = 1$, и $X \in H_q^0$, для которых

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\,\overline{\omega}\,d\theta = \|\overline{\omega} - X\|_q = \|l\|. \tag{i}$$

Последнее равенство равносильно выполнению почти всюду на T соотношения

$$\frac{|F(t)|^p}{F(t)} = \frac{\overline{\omega}(t)}{\|l\|} - \frac{X(t)}{\|l\|}. \tag{ii}$$

Кратко изложим содержание статьи. В § 2 вводится понятие одного пространства функций (пространство $\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$), которое в дальнейшем используется в качестве вспомогательного. Затем доказаны дополнительные теоремы 2.1–2.3 о свойствах экстремальных функций линейных функционалов специального вида над пространством $\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$, $1 < p < \infty$. После доказательства теоремы 2.1 проводится согласование ряда обозначений. В § 3 изложены основные результаты работы. В теореме 3.1 доказано, что если в функционале (1.1) $1 < p < \infty$ и ω — полином, то экстремальная функция F принадлежит $A(\mathbb{C})$. Теорема 3.2 обобщает теорему 3.1 на случай $\omega \in A(R)$ в (1.1). Теорема 3.3 обобщает теорему 3.2 относительно функционала (1.2). В следствии 3.1 доказано, что если в функционале (1.1) $2 < p < \infty$ и $\omega \in A(R)$, то $X \in A(R)$.

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение работ [4, 5].

§ 2. Вспомогательные предварительные теоремы

Пусть $0 < \alpha < \infty$, $0 < \delta < 1$ и $1 < p < \infty$. К пространству $\Lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$ отнесем совокупность всех функций $f \in A$ (аналитических в Δ), наделенных конечной нормой

$$\|f\|_p^{(\delta)} = \sup_{\delta<\rho<1} (1-\rho)^\alpha \|f_\rho\|_p.$$

Соответственно пусть

$$\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)} = \bigl\{f \in \Lambda_{\alpha,p}^{(\delta)} : (1-\rho)^\alpha \|f_\rho\|_p \to 0 \text{ при } \rho \to 1\bigr\}.$$

Если $f \in H_p$, то, очевидно, $f \in \lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$, при этом $\|f\|_p^{(\delta)} \le \|f\|_p$, т. е. пространства H_p вложены в пространства $\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$. Пространство $\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$ является замкнутым подпространством пространства $\Lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$, не совпадающим с $\Lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$ (например, функция $\frac{1}{(1-z)^{1/p+\alpha}}$ принадлежит $\Lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$, но не принадлежит $\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$; замкнутость получаем с помощью неравенства треугольника). Как нетрудно видеть, пространства $\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$ вложены в пространства $\lambda_{\beta,p}^{(\delta)}$ при $0 < \alpha < \beta < \infty$.

Обозначим через $l_\alpha^{(\delta)}$ линейный функционал над $\Lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$, заданный соотношением

$$l_\alpha^{(\delta)}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-\delta)^\alpha f(\delta t)\bar{g}(t)\,d\theta, \quad f \in \Lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}, \tag{2.1}$$

где $g \in H_q$, $1/p + 1/q = 1$ (не затрагиваем вопрос об общей форме элементов пространства $\bigl(\Lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}\bigr)^*$, сопряженного к $\Lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$; ограниченность функционала (2.1) получаем с помощью неравенства Гёльдера).

Функцию $F^{(\delta)} \in \Lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$ называем *экстремальной* для функционала $l^{(\delta)}_\alpha$, если $\|l^{(\delta)}_\alpha\| = l^{(\delta)}_\alpha(F^{(\delta)})$, $\|F^{(\delta)}\|^{(\delta)}_p = 1$ (подразумевается, что $F^{(\delta)}$ зависит и от параметра α).

Пусть $F^{(\delta)}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — экстремальная функция функционала (2.1), a_k — тейлоровы коэффициенты, $F^{(\delta)} = f^N + R^N$, где $f^N(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^k$, $R^N(z) = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k z^k$, и $E_N = \Big\{x \in \Lambda^{(\delta)}_{\alpha,\rho} : x(z) = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} x_k z^k\Big\}$.

Теорема 2.1. *Пусть в функционале* (2.1) $g(z)$ — *полином. Тогда экстремальная функция существует, единственна и принадлежит* $\lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — максимизирующая последовательность для нормы функционала (2.1), т. е. $f_n \in \Lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$, $\|f_n\| \le 1$, причем $l^{(\delta)}_\alpha(f_n) \to \|l^{(\delta)}_\alpha\|$, $n \to \infty$. Так как последовательность $\{(1-\rho)^\alpha f_n(\rho z)\}$ ограничена в H_p, она компактна относительно сходимости внутри Δ (см., например, [9, теорема 3.12]), значит, такова и последовательность $\{f_n(z)\}$. Пусть сама последовательность $f_n(z)$ стремится к $\Psi(z) \in A$, $n \to \infty$, тогда из условия $\|f_n\|^{(\delta)}_p \le 1$ следует, что $\|\Psi\|^{(\delta)}_p \le 1$. Из равенства

$$\lim_{n\to\infty} l^{(\delta)}_\alpha(f_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1-\delta)^\alpha \Psi(\delta\, t)\,\bar g(t)\,d\theta = \|l^{(\delta)}_\alpha\| \tag{2.2}$$

вытекает, что $\|\Psi\|^{(\delta)}_p = 1$, т. е. $\Psi(z) = F^{(\delta)}(z)$ — экстремальная функция функционала (2.1).

Пусть в (2.1) $g(z)$— полином N-й степени. Тогда согласно равенству (2.2) $\Psi = F^{(\delta)}$ имеем $l^{(\delta)}_\alpha(F^{(\delta)}) = l^{(\delta)}_\alpha(f^N) = \|l^{(\delta)}_\alpha\| = l^{(\delta)}_\alpha(f^N + Q)$, $Q \in E_N$. Поэтому норма экстремальной функции $F^{(\delta)}$

$$\|F^{(\delta)}\|^{(\delta)}_p = \|f^N + R^N\|^{(\delta)}_p = \inf\big\{\|f^N + Q\|^{(\delta)}_p : Q \in E_N\big\}.$$

