Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 519.21

РАСШИРЕННЫЙ ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ПРОЦЕССА С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

А. А. Могульский

Аннотация. Для процесса с независимыми приращениями при выполнении моментного условия Крамера установлен расширенный принцип больших уклонений в пространстве функций без разрывов второго рода с метрикой Боровкова.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.314

Ключевые слова: обобщенный пуассоновский процесс, процесс с независимыми приращениями, условие Крамера, функция уклонений, принцип больших уклонений, расширенный принцип больших уклонений, функция с ограниченной вариацией, пространство функций без разрывов второго рода, метрика Боровкова.

§ 1. Введение. Основной результат работы

1.1. Постановка задачи. Пусть $S(t)$, $t \geq 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями, т. е. процесс, характеристическая функция которого имеет вид

$$\mathbf{E}e^{iuS(t)} = e^{t\beta(u)}, \tag{1.1}$$

где согласно представлению Леви — Хинчина

$$\beta(u) = \beta(u; q, \sigma^2, \mathscr{B}) := iuq - \frac{u^2\sigma^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, d\mathscr{B}(x), \tag{1.2}$$

$\mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации, непрерывная в точке $x = 0$, $q \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$. Мы будем изучать вероятности больших уклонений (б.у.) процессов

$$s_T = s_T(t) := \frac{1}{x} S(tT),\ 0 \leq t \leq 1, \quad x = x_T \sim T \text{ при } t \to \infty \tag{1.3}$$

и при выполнении следующего моментного условия Крамера на распределение случайной величины $S(1)$.

$[\mathbf{C}_0]$. *Для некоторого* $\delta > 0$ *при* $|\lambda| \leq \delta$ *выполняется*

$$\psi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda S(1)} < \infty.$$

Работа выполнена при частичной поддержке грантом РФФИ (код проекта 14–01–00220).

1.2. Пространство $(\mathbb{D}, \rho_B)$. Чтобы сформулировать основной результат работы, необходимо определить функциональное метрическое пространство, случайными элементами которого являются процессы s_T, и построить в этом пространстве функционал уклонений, отвечающий семейству s_T. В дальнейшем удобно выбрать в качестве такового пространство $\mathbb{D}$ вещественных функций $f = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, без разрывов второго рода, непрерывных слева и таких, что $f(t) = 0$ при $t \le 0$ и $f(t) = f(1+0)$ при $t > 1$.

Каждой функции $f \in \mathbb{D}$ поставим в соответствие ее *график* Γ_f — односвязное множество в пространстве $\mathbb{R}^2$, которое однозначно определяется своими сечениями $\Gamma_f|_t$ в каждой точке $t \in \mathbb{R}$, где $\Gamma_f|_t$ — вертикальный отрезок

$$[(t, f(t)), (t, f(t+0))]$$

в $\mathbb{R}^2$, соединяющий точки $(t, f(t))$ и $(t, f(t+0))$. Таким образом, если в точке $t = u$ функция $f(t)$ непрерывна, то сечение в этой точке

$$\Gamma_f|_u = (u, f(u))$$

состоит из одной точки $(u, f(u))$. В пространстве $\mathbb{R}^2$, где расположены графики функций $f \in \mathbb{D}$, удобно рассматривать норму $|(t,s)| := \max\{|t|, |s|\}$ (ε-окрестность $(\alpha)_\varepsilon$ любой точки $\alpha \in \mathbb{R}^2$ в этой норме является квадратом с центром α и сторонами длины 2ε). Для множества $B \subset \mathbb{R}^2$ через $(B)_\varepsilon$ обозначим ε-окрестность этого множества во введенной норме.

В пространстве $\mathbb{D}$ будем использовать *метрику Боровкова* $\rho_B = \rho_B(f,g)$, которая определяется следующим образом: $\rho_B(f,g) < \varepsilon$ *тогда и только тогда, когда одновременно*

$$\Gamma_f \in (\Gamma_g)_\varepsilon \quad \text{и} \quad \Gamma_g \in (\Gamma_f)_\varepsilon. \tag{1.4}$$

Таким образом, основным в наших рассмотрениях будет сепарабельное метрическое пространство $(\mathbb{D}, \rho_B)$. Метрика $\rho = \rho_B$ была введена в [1] для пространства $\mathbb{F}$, более широкого, чем $\mathbb{D}$ (см. также [2]); топология, порождаемая метрикой ρ_B, совпадает с топологией M_2 Скорохода, описанной в [3]. Метрика ρ_B эффективно использовалась в [4; 5; 6, гл. 4, 5]. В дальнейшем условимся для краткости нижний индекс B в обозначении метрики Боровкова ρ_B опускать.

Пространство $(\mathbb{D}, \rho)$ *не полно*, о чем свидетельствует следующий пример. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(t) := \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < t \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < t. \end{cases}$$

Очевидно, что $\rho(f_n, f_k) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right| \le \left|\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right|$, поэтому эта последовательность фундаментальна в пространстве $(\mathbb{D}, \rho)$. Однако не существует функции $f \in \mathbb{D}$, которая была бы для нее предельной.

