ISSN 1472-2739 (on-line) 1472-2747 (printed)

Algebraic & Geometric Topology
Volume 1 (2001) 519–548
Published: 5 Octoberber 2001

La filtration de Krull de la categorie $\mathcal{U}$ et la cohomologie des espaces

Lionel Schwartz

Abstract Cet article demontre une variante d'une conjecture due a N. Kuhn. Cette conjecture s'exprime a l'aide de la filtration de Krull de la categorie $\mathcal{U}$ des modules instables. Notons $\mathcal{U}_n$, $n \geq 0$, le n-ieme terme de cette filtration. La categorie $\mathcal{U}$ est la plus petite sous categorie epaisse contenant les categories $\mathcal{U}_n$ et stable par colimite [7]. La categorie $\mathcal{U}_0$ est celle des modules localement finis, c'est-a-dire limite directe de modules finis.

On entend par sous categorie epaisse une sous-categorie stable par sous-objet et quotient, et telle que pour toute suite exacte courte, si le premier et le troisieme terme sont dans la sous-categorie, alors le terme central l'est aussi.

La conjecture s'enonce comme suit, soit X un espace, alors :

soit $H^*X \in \mathcal{U}_0$,

soit $H^*X \notin \mathcal{U}_n$, pour tout n.

Par exemple la cohomologie d'un espace de dimension finie, ou celle de son espace des lacets sont toujours dans $\mathcal{U}_0$. Alors que la cohomologie du classifiant d'un groupe fini, d'ordre divisible par 2 n'est, elle, dans aucune des sous-categories $\mathcal{U}_n$.

On demontre cette conjecture, modulo l'hypothese supplementaire que tous les quotients de la filtration nilpotente ont un nombre fini de generateurs. Cette condition implique en particulier que la cohomologie est de dimension finie en chaque degre. Mais elle est plus forte, et assure les conditions d'application du theoreme de Lannes sur la cohomologie des espaces fonctionnels. Ce theoreme est necessaire pour appliquer la reduction de Kuhn [3].

Par commodite on ne considerera dans cet article que le cas $p = 2$.

AMS Classification 55S10; 57S35

Keywords Steenrod operations, nilpotent modules, Eilenberg-Moore spectral sequence

Un probleme important en topologie est de savoir quand un module instable sur l'algebre de Steenrod, ou une algebre instable, est la cohomologie singuliere d'un espace. L'exemple le plus celebre est celui de la realisabilite des algebres de polynômes comme cohomologie d'espaces. Ce probleme, pose par N. E. Steenrod, est tres lie au probleme de l'invariant de Hopf 1 resolu par J. F. Adams. Les techniques developpees au cours des annees 80 et 90 par H. Miller et J. Lannes ont debouche sur les resultats spectaculaires de B. Dwyer, H. Miller et C. Wilkerson, entre autres, dans cette direction. Le present article etudie une autre instance de ce probleme, qui a ete soulevee par N. Kuhn dans [3]. L'enonce obtenu prolonge un resultat precedent de l'auteur [8], resultat qui avait ete aussi conjecture par Kuhn.

La categorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur l'algebre de Steenrod admet une filtration decroissante par des sous-categories pleines $\mathcal{N}il_k$, $k \geq 0$. Ces categories sont definies comme suit. La categorie $\mathcal{N}il_k$ est la plus petite sous-categorie epaisse, stable par limite directe, et qui contient $\Sigma^k M$ pour tout module instable M. Chaque module instable admet donc une filtration decroissante, que l'on appellera filtration nilpotente du module. Si M est un module instable on notera M_s son plus grand sous-module instable s-nilpotent. Le quotient M_s/M_{s+1} est de la forme $\Sigma^s R_s(M)$, ou $R_s(M)$ est un module instable reduit, c'est-a-dire ne contenant pas de suspension non-triviale.

Cet article demontre le theoreme suivant :

Theoreme 0.1 *Soit X un espace, et soit M la cohomologie singuliere modulo 2 de l'espace X. Supposons que $M \in \mathcal{U}_n$ pour un certain entier n, et que pour tout s le quotient M_s/M_{s+1} ait un nombre fini de generateurs sur l'algebre de Steenrod. Alors M est localement finie, c'est-a-dire limite directe de modules finis sur l'algebre de Steenrod, i.e. $M \in \mathcal{U}_0$.*

En fait on demontrera que chacun des quotients M_s/M_{s+1} est fini, et non nul seulement en degre s car il est reduit. On en deduit que M est localement fini car :

Lemme 0.2 *Un module instable M tel que tous les quotients $R_s(M)$ sont localement finis est localement fini.*

Ce lemme resulte de l'exactitude de T, du fait que T commute aux suspensions, et de ce que $T(M) = M$ si M est localement fini, voir aussi [3].