При этом нижняя грань в правой части предыдущего равенства достигается по крайней мере на R^N. Установим единственность экстремальной функции. Допустим, что существует последовательность $\{\rho_j\} \in [\delta,1)$, $\rho_j \to 1$ при $j \to \infty$, такая, что $\|F^{(\delta)}\|^{(\delta)}_p = \lim\limits_{j\to\infty}(1-\rho_j)^\alpha \big\|F^{(\delta)}_{\rho_j}\big\|_p$. Последнее равносильно равенству

$$1 = \inf\big\{\|f^N + Q\|^{(\delta)}_p : Q \in E_N\big\} = \inf_{Q\in E_N}\sup_{\delta<\delta_*<\rho<1}\big\{(1-\rho)^\alpha \big\|f^N_\rho + Q_\rho\big\|_p\big\}.$$

Отсюда с учетом произвольности δ_*: $\delta < \delta_* < 1$ следует

$$1 \le \sup\big\{(1-\rho)^\alpha\big\|f^N_\rho\big\|_p : \delta_* < \rho < 1\big\} \to 0, \quad \delta_* \to 1,$$

что приводит к противоречию. Поэтому супремум непрерывной в $[\delta,1)$ функции

$$I_\alpha(\rho) = (1-\rho)^\alpha\big\|F^{(\delta)}_\rho\big\|_p$$

достигается только в точках, принадлежащих сегменту $[\delta,\nu]$, $\nu < 1$. Пусть функция $Y^{(\delta)}(z)$ также экстремальна для (2.1), тогда и функция $(F^{(\delta)}(z) +$

$Y^{(\delta)}(z))/2$ экстремальна для (2.1). Значит, существует $r_* \in [\delta, 1)$ такое, что $(1-r_*)^\alpha \big\| \frac{F^{(\delta)}_{r_*} + Y^{(\delta)}_{r_*}}{2} \big\|_p = 1$. Отсюда с учетом

$$(1-r_*)^\alpha \big\| F^{(\delta)}_{r_*} \big\|^{(\delta)}_p \le 1, \quad (1-r_*)^\alpha \big\| Y^{(\delta)}_{r_*} \big\|^{(\delta)}_p \le 1,$$

применяя неравенство треугольника, получим

$$\frac{2}{(1-r_*)^\alpha} = \big\| F^{(\delta)}_{r_*} + Y^{(\delta)}_{r_*} \big\|_p \le \big\| F^{(\delta)}_{r_*} \big\|_p + \big\| Y^{(\delta)}_{r_*} \big\|_p \le \frac{2}{(1-r_*)^\alpha},$$

т. е. имеет место равенство $\big\| F^{(\delta)}_{r_*} + Y^{(\delta)}_{r_*} \big\|_p = \big\| F^{(\delta)}_{r_*} \big\|_p + \big\| Y^{(\delta)}_{r_*} \big\|_p$. Но пространство H_p, $1 < p < \infty$, строго нормированное (как подпространство строго нормированного пространства $L_p(T)$, $1 < p < \infty$). Поэтому $F^{(\delta)}(r_* t) = Y^{(\delta)}(r_* t)$ почти всюду на T. Тогда $F^{(\delta)}(z) = Y^{(\delta)}(z)$ в силу аналитичности и экстремальная функция единственна.

Для завершения доказательства осталось установить, что $F^{(\delta)} \in \lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$. С учетом того, что $\sup\limits_{\delta \le \rho < 1} I_\alpha(\rho) = \|F^{(\delta)}\|^{(\delta)}_P$ достигается только в точках из $[\delta, \nu]$, $\nu < 1$, и $\big\| F^{(\delta)}_r \big\|^{(\delta)}_p \le \|F^{(\delta)}\|^{(\delta)}_p$ для $r \in [\delta, 1)$, $F^{(\delta)}_r \to F^{(\delta)}$ внутри Δ при $r \to 1$, заключаем, что

$$\big\| F^{(\delta)}_r \big\|^{(\delta)}_p = \big\| f^N_r + R^N_r \big\|^{(\delta)}_p \to \|F^{(\delta)}\|^{(\delta)}_p$$

при $r \to 1$. Так как f^N — полином и $f^N_r \to f^N$ в $\Lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$ при $r \to 1$, в силу непрерывности нормы

$$\big\| f^N + R^N_r \big\|^{(\delta)}_p = \big\| F^{(\delta)} + \big(R^N_r - R^N\big) \big\|^{(\delta)}_p \to \|F^{(\delta)}\|^{(\delta)}_p,$$

где $R^N_r - R^N \in E_N$. Отсюда, имея в виду, что для $F^{(\delta)}(z)$ наилучшим приближением в $\Lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$ элементами из E_N является только нуль (в силу единственности экстремальной функции), заключаем, что $R^N_r - R^N \to 0$ в $\Lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$. Далее с помощью неравенства треугольника получим

$$\big\| F^{(\delta)} - F^{(\delta)}_r \big\|^{(\delta)}_p \le \big\| f^N - f^N_r \big\|^{(\delta)}_p + \big\| R^N - R^N_r \big\|^{(\delta)}_p \to 0 \quad \text{при } r \to 1.$$

Поскольку $F^{(\delta)}_r \in \lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$ и пространство $\lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$ замкнуто, предельная функция $F^{(\delta)}$ принадлежит $\lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$. Теорема 2.1 доказана.

Согласуем обозначения, используемые в дальнейшем. Пусть

$$m(\delta) = \big\{ r \in [\delta, 1) : \|F^{(\delta)}\|^{(\delta)}_p = (1-r)^\alpha \big\| F^{(\delta)}_r \big\|_p = 1 \big\}, \quad r_\delta = \inf\{ r : r \in m(\delta) \}.$$

Если $f \in \lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$ и $x \in \mathbb{R}$, то $F^{(\delta)} + xf \in \lambda^{(\delta)}_{\alpha,p}$ и по непрерывности нормы $\|F^{(\delta)} + xf\|^{(\delta)}_p \to \|F^{(\delta)}\|^{(\delta)}_p$ при $x \to 0$. Пусть

$$r^x_f = \inf \big\{ \rho \in [\delta, 1) : \|F^{(\delta)} + xf\|^{(\delta)}_p = (1-\rho)^\alpha \big\| F^{(\delta)}_\rho + x f_\rho \big\|_p \big\},$$

$$r^\pm_f = \inf \big\{ \rho \in [\delta, 1) : \|F^{(\delta)} + xf\|^{(\delta)}_p \to (1-\rho)^\alpha \big\| F^{(\delta)}_\rho \big\|_p = \|F^{(\delta)}\|^{(\delta)}_p = 1,\ x \to \pm 0 \big\}.$$

Очевидно, что $\big\{ r^\pm_f \big\} \subseteq m(\delta)$, множества $\big\{ r^\pm_f \big\}$ и $m(\delta)$ замкнуты и содержатся в сегменте $[\delta, \nu]$, $\nu < 1$ (так как точки максимума непрерывной в $[\delta, 1]$ функции $I_\alpha(\rho) = (1-\rho)^\alpha \big\| F^{(\delta)}_\rho \big\|_p$ лежат в указанном сегменте).