1.3. Функционал уклонений. Наряду с пространством $\mathbb{D}$ определим пространство $\mathbb{V} \subset \mathbb{D}$ функций $f \in \mathbb{D}$ с ограниченной вариацией, а также класс $\mathbb{V}_+ \subset \mathbb{V}$ неубывающих функций $f \in \mathbb{V}$. Известно, что любую функцию $f \in \mathbb{V}$ можно представить в виде разности

$$f = f_+ - f_-, \quad \text{где } f_\pm \in \mathbb{V}_+. \tag{1.5}$$

Представление (1.5) единственно, если при этом выполняется

$$\operatorname{Var} f = \operatorname{Var} f_+ + \operatorname{Var} f_-.$$

Для произвольной функции $f \in \mathbb{V}$ через (f_+, f_-) будем обозначать эту единственную пару функций из $\mathbb{V}_+$, для которой выполняется

$$f = f_+ - f_-, \text{ где } f_\pm \in \mathbb{V}_+, \quad \operatorname{Var} f = \operatorname{Var} f_+ + \operatorname{Var} f_-. \tag{1.6}$$

Функцию f_+ (f_-) называют *положительным* (*отрицательным*) изменением f (см. [7, гл. I, § 1]).

Определим *функцию уклонений* для случайной величины $S(1)$, положив

$$\Lambda(\alpha) := \sup_\lambda \{\lambda\alpha - A(\lambda)\}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

где $A(\lambda) := \ln \mathbf{E} e^{\lambda S(1)}$ есть логарифм преобразования Лапласа над распределением $S(1)$. Функция $\Lambda(\alpha)$ есть преобразование Лежандра над $A(\lambda)$. Как вероятностная характеристика функция уклонений была определена и изучена в [8] (см. также [6, 9]). Обозначим

$$\lambda_+ := \sup\{\lambda : \psi(\lambda) < \infty\}, \quad \lambda_- := \inf\{\lambda : \psi(\lambda) < \infty\};$$

тогда интервал (λ_-, λ_+) является максимальным интервалом, в точках которого функция $A(\lambda)$ конечна. В силу условия $[\mathbf{C}_0]$ выполняется $\lambda_- < 0$, $\lambda_+ > 0$.

С помощью функции $\Lambda(\alpha)$ и пары чисел $|\lambda_-|$, λ_+ «стандартным» образом можно определить (см. [5; 6, гл. 4; 10; 11]) следующие функционалы (интегралы) уклонений $I(f)$, $J(f)$ в пространстве $\mathbb{V}$. Обозначим через $\mathbb{C}_a \subset \mathbb{V}$ класс абсолютно непрерывных функций в $\mathbb{V}$ и для $f \in \mathbb{V}$ положим

$$I(f) := \begin{cases} \int_0^1 \Lambda(f'(t))\,dt, & \text{если } f \in \mathbb{C}_a, \\ \infty, & \text{если } f \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{C}_a. \end{cases}$$

Для определения функционала $J(f)$ заметим, что любую функцию $f \in \mathbb{V}$ можно единственным образом представить в виде суммы

$$f = f_a + f_s$$

ее абсолютно непрерывной f_a и сингулярной f_s компонент. Затем, как отмечено выше, функцию f_s можно единственным образом представить в виде разности $f_s = f_{s+} - f_{s-}$ неубывающих функций (см. (1.6)). Поэтому произвольная функция $f \in \mathbb{V}$ допускает представление

$$f = f_a + f_{s+} - f_{s-}$$

и для нее положим (см. [6, гл. 4; 10; 11])

$$J(f) := I(f_a) + \lambda_+ f_{s+}(1+0) + |\lambda_-| f_{s-}(1+0).$$

Для функций $f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{V}$ по определению положим

$$I(f) = J(f) = \infty.$$

Свойства функционала (интеграла) уклонений изучены достаточно полно (см. [6, гл. 4; 10; 11]). Важное свойство функционала уклонений, необходимое для дальнейшего, сформулируем в виде леммы.

Лемма 1.1. *Функционал уклонений непрерывен снизу в пространстве* $(\mathbb{D},\rho)$, *т. е. для любого* $f\in\mathbb{D}$

$$\varliminf_{n\to\infty} J(f_n)\ge J(f),\quad \text{где } \rho(f_n,f)\to 0.$$

Лемму 1.1 докажем в § 2.

Фиксируем функцию $f\in\mathbb{D}$ и для любого целого $K\ge 1$ через

$$\mathbf{t}_K=(t_0,\dots,t_K),\quad 0=t_0<t_1<\dots<t_K=1,$$

обозначим разбиение отрезка $[0,1]$ на $K-1$ полуинтервалов $[t_{k-1},t_k)$, $k=1,\dots,K-1$, и один отрезок $[t_{K-1},1]$. Для разбиения $\mathbf{t}_K$ построим по «узловым» точкам

$$(0,0),(t_1,f(t_1)),\dots,(t_k,f(t_k)),\dots,(t_{K-1},f(t_{K-1})),(1,f(1+0))$$

непрерывную ломаную $f_{\mathbf{t}_K}=f_{\mathbf{t}_K}(t)\in\mathbb{C}_a$. Доказательства следующих двух свойств интеграла уклонений можно найти в [10] или [6, гл. 4].