Par comparaison, le cas de [8] est celui ou la filtration nilpotente est finie, c'est-a-dire que le quotient M_s/M_{s+1} est nul pour tout s assez grand.

Une analyse precise de la demonstration montre que l'on peut obtenir des enonces plus generaux. A titre d'exemple, le suivant (que par precaution nous appelons conjecture) semble a portee de main :

Conjecture 0.1 *Soit X un espace $2d$-connexe, $d \geq 1$. Soit M sa cohomologie reduite modulo 2, supposons que tous les cup-produits y soient triviaux. Supposons que $M \in \mathcal{N}il_d$, que $M/M_{2d} \in \mathcal{U}_1$, et que pour tout entier $s \geq d$ le module instable $T^s(M)$ soit de dimension finie en chaque degre, alors $M \in \mathcal{N}il_{d+1}$.*

Il convient de noter que, relativement a la filtration de Krull, seul intervient le quotient M/M_{2d}.

Soit X un espace dont la cohomologie M satisfait a la condition de finitude imposee ci-dessus sur les quotients de la filtration nilpotente. Cette condition permet d'appliquer le theoreme de Lannes sur la cohomologie des espaces fonctionnels. En effet elle implique que $T(M)$ est de dimension finie en chaque degre. On peut donc calculer la cohomologie de la cofibre $C(X)$ de $X \to \mathrm{map}(\mathbb{R}P^\infty, X)$ et effectuer la reduction de Kuhn [3]. C'est-a-dire que si $H^*X \in \mathcal{U}_n$, mais $H^*X \notin \mathcal{U}_{n-1}$, la cohomologie $H^*C(X) = \bar{T}(H^*X) \in \mathcal{U}_{n-1}$, mais $H^*C(X) \notin \mathcal{U}_{n-2}$. On peut donc raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe un espace X dont la cohomologie est dans $\mathcal{U}_n$, mais non dans $\mathcal{U}_{n-1}$, et par iteration, se ramener au cas d'un espace dont la cohomologie appartient a $\mathcal{U}_1$, mais pas a $\mathcal{U}_0$ et montrer que ceci est impossible.

La conjecture, sans l'hypothese de finitude faite ci-dessus, ne peut être analysee dans la categorie $\mathcal{U}$ et doit être remplacee par une conjecture portant sur la structure de l'homologie comme module instable a droite. Dans ce contexte on doit modifier la definition de la filtration de Krull dans le sens suggere par [4], *i.e.* on doit considerer une filtration decroissante sur la categorie des modules instables a droite. Ceci pose aussi la question d'une extension du theoreme de Lannes.

Une autre approche pour lever cette restriction de finitude est d'appliquer les techniques de pro-espaces de F. Morel, ceci a ete mis en oeuvre avec succes par F-X. Dehon et G. Gaudens.

Il reste la forme la plus generale de la conjecture de Kuhn (evoquee plus haut). Nous reformulons ici legerement cette conjecture, et pour ce faire le language des foncteurs [2], [7] est plus commode. En fait un certain nombre d'exemples suggerent que la description -et la technologie associee- qui suit pourraient constituer une approche interessante a cette conjecture.

Rappelons que l'on peut associer a un module instable reduit un foncteur analytique (limite directe de foncteurs polynômiaux) de la categorie des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbb{F}_2$ dans la categorie des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{F}_2$, par exemple au module $F(1)$ est associe le foncteur identite de degre 1. Ce foncteur determine le module initial a localisation pres. On a en fait une equivalence de categorie. Le module $R_s(H\; X)$ peut donc être interprete comme un tel foncteur :

Conjecture 0.2 *Soit X un espace. La suite des foncteurs $R_s(H\; X)$ est telle que :*

- *soit il y en a au moins un foncteur dont la serie de Loewy (ou serie des socles) est in nie et dont les facteurs de composition ne sont pas bornees en degre,*
- *soit tous les foncteurs R_s sont constants.*

En termes de modules instables cette conjecture 0.2 implique que l'un au moins des modules instables correspondants a un nombre in ni de generateurs.

Le fait que la serie des socles d'un foncteur associe a un module est in nie est plus fort que le fait que le module ne soit pas de type ni (*i.e.* ai un nombre ni de generateurs). La propriete correspondante du module est plus ennuyeuse a exprimer et moins naturelle. On renvoie a [9] pour des details.

A ce propos on notera que G. Gaudens a montre que la serie des socles du foncteur associe a une algebre instable reduite non concentree en degre zero est in nie.