Обозначим

$$\Omega^{(\delta)}(\rho,\varphi)(t)=\frac{1}{\left(\|\varphi\|_p^{(\delta)}\right)^{p/q}}\frac{|(1-\rho)^{\alpha}\varphi(\rho t)|^p}{(1-\rho)^{\alpha}\varphi(\rho t)},\quad \varphi\in\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)},\ \varphi\neq 0,$$

$$\Psi_0(t)=\Omega^{(\delta)}(r_\delta,F^{(\delta)})(t),\quad \Psi_f^{\pm}(t)=\Omega^{(\delta)}\big(r_f^{\pm},F^{(\delta)}\big)(t),$$

$$\Psi_f^{x}(t)=\Omega^{(\delta)}\big(r_f^{x},F^{(\delta)}+xf\big)(t),$$

$$W^{(\delta)}(\rho,f)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1-\rho)^{\alpha}f(\rho t)\Omega^{(\delta)}(\rho,F^{(\delta)})(t)\,d\theta\right).$$

Через $\varphi\times\Psi_f^x$ и $\varphi\times\Psi_0$, $\varphi\in\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$, обозначим линейные функционалы над $\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$, определенные формулами

$$\varphi\times\Psi_f^x=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big(1-r_f^x\big)^{\alpha}\varphi\big(r_f^x t\big)\Psi_f^x(t)\,d\theta,$$

$$\varphi\times\Psi_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1-r_\delta)^{\alpha}\varphi(r_\delta t)\Psi_0(t)\,d\theta.$$

Теорема 2.2. *Если множество $m(\delta)$ состоит из единственной точки r_*, то функция $\|F^{(\delta)}+xf\|_p^{(\delta)}$, где $f\in\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$, дифференцируема в точке $x=0$. При этом*

$$\left(\frac{d}{dx}\|F^{(\delta)}+xf\|_p^{(\delta)}\right)_{x=0}=W^{(\delta)}(r_*,f).\tag{2.3}$$

Доказательство. Следуя принятым обозначениям, имеем

$$\|F^{(\delta)}+xf\|_p^{(\delta)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big(1-r_f^x\big)^{\alpha}\big(F^{(\delta)}\big(r_f^x t\big)+xf\big(r_f^x t\big)\big)\Psi_f^x(t)\,d\theta=(F^{(\delta)}+xf)\times\Psi_f^x,$$

$F^{(\delta)}\times\Psi_0=\|F^{(\delta)}\|_p^{(\delta)}$. Так как $\big\|\Psi_f^x\big\|_q=\|\Psi_0\|_q=1$, с помощью неравенства Гёльдера получим

$$\|F^{(\delta)}\|_p^{(\delta)}\geq\big|F^{(\delta)}\times\Psi_f^x\big|,\quad \|F^{(\delta)}+xf\|_p^{(\delta)}\geq|(F^{(\delta)}+xf)\times\Psi_0|.$$

Положим

$$\Delta_{\pm}(f,x)=\frac{1}{x}\Big(\big(\|F^{(\delta)}+xf\|_p^{(\delta)}\big)^2-\big(\|F^{(\delta)}\|_p^{(\delta)}\big)^2\Big),\quad x>0\ (x<0).$$

Имея в виду предыдущие оценки и пользуясь формулой $|c+d|^2=|c|^2+2\operatorname{Re}(\bar{c}d)+|d|^2$ для комплексных c и d, приходим к оценкам ($c=F^{(\delta)}\times\Psi_f^x$, $d=x\big(f\times\Psi_f^x\big)$):

$$\begin{aligned}\Delta_-(f,x)\geq\frac{1}{x}\Big(\big|(F^{(\delta)}+xf)\times\Psi_f^x\big|^2-\big|F^{(\delta)}\times\Psi_f^x\big|^2\Big)\\ =2\operatorname{Re}\Big(\overline{\big(F^{(\delta)}\times\Psi_f^x\big)}\big(f\times\Psi_f^x\big)\Big)+x\big|f\times\Psi_f^x\big|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_-(f,x)\leq\frac{1}{x}(|(F^{(\delta)}+xf)\times\Psi_0|^2-|F^{(\delta)}\times\Psi_0|^2)\\ =2\operatorname{Re}(\overline{(F^{(\delta)}\times\Psi_0)}(f\times\Psi_0))+x|f\times\Psi_0|^2.\end{aligned}$$

Формально переходя к пределу при $x \to -0$, в силу того, что

$$F^{(\delta)} \times \Psi_f^x \to F^{(\delta)} \times \Psi_f^- = 1, \quad f \times \Psi_f^x \to W^{(\delta)}(r_f^-, f), \quad f \times \Psi_0 = W^{(\delta)}(r_\delta, f),$$

получим оценку

$$2W^{(\delta)}(r_f^-, f) \le \lim_{x \to -0} \Delta_-(f, x) \le 2W^{(\delta)}(r_\delta, f).$$

Так как $m(\delta) = r_*$, то $r_f^- = r_\delta = r_*$. Поэтому предыдущий предельный переход правомерен и последнее неравенство сводится к равенству

$$2W^{(\delta)}(r_*, f) = \left(\frac{d}{dx}\big(\|F^{(\delta)} + xf\|_p^{(\delta)}\big)^2\right)_{x=-0} = 2\left(\frac{d}{dx}\|F^{(\delta)} + xf\|_p^{(\delta)}\right)_{x=-0}.$$

Тем самым для производной слева получаем

$$\left(\frac{d}{dx}\|F^{(\delta)} + xf\|_p^{(\delta)}\right)_{x=-0} = W^{(\delta)}(r_*, f). \tag{2.4}$$

Повторяя предыдущие рассуждения относительно $\Delta_+(f, x)$, $x \to +0$, для производной справа имеем

$$\left(\frac{d}{dx}\|F^{(\delta)} + xf\|_p^{(\delta)}\right)_{x=+0} = W^{(\delta)}(r_*, f). \tag{2.5}$$

Из формул (2.4) и (2.5) следует формула (2.3). Теорема 2.2 доказана.

Замечание 2.1. Если $F_0 \in \lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$, то $\|F_0 + xf\|_p^{(\delta)}$, где $f \in \lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$, имеет односторонние производные в точке $x = 0$ (производная Гато).

Доказательство этого утверждения фактически сводится к рассуждениям, проведенным в доказательстве теоремы 2.2.