1. *Ломаная* $f_{\mathbf{t}_K}$ *«спрямляет» функцию* $f\in\mathbb{D}$, *поэтому всегда*

$$J(f)\ge J(f_{\mathbf{t}_K})=I(f_{\mathbf{t}_K}). \tag{1.7}$$

2. *Всегда можно выбрать подходящую последовательность разбиений*

$$\mathbf{t}_{K(n)}=(t_{0,n},t_{1,n},\dots,t_{K(n),n}),$$

для которой при $f_n:=f_{\mathbf{t}_{K(n)}}$ *имеет место сходимость*

$$I(f_n)\uparrow J(f)\quad \text{при } n\to\infty. \tag{1.8}$$

1.4. Основное утверждение работы. Для любого множества $B\subset\mathbb{D}$ положим

$$I(B):=\inf_{f\in B} I(f),\quad J(B):=\inf_{f\in B} J(f),$$

где по определению нижняя грань по пустому множеству равна ∞. Условимся замыкание и внутренность множества B в пространстве $(\mathbb{D},\rho)$ обозначать через $[B]$ и (B) соответственно. Наконец, положим

$$J(B+):=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} J((B)_\varepsilon),$$

где $(B)_\varepsilon$ — ε-окрестность множества B в $(\mathbb{D},\rho)$.

Основным утверждением настоящей работы является

Теорема 1.1. *Пусть для случайной величины* $S(1)$ *выполнено условие Крамера* $[\mathbf{C}_0]$. *Тогда семейство* $\{s_T\}_{T\ge 1}$ *удовлетворяет расширенному принципу больших уклонений в пространстве* $\mathbb{D}$ *с метрикой Боровкова* ρ *и с функционалом уклонений* $J=J(f)$, *т. е. для любого измеримого множества* $B\subset\mathbb{D}$ *имеют место соотношения*

$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(s_T\in B)\le -J(B+), \tag{1.9}$$

$$\varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(s_T\in B)\ge -J((B)). \tag{1.10}$$

1.5. Краткий исторический обзор. Приведем обзор результатов, посвященных вероятностям больших уклонений случайных блужданий и процессов с независимыми приращениями. Доказательству принципов больших уклонений (п.б.у.) для траекторий случайных блужданий, порожденных суммами случайных величин, посвящена обширная литература (см, например, публикации [6, 8, 12–18] и указанную в них библиографию).

Обратимся к работам, где исследуется п.б.у. для траекторий процессов с независимыми приращениями. В классической работе [8] впервые был установлен, в частности, п.б.у. для семейства (1.3), построенного для обобщенного пуассоновского процесса $S(t)$ при выполнении следующего «сильного» моментного условия Крамера.

$[\mathbf{C}_\infty]$. *Для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$\psi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda S(1)} < \infty.$$

В недавней работе [19] при выполнении того же сильного условия Крамера $[\mathbf{C}_\infty]$ п.б.у. установлен для траекторий произвольного однородного процесса с независимыми приращениями.

Перейдем к случаю, когда для процесса $S(t)$ выполнено лишь слабое моментное условие Крамера $[\mathbf{C}_0]$. В [20] изучаются семейства s_T, построенные по процессам $S(t)$, имеющим на отрезке $[0, T]$ траектории из пространства $\mathbb{V}[0, T]$ функций ограниченной вариации, т. е. таким, что функция $\beta(u)$ (см. (1.1)) представляется в виде

$$\beta(u) = iuq + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1)\nu(dx),$$

где $\nu = \nu(dx)$ — произвольная мера (вообще говоря, неограниченная) такая, что $\int |x|\nu(dx) < \infty$. Для таких процессов при условии $[\mathbf{C}_0]$ установлен (см. теорему 5.1 в [20]) п.б.у. для семейства s_T в пространстве $\mathbb{V}[0, 1]$, снабженном топологией слабой сходимости: $f_n \to f$, если для любой непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции $g(t)$ имеет место сходимость

$$\int\limits_0^1 g(t)\, df_n(t) \to \int\limits_0^1 g(t)\, df(t) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Отметим, что такой важный в граничных задачах и приложениях функционал, как максимум траектории

$$\bar{f} := \sup_{0 \le t \le 1} f(t),$$

разрывен в этой топологии, поэтому использовать теорему 5.1 из [20] для «адекватной» оценки $\ln \mathbf{P}(\bar{s}_T \ge v)$ не удается. Для отыскания «правильной» асимптотики

$$\frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\bar{s}_T \ge v)$$

с помощью п.б.у. следует использовать более сильную топологию (скажем, топологию, порожденную равномерной метрикой $\rho_{\mathbb{U}}$, метрикой Скорохода ρ_S или метрикой Боровкова ρ, см., например, [5]). Упомянем еще работу [21], где основной результат из [20] распространяется на семейство процессов $s_T(t)$, $t \in [0, \infty)$, заданных на полуоси, и где используется топология, построенная на базе топологии слабой сходимости, в которой функционал $\bar{f}$ тоже разрывен.

В недавней работе [5] изучается семейство s_T (см. (1.3)), построенное по обобщенному пуассоновскому процессу $S(t)$ при выполнении условия Крамера $[\mathbf{C}_0]$; установлен *расширенный* п.б.у. (см., например, [4, 6, 16]) в пространстве $\mathbb{V}[0,1]$ с топологией, порожденной метрикой Боровкова ρ.

Таким образом, настоящая работа посвящена распространению результата работы [5] на класс произвольных однородных процессов с независимыми приращениями $S(t)$, удовлетворяющих условию Крамера $[\mathbf{C}_0]$.

1.6. Основная идея доказательства теоремы 1.1 содержится в следующем утверждении.

Лемма 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда процесс* $S(t)$ *представляется в виде суммы*

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t), \quad t \geq 0, \tag{1.11}$$

независимых процессов $S_1(t)$, $S_2(t)$, *из которых первый* $S_1(t)$ *является обобщенным пуассоновским процессом, удовлетворяющим условию* $[\mathbf{C}_0]$, *а второй* $S_2(t)$ — *однородным процессом с независимыми приращениями, удовлетворяющим условию* $[\mathbf{C}_\infty]$.