On peut preciser 0.2 : Soit d le plus petit entier tel que R_d soit un foncteur non-constant et de degre ni, supposons $d > 1$. Alors on a :

Conjecture 0.3 *Un, au moins, des foncteurs R_s, $d < s < 2d + 1$ est de degre non borne.*

La conjecture 0.1 ci-dessus est un argument en faveur de 0.2. Un autre argument est l'exemple donne par Kuhn dans [3] de la ltration bar sur $K(Z;3)$. Le second cran de cette ltration fournit un espace X tel que $R_1(H\; X)$ soit isomorphe a $F(1)$, et donc a l'identite comme foncteur, mais $R_2(H\; X)$ a lui un nombre in ni de generateurs et a, en tant que foncteur, une serie des socles in nie.

Le plan de la demonstration du theoreme 0.1 est le même que dans [8]. Comme on l'a deja dit, le cas de [8] correspond a l'enonce 0:1 avec en plus l'hypothese que les quotients M_s=M_{s+1} sont nuls pour tout entier s assez grand. Rappelons tres brievement l'idee de [8]. On raisonne par l'absurde, et on suppose donc qu'il existe un espace X dont la cohomologie est dans U_1 mais n'est pas localement nie, *i.e.* n'appartient pas a U_0. On montre alors que, dans la cohomologie d'un certain espace de lacets iteres de X, la relation reliant le cup-carre aux operations de Steenrod ne peut être satisfaite.

La di erence fondamentale avec [8] est que l'hypothese faite dans cet article ne permet pas d'obtenir de zones d'annulation dans la cohomologie des espaces de lacets associes. On est amene a introduire des zones d'annulation modulo des termes de degre superieur de nilpotence.

Ceci fait qu'il est di cile d'obtenir un resultat concernant des complexes nis, dont on deduirait celui cherche, comme cela est fait dans [8]. Ceci est neanmoins possible, mais il y a peu d'espoirs d'obtenir des enonces generaux satisfaisants.

H. J. Baues a suggere la question suivante. Soit M un module instable, supposons que $M = H X$. Quelles sont plus generalement les restrictions sur la structure de M imposees par les proprietes de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore calculant la cohomologie de ΩX, en particulier imposee par le fait que l'aboutissement de la suite spectrale doit avoir une structure d'algebre instable?

Les sections 1 et 2 consistent d'abord en l'enonce des resultats concernant le comportement des foncteurs R_S sur la cohomologie des espaces quand on passe de X a ΩX, puis en des rappels sur la ltration nilpotente et la ltration de Krull. Dans la section 3 on demontre ces resultats a l'aide de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. On demontre le theoreme dans les sections 4 et 5. La section 6 donne un complement sur la ltration nilpotente.

L'idee essentielle de cet article a ete trouvee lors d'un sejour au CRM a l'Universitat Autonoma de Barcelona en Juin 1998. L'auteur tient a remercier le groupe de topologie algebrique, et en particulier J. Aguade et C. Broto, pour leur accueil chaleureux, Dagmar Meyer pour ses remarques, et le groupe de topologie algebrique de Tunis pour l'interêt qu'il a manifeste pour ce probleme.

On fera partout l'hypothese que les modules instables consideres sont de dimension nie en chaque degre.

L'auteur tient a remercier le rapporteur pour lui avoir signale quelques ambiguites, entre autres dans la de nition des classes , et dans la formulation d'un resultat de [3]. Il le remercie aussi pour lui avoir signale diverses references, en l'occurence celle de 0.2 dans [3] et celles de propositions 2.4 et 2.5 dans la même reference.

1 La filtration nilpotente de la categorie $\mathcal{U}$, les foncteurs R_s et les espaces de lacets

On rappelle d'abord les deux definitions de la filtration nilpotente sur la categorie $\mathcal{U}$ des modules instables. L'essentiel du materiel, concernant cette filtration, qui suit ne pretend pas a l'originalite, il est soit explicitement dans [6], [7], soit en est consequence immediate (voir [3]). Cependant les quelques ajouts (Propositions 1.8 a 1.12), faciles eux aussi, sont necessaires a un traitement clair de la suite. Nous avons dans ce texte conserve les conventions de [7], on prendra garde au decalage dans la definition des categories $\mathcal{N}il_k$ par rapport a [6]. Dans le contexte de [6] la categorie $\mathcal{U}$ est $\mathcal{N}il_{-1}$. La notation choisie ici, celle de [7], pour $\mathcal{U}$ est $\mathcal{N}il_0$.

Definition 1.1 Soit un entier $s \geq 0$, la categorie $\mathcal{N}il_s$ est la plus petite sous-categorie epaisse stable par limite directe, et qui contienne $\Sigma^s M$ pour tout module instable M. Un module qui appartient a $\mathcal{N}il_s$ est dit de degre de nilpotence (au moins) s, ou (au moins) s-nilpotent.