Отметим, что в правой части формулы (2.3) $W^{(\delta)}(r_*, f)$ — линейный функционал над $\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$, поэтому в левой части соответствующая производная Фреше.

Теорема 2.3. *Если в функционале* (2.1) $g(z)$ — *полином и* $m(\delta) = \delta$, *то сужение этого функционала на* $\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$ *представимо в виде*

$$l_\alpha^{(\delta)}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-\delta)^\alpha f(\delta t)\big\|l_\alpha^{(\delta)}\big\|\Omega^{(\delta)}(\delta, F^{(\delta)})(t)\,d\theta, \quad f \in \lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}. \tag{2.6}$$

При этом

$$\big\|l_\alpha^{(\delta)}\big\| = \inf\big\{\|\bar g - a\|_q : a \in H_q^0\big\}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Пусть $f \in \lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$. Составим функцию

$$y(x) = \left|l_\alpha^{(\delta)}\left(\frac{F^{(\delta)} + xf}{\|F^{(\delta)} + xf\|_p^{(\delta)}}\right)\right|^2.$$

Эта функция определена для всех x, достаточно малых по абсолютной величине. Применяя формулу (2.3), $m(\delta) = \delta$, после простых выкладок получим

$$y'(0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\big(\|F^{(\delta)} + xf\|_p^{(\delta)}\big)^2} l_\alpha^{(\delta)}(F^{(\delta)} + xf)\overline{l_\alpha^{(\delta)}(F^{(\delta)} + xf)}\right)_{x=0}$$
$$= 2\big\|l_\alpha^{(\delta)}\big\|\operatorname{Re} l_\alpha^{(\delta)}(f) - 2\big\|l_\alpha^{(\delta)}\big\|^2 \operatorname{Re} W^{(\delta)}(\delta, f).$$

Функция $y(x)$ достигает максимума при $x = 0$, стало быть, эта производная равна нулю. Из предыдущего равенства получим

$$\operatorname{Re} l_\alpha^{(\delta)}(f) = \operatorname{Re} \|l_\alpha^{(\delta)}\| W^{(\delta)}(\delta, f), \quad f \in \lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}. \tag{2.8}$$

Комплексный линейный функционал однозначно определяется своей вещественной частью. Поэтому из соотношения (2.8) следует представление (2.6).

Сравнивая представления (2.1) и (2.6), заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\delta t)\bar{g}(t)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\delta t)\|l_\alpha^{(\delta)}\|\Omega^{(\delta)}(\delta, F^{(\delta)})(t)\,d\theta, \quad f \in \lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}. \tag{2.9}$$

Пользуясь разложением $L_s(T) = H_s \oplus \overline{H}_s^0$, $s > 1$, получим представление

$$\|l_\alpha^{(\delta)}\|\Omega^{(\delta)}(\delta, F^{(\delta)}) = \overline{G} + a^{(\delta)},$$

где $G \in H_q$, $a^{(\delta)} \in H_q^0$. Отсюда и из (2.9) следует соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\delta t)\bar{g}(t)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\delta t)\overline{G}(t)\,d\theta, \quad f \in \lambda_{\alpha,p}^{(\delta)},$$

из которого вытекает, что аналитические функции g и G совпадают. В соответствии с предыдущим представлением заключаем, что

$$\bar{g}(t) = \|l_\alpha^{(\delta)}\|\Omega^{(\delta)}(\delta, F^{(\delta)})(t) - a^{(\delta)}(t). \tag{2.10}$$

Пусть в функционале (1.1) $1 < p < \infty$, $\omega = g$. Тогда в силу (2.10)

$$l(\Psi) = \frac{\|l_\alpha^{(\delta)}\|}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(t)\frac{|(1-\delta)^\alpha F_\delta^{(\delta)}(t)|^p}{(1-\delta)^\alpha F_\delta^{(\delta)}(t)}\,d\theta, \quad \Psi \in H_p,$$

где $(1-\delta)^\alpha F_\delta^{(\delta)} \in H_p$, более того, $\|(1-\delta)^\alpha F_\delta^{(\delta)}\|_p = 1$ на основании $m(\delta) = \delta$.

Следовательно, экстремальная функция F функционала (1.1) будет равна $(1-\delta)^\alpha F_\delta^{(\delta)}$, при этом $\|l\| = \|l_\alpha^{(\delta)}\|$. Отсюда и из равенства (i) (теорема A) вытекает (2.7). Теорема 2.3 доказана.

§ 3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Если в функционале* (1.1) $1 < p < \infty$ *и* ω — *полином, то* $F \in A(\mathbb{C})$.

Доказательство. Пусть в функционале (2.1) $g(z)$ — полином N-й степени, $F^{(\delta)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $\Psi^n(z) = \beta z^n + R^n(z)$, где β комплексное, $R^n(z) = R^N(z) - a_n z^n$, $n \geq N+1$. Так как $R^N \in E_N$ является элементом (единственным) наилучшего приближения в $\Lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}$ для $f^N(z)$ элементами из E_N, $\|f^N + R^N\|_p^{(\delta)} = 1$, для любого $r \in m(\delta)$ имеем

$$1 \leq (1-r)^\alpha \|f_r^N + \beta r^n t^n + R_r^n\|_p = (1-r)^\alpha r^n \left\|\frac{f_r^N + R_r^n}{r^n} + \beta t^n\right\|_p.$$

Нижняя грань по β от правой части предыдущего неравенства (равная единице) достигается только при $\beta = a_n$. Поэтому $a_n z^n$ является элементом наилучшего приближения в H_p для функции $\big(f_r^N(z) + R_r^n(z)\big)/r^n$, где $R^n(z) + a_n z^n = R^N(z)$, $f^N(z) + R^N(z) = F^{(\delta)}(z)$. Воспользуемся теоремой из [10]. *Пусть* $\mathscr{A}$ *— фиксированное подпространство* $L_p(\sigma, \Sigma, \mu)$, $1 < p < \infty$. *Тогда для того чтобы* $\xi_0 \in \mathscr{A}$ *был элементом наилучшего приближения для* $x_0 \in L_p(\sigma, \Sigma, \mu) \setminus \mathscr{A}$, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\sigma} \frac{|\xi_0 - x_0|^p}{\xi_0 - x_0} h \, d\mu = 0, \quad h \in \mathscr{A}.$$

Положим $\mathscr{A} = \{\beta z^n : \beta \in \mathbb{C}\}$ и $x_0 = \big(f_r^N + R_r^n\big)/r^n$. На основании этой теоремы и рассуждений, проведенных выше, необходимо выполнение условий

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{|(1-r)^\alpha F^{(\delta)}(rt)|^p}{(1-r)^\alpha F^{(\delta)}(rt)} t^n \, d\theta = 0, \quad n \geq N+1, \tag{3.1}$$

как только $r \in m(\delta)$.