Лемма 1.2 будет доказана в § 2 (п. 2.2). Определив семейства

$$s_{i,T}(t) := \frac{1}{x} S_i(tT), \quad 0 \leq t \leq 1, \ i = 1, 2,$$

приходим к представлению

$$s_T(t) = s_{1,T}(t) + s_{2,T}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{1.12}$$

Доказательству теоремы 1.1 на базе представления (1.12) посвящен § 2. Существенным элементом доказательства является тот факт, что к семействам $s_{1,T}$, $s_{2,T}$ в правой части (1.12) применимы результаты из [5, 19] соответственно.

§ 2. Доказательства основных утверждений

2.1. Доказательство леммы 1.1. В [10; 6, гл. 4] изучены свойства интеграла уклонений $J(f)$, в частности, доказано свойство непрерывности снизу для $J(f)$. Однако в [10; 6, гл. 4] используется версия $\hat\rho = \hat\rho_B(f,g)$ метрики Боровкова, отличная от метрики $\rho = \rho_B(f,g)$, определенной в (1.4). Приведем определение метрики $\hat\rho$.

Для любого множества $B \subset \mathbb{R}^2$ пусть $\widehat{B} := B \cap [0,1] \times \mathbb{R}$ — пересечение B с полосой $[0,1] \times \mathbb{R}$. В частности, $\widehat{\Gamma}_f$ есть пересечение графика Γ_f с полосой $[0,1] \times \mathbb{R}$. Метрика $\hat\rho(f,g) = \hat\rho_B(f,g)$ определяется следующим образом (ср. с (1.4)): $\hat\rho(f,g) < \varepsilon$ *тогда и только тогда, когда одновременно*

$$\widehat{\Gamma}_f \in \{\widehat{(\widehat{\Gamma}_g)_\varepsilon}\} \quad \text{и} \quad \widehat{\Gamma}_g \in \{\widehat{(\widehat{\Gamma}_f)_\varepsilon}\}.$$

Таким образом, свойство непрерывности снизу для $J(f)$, установленное в [10; 6, гл. 4], формулируется так: *для любого* $f \in \mathbb{D}$

$$\varliminf_{n\to\infty} J(f_n) \geq J(f), \quad \text{где } \hat\rho(f_n, f) \to 0. \tag{2.1}$$

Обратимся непосредственно к доказательству свойства непрерывности снизу интеграла $J(f)$ в пространстве $(\mathbb{D}, \rho)$. Воспользуемся следующим утверждением, которое докажем несколько позже: *для любых* $f, g \in \mathbb{D}$ *справедливо неравенство*

$$\hat\rho(f,g) \leq \rho(f,g). \tag{2.2}$$

В силу (2.2) из сходимости $\rho(f_n, f) \to 0$ следует сходимость $\hat\rho(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому с помощью (2.1) непрерывность снизу интеграла $J(f)$ в пространстве $(\mathbb{D}, \rho)$ установлена. Нам осталось выполнить

Доказательство неравенства (2.2). Пусть $\rho(f, g) < \varepsilon$. Выберем произвольное $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \widehat\Gamma_f$. Поскольку $\widehat\Gamma_f \subset \Gamma_f$, то $\alpha \in \Gamma_f$ и (в силу $\rho(f, g) < \varepsilon$) найдется $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \Gamma_g$ такое, что $|\alpha - \beta| < \varepsilon$. Возможны три случая: 1) $\beta_1 \in [0, 1]$, 2) $\beta_1 < 0$, 3) $\beta_1 > 1$. В случае 1 имеем $\beta \in \widehat\Gamma_g$ и тем самым

$$\alpha \in \widehat{\{(\widehat\Gamma_g)_\varepsilon\}}. \tag{2.3}$$

В случае 2 выберем $\beta' := (0, \beta_2) \in \widehat\Gamma_g$ и воспользуемся очевидным неравенством

$$|\alpha - \beta'| \le |\alpha - \beta| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Следовательно, и в случае 2 имеет место соотношение (2.3). Наконец, в случае 3, выбирая $\beta' := (1, \beta_2) \in \widehat\Gamma_g$, устанавливаем в силу (2.4) соотношение (2.3). Соотношение (2.3), справедливое для любого $\alpha \in \widehat\Gamma_f$, доказывает, что

$$\widehat\Gamma_f \in \widehat{\{(\widehat\Gamma_g)_\varepsilon\}}. \tag{2.5}$$

Аналогичным образом устанавливаем: из $\rho(f, g) < \varepsilon$ вытекает соотношение

$$\widehat\Gamma_g \in \widehat{\{(\widehat\Gamma_f)_\varepsilon\}}. \tag{2.6}$$

Из соотношений (2.5), (2.6) следует, что $\hat\rho(f, g) < \varepsilon$. Неравенство (2.2) доказано. Лемма 1.1 доказана.