Докажем, что для δ, близких к единице, множество $m(\delta)$ состоит из единственной точки δ. Допустим, что при заданном $0 < \delta < 1$ множество $m(\delta)$ содержит точку $r \in (\delta, 1)$, т. е. в этой точке функция $I_\alpha(\rho) = (1-\rho)^\alpha \big\|F_\rho^{(\delta)}\big\|$ имеет максимум, равный единице. Тогда

$$\left(\frac{d}{d\rho}(1-\rho)^\alpha \big\|F_\rho^{(\delta)}\big\|_p\right)_{\rho=r} = -\alpha(1-r)^{\alpha-1}\big\|F_r^{(\delta)}\big\|_p + (1-r)^\alpha \left(\frac{d}{d\rho}\big\|F_\rho^{(\delta)}\big\|_p\right)_{\rho=r} = 0.$$

В силу того, что $(1-r)^\alpha \big\|F_r^{(\delta)}\big\|_p = 1$,

$$\frac{d}{d\rho}\big|F_\rho^{(\delta)}\big|^p = p \operatorname{Re}\left(\frac{\big|F_\rho^{(\delta)}(t)\big|^p}{F_\rho^{(\delta)}(t)} t\big(F_\rho^{(\delta)}(t)\big)'\right),$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\rho}\big\|F_\rho^{(\delta)}\big\|_p\right)_{\rho=r} &= \left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |F^{(\delta)}(\rho t)|^p \, d\theta\right)^{1/p}\right]_{\rho=r} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi p}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{d}{d\rho}|F^{(\delta)}(\rho t)|^p\right)_{\rho=r} d\theta\right)\frac{1}{\big\|F_r^{(\delta)}\big\|_p^{p/q}} \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\big|F_r^{(\delta)}(t)\big|^p}{F_r^{(\delta)}(t)} t (F^{(\delta)})'(rt)\, d\theta\right) \cdot (1-r)^{\frac{\alpha p}{q}},\end{aligned}$$

$(1-r)^{\alpha p/q} = \frac{(1-r)^{\alpha p}}{(1-r)^\alpha}$, после простых преобразований получим

$$\alpha r = (1-r) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\big|(1-r)^\alpha F_r^{(\delta)}\big|^p}{(1-r)^\alpha F_r^{(\delta)}} (1-r)^\alpha r t (F^{(\delta)})'(r\,t)\, d\theta\right),$$

где $(rt)(F^{(\delta)})'(rt) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(rt)^k$ и ряд в правой части равномерно сходится в $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$. Это позволяет провести почленное интегрирование. Опираясь на условия (3.1) и следуя обозначениям, приходим к равенству

$$\alpha r = (1-r)\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Omega^{(\delta)}(r,F^{(\delta)})\left(\sum_{k=1}^{N}k(1-r)^{\alpha}a_k(rt)^k\right)d\theta\right).$$

Сумму в правой части этого равенства оценим с помощью неравенства треугольника. Далее, с учетом $\|\Omega^{(\delta)}(r,F^{(\delta)})\|_q = 1$ и неравенства Гёльдера получим

$$\alpha r \le (1-r)\sum_{k=1}^{N}k(1-r)^{\alpha}|a_k|r^k. \tag{3.2}$$

Так как $(1-r)^{\alpha}a_kr^k = \Phi_k$ — тейлоровы коэффициенты функции $\Phi(r,z) = (1-r)^{\alpha}F^{(\delta)}(rz)$ из H_p с единичной нормой, из формулы $\Phi_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(r,t)\overline{t^k}\,d\theta$ следует, что $|\Phi_k| \le 1$. Отсюда и из (3.2) вытекает, что допущенное выше условие выполняется при

$$\alpha r \le (1-r)\sum_{k=1}^{N}k = \frac{(1-r)N(N+1)}{2}, \quad \delta < r < 1,$$

т. е. когда имеет место условие

$$0 < \delta < r \le \frac{N(N+1)}{(2\alpha + N(N+1))} = C_N(\alpha).$$

Стало быть, $m(\delta) = \delta$, если $\delta = C_N(\alpha)$. Тогда по теоремам 2.3 и A, полагая $\omega = g$ в функционале (1.1), получим равенство

$$\left\|l_{\alpha}^{(\delta)}\right\| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1-\delta)^{\alpha}F^{(\delta)}(\delta\, t)\bar{g}(t)\,d\theta = \|\bar{g} - X\|_q = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(t)\bar{g}(t)\,d\theta,$$

где $\|(1-\delta)^{\alpha}F^{(\delta)}(\delta t)\|_p = 1$ в силу $m(\delta) = \delta$. Последнее равенство по теореме A возможно только тогда, когда $(1-\delta)^{\alpha}F^{(\delta)}(\delta\, z) = F(z)$ в Δ. Так как функция из левой части этого равенства аналитична в круге $\Delta(1/\delta)$, то $F(z)$ аналитически продолжима в этот круг. Но $\delta = C_N(\alpha)$ можно подобрать сколь угодно малым за счет выбора α, поэтому $F \in A(\mathbb{C})$. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Если в функционале* (1.1) $1 < p < \infty$ *и* $\omega \in A(R)$, *то* $F \in A(R)$.

Доказательство. Пусть $g_N(z)$ — N-я частичная сумма разложения $g(z)$ в ряд Тейлора. Наряду с $l_N \in H_p^*$ вида

$$l_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\overline{g_N}(t)\,d\theta, \quad f \in H_p, \tag{3.3}$$

рассмотрим $l_{N,\alpha}^{(\delta)} \in \left(\lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}\right)^*$, $\delta = 1/\eta$, $1 < \eta < R$, вида

$$l_{N,\alpha}^{(\delta)}(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1-\delta)^{\alpha}f(\delta t)\overline{g_N}(t)\,d\theta, \quad f \in \lambda_{\alpha,p}^{(\delta)}. \tag{3.4}$$

Пусть функции $F_N(z)$ и $F^{(\delta)}_{N,\alpha}(z)$ экстремальны соответственно для (3.3) и (3.4). Из рассуждений, проведенных в завершающей части доказательства теоремы 3.1, следует, что существует конечное

$$\alpha_N = \alpha_N(\delta) = \inf\left\{\alpha > 0 : \left\|l^{(\delta)}_{N,\alpha}\right\| = \|l_N\|\right\}. \tag{3.5}$$

Далее доказательство теоремы сводим к доказательству ограниченности последовательности $\{\alpha_N\}$. Поэтому можем считать, что $\alpha_N \neq 0$. В силу (3.5) существует последовательность $\beta_n > \alpha_N$, $\beta_n \to \alpha_N$ при $n \to \infty$, такая, что

$$\left\|l^{(\delta)}_{N,\beta_n}\right\| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1-\delta)^{\beta_n}F^{(\delta)}_{N,\beta_n}(\delta t)\overline{g_N}(t)\,d\theta \to \|l_N\|.$$

После перехода к пределу при $n \to \infty$ с учетом компактности последовательности $\left\{F^{(\delta)}_{N,\beta_n}(z)\right\}$ относительно сходимости внутри Δ отсюда заключаем, что $\left\|l^{(\delta)}_N\right\| = l^{(\delta)}_N\left(F^{(\delta)}_N\right) = \|l_N\|$, где $F^{(\delta)}_N$ экстремальна для функционала $l^{(\delta)}_N = l^{(\delta)}_{N,\alpha_N}$.

Пусть в соответствии с теоремой А $\|l_N\| = \|\overline{g_N} - X_N\|_q$. Положим $\alpha = \alpha_N$ и

$$\mathscr{I}_\alpha(\rho) = \left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\alpha}\left\|\bar{g}_N\left(\frac{\rho t}{\delta}\right) - \chi_N\right\|_q, \quad \delta \le \rho < 1.$$

Так как $\mathscr{I}_\alpha(\delta) = \|\bar{g}_N - X_N\|_q$, выполняется неравенство

$$\|l_N\| = \|\bar{g}_N - \chi_N\|_q \le \sup_{\delta\le\rho<1}\left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\alpha}\left\|\bar{g}_N\left(\frac{\rho t}{\delta}\right) - X_N\right\|_q. \tag{3.6}$$

Допустим, что неравенство (3.6) строгое, т. е.

$$\|\bar{g}_N - X_N\|_q < \sup_{\delta\le\rho<1}\mathscr{I}_\alpha(\rho).$$

Очевидно, что функция $\mathscr{I}_\alpha(\rho)$ дифференцируема по $\rho \in (\delta, 1)$. Поскольку g_N — полином N-й степени и $\left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{N} \to 0$ при $\rho \to 1$, $X_N \in A_q$, с помощью неравенства треугольника заключаем, что $\mathscr{I}_\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 1$. Поэтому с учетом $\mathscr{I}_\alpha(\delta) = \|\bar{g}_N - X_N\|_q$ найдется точка $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) \in (\delta, 1)$, в которой достигается $\max \mathscr{I}_\alpha(\rho) > \|\bar{g}_N - \chi_N\|_q = \|l_N\|$. Обозначим $G_N(\rho, t) = \bar{g}_N(\eta\rho t) - \chi_N(t)$, тогда $((1-\rho)/(1-\delta))^{\alpha}\|G_N(\rho,t)\|_q = \mathscr{I}_\alpha(\rho)$. Имея в виду, что $\mathscr{I}'_\alpha(\varepsilon) = 0$, и рассуждая, как в соответствующей части доказательства теоремы 3.1, получим

$$\alpha\mathscr{I}_\alpha(\varepsilon) = (1-\varepsilon)\left(\frac{1-\varepsilon}{1-\delta}\right)^{\alpha}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{|G_N(\varepsilon,t)|^q}{G_N(\varepsilon,t)}\overline{\eta t g'_N(\eta\varepsilon t)}\,d\theta\right)\frac{1}{\|G_N(\varepsilon,t)\|_q^{q/p}},$$

где $\delta = 1/\eta$, $1 < \eta < R$. Правую часть предыдущего равенства оценим с помощью неравенства Гёльдера, $g'_N \in L_q(T)$, $1/p + 1/q = 1$. Так как $\delta < \varepsilon < 1$, $(1-\varepsilon)\eta < \eta - 1$, $\alpha = \alpha_N$, получим оценку

$$\alpha_N\mathscr{I}_{\alpha_N}(\varepsilon) < \frac{(\eta-1)\|G_N(\varepsilon,t)\|_q^{q/p}\|g'_N(\eta t)\|_q}{\|G_N(\varepsilon,t)\|_q^{q/p}} = (\eta-1)\|g'_N(\eta t)\|_q.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\mathscr{I}_{\alpha_N}(\varepsilon) > \|l_N\|$, приходим к оценке

$$\alpha_N = \alpha_N(\delta) < \frac{(\eta-1)\|g'_N(\eta t)\|_q}{\|l_N\|}. \tag{3.7}$$

Пусть неравенство (3.6) сводится к равенству, т. е. согласно (3.5)

$$\alpha_N = \inf\left\{\beta > 0 : \sup_{\delta\le\rho<1}\left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\beta}\left\|\bar g_N\left(\frac{\rho t}{\delta}\right) - \chi_N\right\|_q = \|\bar g_N - \chi_N\|_q = \mathscr{I}_{\alpha_N}(\delta)\right\}, \quad (3.8)$$

где $\alpha_N > 0$. Тогда $\sup\limits_{\delta\le\rho<1} \mathscr{I}_\beta(\rho) \ne \mathscr{I}_{\alpha_N}(\delta) = \|l_N\|$ для $0 < \beta < \alpha_N$ в силу минимальности α_N в равенстве (3.8). Именно, так как при этом $\left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^\beta \ge \left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\alpha_N}$, то $\sup\limits_{\delta\le\rho<1} \mathscr{I}_\beta(\rho) > \|l_N\|$. Поскольку $\mathscr{I}_\beta(\delta) = \|l_N\|$, рассуждая как при выводе оценки (3.7), для случая (3.8) получим

$$\beta < \frac{(\eta-1)\|g_N'(\eta t)\|_q}{\|l_N\|}$$

при любом $0 < \beta < \alpha_N$. Отсюда и из оценки (3.7) следует, что в общем случае $\alpha_N \ge 0$ $(\eta = 1/\delta)$ будет

$$\alpha_N = \alpha_N(\delta) \le \frac{(1-\delta)\left\|g_N'\left(\frac{t}{\delta}\right)\right\|_q}{\delta\|l_N\|}. \quad (3.9)$$