Замечание 2.1. Анализируя доказательство свойства (2.1) для пространства $(\mathbb{D}, \hat\rho)$, приведенное в [10; 6, гл. 4], можно установить, что это доказательство полностью сохранится и для пространства $(\mathbb{D}, \rho)$. Поэтому в доказательстве леммы 1.1 можно было обойтись и без привлечения неравенства (2.2). Однако неравенство (2.2) имеет и самостоятельный интерес. Из него следует, в частности, что окрестности $(f)_{\hat\rho,\varepsilon}$ в метрике $\hat\rho$ больше, чем окрестности $(f)_\varepsilon = (f)_{\rho,\varepsilon}$ в метрике ρ, т. е.

$$(f)_\varepsilon = (f)_{\rho,\varepsilon} \subset (f)_{\hat\rho,\varepsilon}.$$

Это, в свою очередь, позволяет получить в качестве следствия из теоремы 1.1 ее слабую (вообще говоря) версию: *расширенный п.б.у. для процессов* $\{s_T\}$ *в пространстве* $(\mathbb{D}, \hat\rho)$ *с тем же функционалом уклонений* $J(f)$.

2.2. Доказательство леммы 1.2. В силу формулы Леви — Хинчина (1.2) для $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$ имеем

$$A(\lambda) = \ln \mathbf{E} e^{\lambda S(1)} = \lambda q + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\lambda x} - 1 - \frac{\lambda x}{1 + x^2}\right) \frac{1 + x^2}{x^2}\, d\mathscr{B}(x), \tag{2.7}$$

где подынтегральную функцию при $x = 0$ следует считать равной $\frac{\lambda^2}{2}$ (доопределенной по непрерывности) (см. [22, гл. 19, § 5]). Обозначим далее

$$A_1(\lambda) := \int\limits_{|x|>1} (e^{\lambda x} - 1) \frac{1 + x^2}{x^2}\, d\mathscr{B}(x), \quad q_2 := q - \int\limits_{|x|>1} \frac{1}{x}\, d\mathscr{B}(x),$$

$$A_2(\lambda) := \lambda q_2 + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2} + \int\limits_{-1}^{1} \left(e^{\lambda x} - 1 - \frac{\lambda x}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, d\mathscr{B}(x), \tag{2.8}$$

так что справедливо равенство

$$A(\lambda) = A_1(\lambda) + A_2(\lambda). \tag{2.9}$$

Поскольку под знаком интеграла в (2.8) стоит непрерывная по x функция (см. добавление после формулы (2.7)), функция $A_2(\lambda)$ конечна при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Следовательно, функции $A_2(\lambda)$ можно поставить в соответствие однородный процесс с независимыми приращениями $S_2(t)$, удовлетворяющий условию $[\mathbf{C}_\infty]$:

$$\psi_2(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda S_2(1)} = e^{A_2(\lambda)} < \infty \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{R}.$$

В силу равенства (2.9) функции $A(\lambda)$, $A_1(\lambda)$ конечны для всех λ из интервала (λ_-, λ_+). Функцию $A_1(\lambda)$ можно представить в виде

$$A_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{\lambda x} - 1)\, dG(x),$$

где

$$G(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1+u^2}{u^2} \mathbf{I}_{\{|u|>1\}}\, d\mathscr{B}(u).$$

Поэтому функции $A_1(\lambda)$ отвечает обобщенный пуассоновский процесс $S_1(t)$ с характеристической функцией (см. [22, гл. 19, § 5])

$$\mathbf{E}e^{iuS_1(t)} = e^{t\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{iux}-1)\,dG(x)},$$

удовлетворяющий условию $[\mathbf{C}_0]$.

Остается заметить, что соотношению (2.9) соответствует представление (1.11). Лемма 1.2 доказана.

2.3. Две основные леммы. Обозначим через Δ класс непрерывных неубывающих положительных при $u \in (0,1]$ и равных 0 в точке $u = 0$ функций $\delta = \delta(u)$, так что $\delta(0) = 0$, $0 < \delta(u_1) \le \delta(u_2)$ при $0 < u_1 < u_2 \le 1$. В основе доказательства теоремы 1.1 лежат следующие две леммы.

Лемма 2.1. I. *Для любого $N < \infty$ найдется функция $\delta_N = \delta_N(\cdot) \in \Delta$ такая, что для любого $f \in \mathbb{C}_a$ и любого $\varepsilon \in (0,1]$ выполняется*

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_\varepsilon) \le -\min\{I((f)_{\delta_N(\varepsilon)}), N\}.$$

II. *Для любого $f \in \mathbb{D}$ и любого $\varepsilon \in (0,1]$*

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_\varepsilon) \ge -J(f). \tag{2.10}$$

Лемма 2.2. *Для любого $N < \infty$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся целое $M < \infty$ и набор $\{f_1, \dots, f_M\}$ функций из $\mathbb{C}_a$ такие, что*

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(s_T \notin \bigcup_{i=1}^{M} (f_i)_\varepsilon \right) \le -N.$$

Леммы 2.1 и 2.2 будут доказаны ниже, а сейчас заметим, что утверждение теоремы 1.1 очевидным образом вытекает из утверждений этих лемм (см. [16] или [6, теорема 4.1.2]). Однако «для автономности изложения» воспроизведем вывод утверждения теоремы 1.1 из лемм 2.1 и 2.2.