В соответствии с (3.5) имеем

$$l^{(\delta)}_{N,\alpha_N}\left(F^{(\delta)}_N\right) = l_N(F_N) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\delta)^{\alpha_N}F^{(\delta)}_N(\delta t)g_N(t)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_N(t)\bar g_N(t)\,d\theta = \|g_N - X_N\|_q. \quad (3.10)$$

Так как $g \in A(R)$, то $g - g_N \to 0$ в H_q при $N \to \infty$, поэтому, как легко видеть, $\|l - l_N\| \to 0$. Тогда $X_N \to X$ в H_q на основании теоремы A. Пространство H_p, $p > 1$, равномерно выпуклое, экстремальные функции функционалов l и l_N единственны, следовательно, $F_N \to F$ в H_p (см., например, [9, гл. 7, лемма 1]). Фактически повторяя рассуждения, проведенные в соответствующей части доказательства теоремы 2.1, заключаем, что последовательность $F^{(\delta)}_N \to F^{(\delta)}$ внутри Δ. Поскольку $g \in A(R)$, то $\|g_N'(\eta t)\|_q \to \|g'(\eta t)\|_q$, поэтому в силу оценки (3.9) последовательность $\{\alpha_N\}$ ограничена, значит, компактна. Пусть $\alpha_N \to \alpha_*(\delta)$, тогда $(1-\delta)^{\alpha_N}F_N(\delta)(\delta z) \to (1-\delta)^{\alpha_*}F^{(\delta)}(\delta z)$ в H_p, при этом норма предельной функции не превосходит единицы. Перейдем в равенстве (3.10) к пределу при $N \to \infty$. С учетом предыдущих рассуждений заключаем, что для каждого $\delta : 1/R < \delta < 1$ найдутся $F^{(\delta)} \in A$ и $\alpha_* = \alpha_*(\delta)$, для которых $\left\|(1-\delta)^{\alpha_*}F^{(\delta)}_\delta\right\|_p \le 1$, при этом

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\delta)^{\alpha_*}F^{(\delta)}(\delta t)\bar g(t)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)\bar g(t)\,d\theta = \|\bar g - \chi\|_q.$$

Выполнение предыдущих условий возможно лишь в случае $\left\|(1-\delta)^{\alpha_*}F^{(\delta)}_\delta\right\|_p = 1$. Поэтому в силу единственности экстремальной функции в H_p, $1 < p < \infty$, будет

$$(1-\delta)^{\alpha_*}F^{(\delta)}(\delta z) = F(z)$$

для любого $1/R < \delta < 1$. Функция из левой части этого равенства принадлежит $A(R)$, поэтому $F \in A(R)$. Теорема 3.2 доказана.

Функцию $F \in H_p$ называем *экстремальной* для функционала L в (1.2), если $\|L\| = \sup\limits_{f\neq 0} \frac{|L(f)|}{\|f\|_p} = L(F)$ и $\|F\|_p = 1$.

Лемма 3.1. *Если в функционале* (1.2) $g \in A(R)$, *то экстремальная функция существует* (*может быть, неединственная*).

Доказательство. Пусть $1 < R_1 < R$. С помощью тейлоровых рядов функций $f(\rho z)$ и $g(z)$ (ряд для $g(z)$ равномерно сходится внутри $\Delta(R)$) и простых формул

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^i \bar{t}^j \, d\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

преобразуем функционал (1.2) к виду

$$\begin{aligned} L(f) &= \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i(\rho t)^i\right)\overline{\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j\right)} d\theta \\ &= \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i\left(\frac{\rho t}{R_1}\right)^i\right)\overline{\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j (R_1 t)^j\right)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{R_1}\right)\bar{g}(R_1 t)\, d\theta. \qquad (3.11) \end{aligned}$$

Пусть $\{f_n\}$ — соответствующая максимизирующая последовательность для нормы функционала L. Проводя стандартные рассуждения, заключаем, что $\{f_n\}$ компактна относительно сходимости внутри Δ (используется оценка роста функций из пространств H_γ, $0 < \gamma < \infty$ (см., например, [9, теорема 3.10])). Пусть подпоследовательность f_{n_k} сходится к $\Phi \in A$ внутри Δ, тогда на основании представления (3.11) имеем

$$\begin{aligned} \|L\| = \lim_{k\to\infty} L(f_{n_k}) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{n_k}\left(\frac{t}{R_1}\right)\bar{g}(R_1 t)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi\left(\frac{t}{R_1}\right)\bar{g}(R_1 t)\, d\theta = \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\rho t)\bar{g}(t)\, d\theta, \end{aligned}$$

где $\|\Phi\|_p \leq 1$ в силу $\|f_{n_k}\| \leq 1$. Предыдущее равенство возможно только в случае $\|\Phi\| = 1$, т. е. Φ является экстремальной функцией функционала (1.2). Лемма 3.1 доказана.

Пусть функция F экстремальна для функционала (1.2), $0 < p \leq 1$, $g \in A(R)$. Тогда $F = hb$, где $h \in H_p$ и $h \neq 0$ в Δ, b — произведение Бляшке (см., например, [11, гл. IX, § 4, теорема 1]).

Теорема 3.3. *Если в функционале* (1.2) $g \in A(R)$, *то* $F \in A(R)$.

Доказательство. Пусть s, $0 < s < p \leq 1$, и целое n таковы, что $\frac{np}{1-s} = \gamma > 1$. Так как $|b(t)| = 1$ почти всюду и $h(z)$ не имеет нулей в Δ, то $h^s b \in H_{p/s}$,

$p/s > 1$, $\|h^s b\|_{p/s} = 1$, $h^{(1-s)/n} \in H_\gamma$. Имея в виду, что интеграл ($\zeta = e^{i\psi}$)

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^s(t)b(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h^{1-s}\bigl(\frac{\zeta}{R_1}\bigr)\bar{g}(R_1\zeta)\,d\psi}{1-\bigl(\frac{\bar{t}}{R_1}\bigr)\zeta}\right)d\theta \tag{3.12}$$

абсолютно сходится, после изменения в нем порядка интегрирования (теорема Фубини), пользуясь интегральной формулой Коши, $F = hb$, получим

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{1-s}\left(\frac{\zeta}{R_1}\right)\bar{g}(R_1\zeta)\,d\psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h^s(t)b(t)\,d\theta}{1-\bigl(\frac{\zeta}{R_1}\bigr)\bar{t}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{1-s}\left(\frac{\zeta}{R_1}\right)h^s\left(\frac{\zeta}{R_1}\right)b\left(\frac{\zeta}{R_1}\right)\bar{g}(R_1\zeta)\,d\psi$$

$$= \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\rho t)\bar{g}(t)\,d\theta = \|L\|. \tag{3.13}$$