2.4. Доказательство теоремы 1.1 I. Вывод неравенства (1.9). Обозначим левую часть неравенства (1.9) через $-L_+(B)$. Выберем произвольное $N < \infty$. Для этого N и для произвольного $\varepsilon \in (0,1]$ в силу леммы 2.2 выберем конечное множество функций $f_1, \dots, f_M \in \mathbb{C}_a$ такое, что при $T \to \infty$ выполняется

$$\mathbf{P}(s_T \in B) \le \sum_{\{i:(f_i)_\varepsilon \cap B \ne \varnothing\}} \mathbf{P}(s_T \in (f_i)_\varepsilon) + e^{-NT(1+o(1))}.$$

Применяя далее утверждение I леммы 2.1, получаем

$$-L_+(B) \le -\min\{I(B_\varepsilon^*), N\},$$

где

$$B_\varepsilon^* := \bigcup_{\{i:(f_i)_\varepsilon \cap B \ne \varnothing\}} (f_i)_{\delta_N(\varepsilon)}.$$

Поскольку $B_\varepsilon^* \subset (B)_{\varepsilon+\delta_N(\varepsilon)}$, то

$$-I((f_i)_{\delta_N(\varepsilon)}) \le -I((B)_{\varepsilon+\delta_N(\varepsilon)}) \le -J((B)_{\varepsilon+\delta_N(\varepsilon)})$$

и приходим к неравенству

$$-L_+(B) \le -\min\{J((B)_{\varepsilon+\delta_N(\varepsilon)}), N\}. \tag{2.11}$$

Так как левая часть неравенства (2.11) не зависит от $\varepsilon > 0$ и $N < \infty$, устремляя $\varepsilon \downarrow 0$, получаем

$$-L_+(B) \le -\min\{J(B+), N\}; \tag{2.12}$$

при $N \to \infty$ из (2.12) вытекает требуемое неравенство (1.9):

$$-L_+(B) \le -J(B+).$$

II. Вывод неравенства (1.10) из утверждения II леммы 2.1 очевиден, поэтому теорема 1.1 доказана. Осталось доказать леммы 2.1 и 2.2.

2.5. Вспомогательные леммы. Обозначим наряду с $I(f)$ и $J(f)$ через $I_1(f)$, $I_2(f)$; $J_1(f)$, $J_2(f)$ функционалы уклонений, соответствующие процессам $S_1(t)$, $S_2(t)$. Сформулируем вспомогательные леммы, необходимые для доказательства лемм 2.1 и 2.2. Через $(f)_{\mathbb{U},\varepsilon}$ обозначим ε-окрестность в равномерной метрике $\rho_{\mathbb{U}}$ функции $f \in \mathbb{D}$.

Лемма 2.3. I. *Для любых $f \in \mathbb{C}_a$, $\varepsilon \in (0,1]$*

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_{2,T} \in (f)_{\mathbb{U},\varepsilon}) \le -I_2((f)_{\mathbb{U},\varepsilon}),$$

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_{\mathbb{U},\varepsilon}) \ge -I(f).$$

II. Для любых $f \in \mathbb{C}_a$, $\varepsilon \in (0,1]$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_{1,T} \in (f)_\varepsilon) \le -I_1((f)_{2\varepsilon}).$$

Утверждения I и II леммы 2.3 установлены в [19, 5] соответственно.

Для любой функции $\gamma = \gamma(t) \in \Delta$ через $\mathscr{K}_\gamma$ обозначим компакт в $\mathbb{C}_a$ такой, что для любой функции $g \in \mathscr{K}_\gamma$ ее модуль непрерывности $\omega_g(t)$ допускает оценку

$$\omega_g(t) \le \gamma(t) \quad \text{при } t \in [0,1].$$

Лемма 2.4. I. *Для любого $N < \infty$ найдется $\gamma_N = \gamma_N(t) \in \Delta$ и для любого $\varepsilon \in (0,1]$ найдутся целое $M = M_{N,\varepsilon} < \infty$ и набор $g_1, \dots, g_M$ функций из компакта $\mathscr{K}_{\gamma_N}$ такие, что*

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(s_{2,T} \notin \bigcup_{i=1}^{M} (g_i)_{\mathbb{U},\varepsilon} \right) \le -N. \tag{2.13}$$

II. *Для любого $N < \infty$ и любого $\varepsilon \in (0,1]$ найдутся целое $L = L_{N,\varepsilon} < \infty$ и множество $h_1, \dots, h_L$ функций из $\mathbb{C}_a$ такие, что*

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(s_{1,T} \notin \bigcup_{i=1}^{L} (h_i)_\varepsilon \right) \le -N. \tag{2.14}$$

Утверждения I и II леммы 2.4 установлены в [19, 5] соответственно.

2.6. Доказательство леммы 2.1. I. Фиксируем $N < \infty$. В силу леммы 2.4 для любого $\varepsilon \in (0,1]$ выберем наборы $\{g_1, \dots, g_M\}$ функций из $\mathscr{K}_{\gamma_N}$ и $\{h_1, \dots, h_L\}$ функций из $\mathbb{C}_a$ такие, что выполняются соотношения (2.13) и (2.14) соответственно. Пусть

$$\mathscr{M}(\varepsilon) := \{(i,j) \in \{1,\dots,M\} \times \{1,\dots,L\} : \{(g_i)_{\mathbb{U},\varepsilon} + (h_j)_\varepsilon\} \cap (f)_\varepsilon \ne \varnothing\}.$$

Тогда согласно леммам 2.3 и 2.4 получаем

$$\begin{aligned} -L_+((f)_\varepsilon) &:= \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_\varepsilon) \\ &\le -\min\{ \min_{(i,j)\in\mathscr{M}(\varepsilon)} \{I_2((g_i)_{\mathbb{U},\varepsilon}) + I_1((h_j)_{2\varepsilon})\}, N\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Поскольку случайные величины $S_1(1)$ и $S_2(1)$ независимы, имеем (в силу того, что максимум суммы не больше суммы максимумов)

$$\Lambda(\alpha_1 + \alpha_2) \le \Lambda_1(\alpha_1) + \Lambda_2(\alpha_2).$$

Из последнего неравенства вытекает для любых $f_1, f_2 \in \mathbb{C}_a$ неравенство

$$I(f_1 + f_2) \le I_2(f_1) + I_1(f_2).$$

Следовательно,

$$I_2((g_i)_{\mathbb{U},\varepsilon}) + I_1((h_j)_{2\varepsilon}) \ge I((g_i)_{\mathbb{U},\varepsilon} + (h_j)_{2\varepsilon}),$$