Внутренний интеграл в (3.12) рассматриваем как граничные значения функции $\overline{M_1}$, комплексно сопряженной с функцией

$$M_1(z) = \overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h^{1-s}\bigl(\frac{\zeta}{R_1}\bigr)\bar{g}(R_1\zeta)\,d\psi}{1-\bigl(\frac{\bar{z}}{R_1}\bigr)\zeta}\right)} \in A(R_1).$$

Из (3.12), $\|h^s b\|_{p/s} = 1$ и равенства (3.13) следует, что $h^s b$ является экстремальной функцией функционала $\mathscr{L}$ над $H_{p/s}$, $p/s > 1$, определенного формулой

$$\mathscr{L}(\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(t)\overline{M}_1(t)\,d\theta, \quad \psi \in H_{p/s}.$$

Действительно, если функция $f(z)$ экстремальна для $\mathscr{L}$, то аналогично (3.13) имеем

$$\mathscr{L}(f) = \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho t)h^{1-s}(\rho t)\bar{g}(t)\,d\theta = \|\mathscr{L}\|.$$

На основании неравенства Гёльдера $\|fh^{1-s}\|_p \le \|f\|_{p/s}\|h\|_p^{1-s} = 1$ и, следовательно, $\mathscr{L}(f) \le \|L\|$, причем $\mathscr{L}(h^s b) = \|L\|$, $\|h^s b\|_{p/s} = 1$. Отсюда в силу единственности экстремальной функции для $\mathscr{L}$ заключаем, что $f = h^s b$. Следовательно, по теореме 3.2 $h^s b \in A(R_1)$.

Пусть $s_n = (1-s)/n$, тогда $\|h^{s_n}\|_\gamma = 1$, $\gamma > 1$. Аналогично (3.13) имеем

$$\|L\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{s_n}(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h^{1-s_n}\bigl(\frac{\zeta}{R_1}\bigr)b\bigl(\frac{\zeta}{R_1}\bigr)\bar{g}(R_1\zeta)\,d\psi}{1-\bigl(\frac{\bar{t}}{R_1}\bigr)\zeta}\right)d\theta. \tag{3.14}$$

Отсюда, как и выше, следует $h^{s_n} = h^{(1-s)/n} \in A(R_1)$, тогда $(h^{s_n})^n = h^{1-s} \in A(R_1)$. Далее, с учетом произвольности $1 < R_1 < R$ заключаем, что $h^s b \cdot h^{1-s} = hb = F \in A(R)$. Теорема 3.3 доказана.

Следствие 3.1. *Если в функционале* (1.1) $2 < p < \infty$ *и* $\omega \in A(R)$, *то функция* X *из* (i) *принадлежит* $A(R)$.

Доказательство. Пусть, как и ранее, $F = hb$, $p_n = (p-2)/2n$, $n \geq 1$, $0 < p_n < 1$, тогда $h^{p_n} \in H_s$, $s = 2np/(p-2) > 1$. Рассуждая, как в завершающей части доказательства теоремы 3.3 (в (3.14) полагаем $g = \omega$, s_n заменяем на p_n, $\|L\|$ — на $\|l\|$), заключаем, что $h^{p_n} \in A(R_1)$, значит, $h^{np_n} = h^{\mu} \in A(R_1)$, где $\mu = (p-2)/2$. С учетом того, что $|b(t)| = 1$ почти всюду, запишем равенство (ii) в виде (для простоты полагаем $\|l\| = 1$)

$$\frac{|F(t)|^p}{F(t)} = h^{\mu}(t)\left(\overline{h^{\mu}(t)F(t)}\right) = \bar{g}(t) - X(t).$$

Умножим обе части этого равенства на $\overline{t^m}$, $m = 1, 2, \dots$, и проинтегрируем по θ. Получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h^{\mu}(t)\overline{(h^{\mu}(t)F(t)t^m)}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h^{\mu}(R_1 t)\overline{\left(h^{\mu}\left(\frac{t}{R_1}\right)F\left(\frac{t}{R_1}\right)\left(\frac{t}{R_1}\right)^m\right)}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} X(t)\overline{t^m}\,d\theta = x_m,$$

где x_m — тейлоровы коэффициенты функции $X(z)$. Из последнего равенства следует, что

$$|x_m| \leq \frac{M(R_1)}{R_1^m}, \quad M(R_1) = \max\left\{\left|h^{\mu}(R_1 t)h^{\mu}\left(\frac{t}{R_1}\right)F\left(\frac{t}{R_1}\right)\right| : t \in T\right\}.$$

Отсюда по формуле Коши — Адамара о радиусе сходимости с учетом произвольности $1 < R_1 < R$ заключаем, что $X \in A(R)$. Следствие 3.1 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дей М. М.* Нормированные линейные пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
2. *Хавинсон С. Я.* О некоторых экстремальных проблемах теории аналитических функций // Уч. записки МГУ. Математика. 1951. Т. 148, № 4. С. 133–143.
3. *Carleson L., Jacobs S.* Best uniform approximations by analytic functions // Arc. Math. 1972. V. 10, N 2. P. 219–229.
4. *Рябых В. Г.* Приближение неаналитических функций аналитическими // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 2. С. 87–94.
5. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Аналитичность в $\mathbb{C}$ экстремальных функций функционала, образованного полиномом над пространством Бергмана // Итоги науки. Юг России. Исследования по математическому анализу. 2014. Т. 8. Ч. 1. С. 204–214.
6. *Duren P. L., Romberg B. W., Shields A. L.* Linear functionals on H_p space with $0 < p < 1$ // J. Reine Angew. Math. 1969. V. 238. P. 32–60.
7. *Хавинсон С. Я.* Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различных обобщений. М.: МИСИ, 1981.
8. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
9. *Пожарский Д. А., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Интегральные операторы в пространствах аналитических функций и близких к ним. Ростов н/Д.: Изд-во ДГТУ, 2011.
10. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.

11. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.; Л.: Гостехиздат, 1952.

Статья поступила 26 мая 2016 г.

Бурчаев Хайдар Хасанович
Чеченский гос. университет,
бульв. Дудаева, 17, Грозный 364000
bekhan.burchaev@gmail.com

Рябых Владимир Георгиевич
Южный федеральный университет,
ул. Б. Садовая, 105, Ростов-на-Дону 344000
ryabich@aaanet.ru

Рябых Галина Юрьевна
Донской гос. технический университет,
пл. Гагарина, 1, Ростов-на-Дону 344000
ryabich@aaanet.ru