где

$$(g_i)_{\mathbb{U},\varepsilon} + (h_j)_{2\varepsilon} := \{g^* + h^* : g^* \in (g_i)_{\mathbb{U},\varepsilon},\ h^* \in (h_j)_{2\varepsilon}\}.$$

Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2.5. *Если* $g_i \in \mathscr{K}_\gamma$, $h_j \in \mathbb{C}_a$, *то*

$$(g_i)_{\mathbb{U},\varepsilon} + (h_j)_{2\varepsilon} \subset (g_i + h_j)_{\gamma_1(\varepsilon)}, \tag{2.16}$$

где $\gamma_1(\varepsilon) := 4\varepsilon + \gamma(2\varepsilon)$. *Если при этом* $(i,j) \in \mathscr{M}(\varepsilon)$, *то*

$$(g_i + h_j)_{\gamma_1(\varepsilon)} \subset (f)_{\delta(\varepsilon)}, \tag{2.17}$$

где $\delta(\varepsilon) := 2\gamma_1(\varepsilon) + \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $h^* \in (h_j)_{2\varepsilon}$. Тогда для любых $t \in \mathbb{R}$, $p \in [0,1]$ найдется $u \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|t-u| < 2\varepsilon, \quad |ph^*(t) + (1-p)h^*(t+0) - h_j(u)| < 2\varepsilon, \tag{2.18}$$

и для любого $u \in \mathbb{R}$ найдутся $t \in \mathbb{R}$ и $p \in [0,1]$ такие, что (2.18) тоже имеет место. Пусть $g^* \in (g_i)_{\mathbb{U},\varepsilon}$. Тогда $g^*(t) = g_i(t) + \theta\varepsilon$, где $|\theta| < 1$. Покажем, что если $g_i \in \mathscr{K}_\gamma$, то

$$\rho(g^* + h^*, g_i + h_j) < \gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) := 4\varepsilon + \gamma(2\varepsilon). \tag{2.19}$$

Для этого заметим, что для любых $t \in \mathbb{R}$ и $p \in [0,1]$ найдется $u \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|t-u| < 2\varepsilon \le \gamma_1(\varepsilon), \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} &|pg^*(t) + ph^*(t) + (1-p)g^*(t+0) + (1-p)h^*(t+0) - (g_i(u) + h_j(u))| \\ &\quad \le |g_i(t) - g_i(u)| + |ph^*(t) + (1-p)h^*(t+0) - h_j(u)| + 2|\theta|\varepsilon < \gamma_1(\varepsilon), \end{aligned} \tag{2.21}$$

и для любого $u \in \mathbb{R}$ найдутся $t \in \mathbb{R}$ и $p \in [0,1]$ такие, что неравенства (2.20), (2.21) тоже имеют место. Соотношение (2.19) установлено. Включение (2.16) доказано.

Поскольку для $(i,j) \in \mathscr{M}(\varepsilon)$ выполняется

$$(g_i + h_j)_{\gamma_1(\varepsilon)} \cap (f)_\varepsilon \ne \varnothing,$$

существует $f^* \in (g_i + h_j)_{\gamma_1(\varepsilon)} \cap (f)_\varepsilon$. Тогда

$$\rho(g_i + h_j, f) \le \rho(g_i + h_j, f^*) + \rho(f^*, f) < \gamma_1(\varepsilon) + \varepsilon.$$

Поэтому для любого $f^* \in (g_i + h_j)_{\gamma_1(\varepsilon)}$ выполняется

$$\rho(f^*, f) \le \rho(f^*, g_i + h_j) + \rho(g_i + h_j, f) < \gamma_1(\varepsilon) + \gamma_1(\varepsilon) + \varepsilon = \delta(\varepsilon).$$

Мы убедились, что

$$(g_i + h_j)_{\gamma_1(\varepsilon)} \subset (f)_{\delta(\varepsilon)}.$$

Включение (2.17) доказано. Лемма 2.5 доказана.

Продолжим с помощью леммы 2.5 доказательство утверждения I леммы 2.1. Применяя к правой части (2.15) лемму 2.5, получаем искомое неравенство:

$$-L_+((f)_\varepsilon) \le -\min\{I((f)_{\delta_N(\varepsilon)}), N\},$$

где $\delta_N(\varepsilon) := 9\varepsilon + \gamma_N(2\varepsilon)$, а функция $\gamma_N \in \Delta$ выбрана в соответствии с леммой 2.4. Утверждение I леммы 2.1 установлено.

II. Если $J(f) = \infty$, то неравенство (2.10) очевидно. Пусть $J(f) < \infty$. Согласно свойствам 1 и 2 функционала уклонений $J(f)$ (см. (1.7) и (1.8) соответственно) можно выбрать последовательность f_n непрерывных ломаных такую, что одновременно

$$\rho(f_n, f) \to 0, \quad I(f_n) \to J(f) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Поэтому для любого $\delta > 0$ найдутся n_0 и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что

$$(f)_\varepsilon \supset (f_{n_0})_{\mathbb{U},\varepsilon_1}, \quad -I(f_{n_0}) \geq -J(f) - \delta.$$

Остается воспользоваться оценкой снизу в утверждении I леммы 2.3:

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbf{P}(s_T \in (f)_\varepsilon) \geq \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbf{P}(s_T \in (f_{n_0})_{\mathbb{U},\varepsilon_1})\gamma e - I(f_{n_0}) \geq -J(f) - \delta.$$

Из последнего вытекает неравенство (2.10). Лемма 2.1 доказана.

2.7. Доказательство леммы 2.2. В силу леммы 2.4 выполним последовательно следующие шаги.

(i) Для фиксированного $N < \infty$ построим функцию

$$\gamma_1(\delta) := 4\delta + \gamma_N(2\delta),$$

где функция $\gamma_N \in \Delta$ выбирается в соответствии с утверждением I леммы 2.4.

(ii) Для фиксированного $\varepsilon \in (0,1)$ выберем $\delta = \delta_{N,\varepsilon} > 0$ таким образом, что $\gamma_1(\delta) \leq \varepsilon$.

(iii) По N и δ в соответствии с утверждениями I, II леммы 2.4 выберем функции $g_1, \dots, g_M \in \mathscr{K}_{\gamma_N}$ и $h_1, \dots, h_L \in \mathbb{C}_a$ таким образом, что при $T \to \infty$

$$1 - e^{-NT(1+o(1))} \leq \mathbf{P}\left(s_{2,T} \in \bigcup_{i=1}^{M}(g_i)_{\mathbb{U},\delta}, s_{1,T} \in \bigcup_{i=1}^{L}(h_j)_{2\delta}\right).$$

Поскольку

$$\left\{s_{2,T} \in \bigcup_{i=1}^{M}(g_i)_{\mathbb{U},\delta}, s_{1,T} \in \bigcup_{i=1}^{L}(h_j)_{2\delta}\right\} \subset \left\{s_{2,T} + s_{1,T} \in \bigcup_{i=1}^{M}\bigcup_{i=1}^{L}((g_i)_{\mathbb{U},\delta} + (h_j)_{2\delta})\right\}$$

и по лемме 2.5

$$\left\{s_{2,T} + s_{1,T} \in \bigcup_{i=1}^{M}\bigcup_{i=1}^{L}((g_i)_{\mathbb{U},\delta} + (h_j)_{2\delta})\right\} \subset \left\{s_{2,T} + s_{1,T} \in \bigcup_{i=1}^{M}\bigcup_{i=1}^{L}(g_i + h_j)_{\gamma_1(\delta)}\right\},$$

в силу выбора параметра δ получаем неравенство

$$1 - e^{-NT(1+o(1))} \leq \mathbf{P}\left(s_T \in \bigcup_{i=1}^{M}\bigcup_{i=1}^{L}(g_i + h_j)_\varepsilon\right),$$

эквивалентное утверждению леммы 2.2. Лемма 2.2 доказана.

Автор благодарит А. А. Боровкова и рецензента за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А.* Сходимость распределений функционалов от случайных процессов // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 1. С. 3–41.
2. *Боровков А. А.* О скорости сходимости в принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применения. 1973. Т. 18, № 2. С. 217–234.
3. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, № 3. С. 289–319.
4. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. I: 2011. Т. 56, № 4, С. 627–655; II: 2012. Т. 57, № 1. С. 3–34; III: 2013. Т. 58, № 1. С. 37–52.

5. *Могульский А. А.* Принцип больших уклонений для обобщенного пуассоновского процесса // Мат. тр. 2016. Т. 19, № 2. С. 119–157.
6. *Боровков А. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений. М.: Физматлит, 2013.
7. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
8. *Боровков А. А.* Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения. 1967. Т. 12, № 4. С. 635–654.
9. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1972.
10. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Свойства функционала уклонений от траекторий, возникающего при анализе вероятностей больших уклонений случайных блужданий // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 4. С. 777–795.
11. *Могульский А. А.* Теорема разложения для интеграла уклонений // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 2. С. 127–145.
12. *Varadhan S. R. S.* Large deviations and applications. Philadelphia: SIAM, 1984.
13. *Varadhan S. R. S.* Large deviations // Ann. Probab. 2008. V. 36, N 2. P. 397–419.
14. *Dupuis P., Ellis R.* A weak convergence approach to the theory of large deviations. New York: Chichester, 1979.
15. *Пухальский А. А.* К теории больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. 1993. Т. 38, № 3. С. 490–497.
16. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О принципах больших уклонений в метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1251–1269.
17. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Экспоненциальные неравенства чебышевского типа для сумм случайных векторов и для траекторий случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56, № 1. С. 1–27.
18. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Т. I. Медленно убывающие распределения приращений. М.: Физматлит, 2008.
19. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Неравенства и принципы больших уклонений для траекторий процессов с независимыми приращениями // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 283–297.
20. *Lynch J., Sethuraman J.* Large deviations for processes with independent increments // Ann. probab. 1987. V. 15, N 2. P. 610–627.
21. *Добрушин Р. Л., Печерский Е. А.* Большие уклонения для процессов с независимыми приращениями на бесконечном интервале // Пробл. передачи информации. 1998. Т. 34, № 4. С. 62–108.
22. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.

Статья поступила 8 апреля 2016 г.

Могульский Анатолий Альфредович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`mogul@math.nsc.ru`