On remarquera qu'un module s-nilpotent est $(s-1)$-connexe.

La filtration nilpotente est decroissante et convergente. La filtration de la categorie induit sur chaque module instable une filtration decroissante, que l'on appellera filtration nilpotente du module.

Si M est un module instable on notera M_s son plus grand sous-module instable s-nilpotent, cette notation sera conservee dans tout l'article.

Definition 1.2 On dira qu'un element d'un module instable est de degre de nilpotence au moins s, ou s-nilpotent, si le sous-module qu'il engendre est de degre de nilpotence au moins s. On dira qu'un element est de degre de nilpotence exactement s s'il est de degre au moins s et s'il n'est pas de degre au moins $s+1$. Un tel element est necessairement non-nul.

Definition 1.3 On note Sq_k l'operation qui a un element x de degre $|x|$ d'un module instable M associe la classe $\mathrm{Sq}^{|x|-k}x$ de degre $2|x|-k$.

Par convention $\mathrm{Sq}_k x = 0$ des que $k > |x|$. A cause de l'instabilite on a $\mathrm{Sq}_k x = 0$ des que $k < 0$.

Soit M un module instable et soit $\Sigma^s(M)$. Soit $x \in M$, on note $\Sigma^s x$ la s-ieme suspension de x. On a :

$$\Sigma^s(\mathrm{Sq}_k)(x)) = (\mathrm{Sq}_{k+s})(\Sigma^s x) :$$

Proposition 1.4 [6] *Soit M un module instable. Les conditions suivantes sont equivalentes :*

- *M est (au moins) s-nilpotent,*
- *pour tout $x \in M$ et tout entier k tel que $0 \leq k < s$, il existe un entier c, dependant de x et k, tel que $(\mathrm{Sq}_k)^c x = 0$.*

Pour $s = 0$ la condition est vide, on trouve donc bien $\mathcal{U}$.

C'est par la seconde condition de cette proposition que la filtration nilpotente a ete introduite dans [6]. En fait, dans les applications qui en ont ete donnees jusqu'ici, c'est, presque toujours, la premiere condition (*i.e.* la definition 1.1) qui a ete utilisee. Dans cet article la condition originelle de [6] joue un rôle important. Pour cette raison, et parce que les indications de [6] sont un peu seches, on redonnera en fin de l'article la demonstration du point cle de la proposition precedente.

Soit M un module instable et M_s son plus grand sous-module instable s-nilpotent. Chaque module instable admet une filtration decroissante et convergente :

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots M_s \supseteq \ldots$$

Reprenant la notation de [3] on notera le quotient M_s/M_{s+1} sous la forme $\Sigma^s R_s(M)$, $R_s(M)$ est un module instable **reduit**, c'est-a-dire ne contenant pas de suspension non-triviale ([7] section 2.6). La definition de R_s est naturelle et R_s est un foncteur en M. On trouvera dans [3] une caracterisation intrinseque de la filtration nilpotente.

Par ailleurs, comme les foncteurs T et $\bar{T}$ de Lannes commutent aux suspensions et sont exacts, ils respectent cette filtration. Par consequent on a pour tout module instable M :

$$T(M_s) = T(M)_s \quad \text{et} \quad \bar{T}(M_s) = \bar{T}(M)_s\,.$$

Deux modules instables **reduits** M et N seront dits fortement $\mathcal{F}$-isomorphes si ils ont même $\mathcal{N}il$-localisation ([7] section 6.3). On notera $M \cong_{\mathcal{F}} N$. Ceci revient a dire qu'il existe un module instable L tel que :

- L admet un monomorphisme i dans M et un monomorphisme j dans N,
- pour tout element non-nul x dans M il existe un entier c tel que $(\mathrm{Sq}_0)^c x$ est dans l'image de i et non-nul, pour tout element non-nul x dans N il existe un entier c tel que $(\mathrm{Sq}_0)^c x$ soit dans l'image de j et non-nul.

Le module L ci-dessus est necessairement reduit.

Un monomorphisme $i : N \to M$ est un $\mathcal{F}$-isomorphisme fort si et seulement si pour tout $x \in M$, $x \neq 0$, il existe un entier c -dependant de x- tel que $\mathrm{Sq}_0^c(x) \in N$, et $\mathrm{Sq}_0^c(x) \neq 0$.

Les trois theoremes suivants decrivent le comportement de certains des foncteurs R_s quand on passe d'un espace X a son espace de lacets ΩX. Ils seront demontres dans la section 3, ce sont eux qui permettent de demontrer la conjecture. Apres leur enonce, les sections 1 et 2 sont consacres aux preliminaires algebriques a leur demonstration. Ainsi qu'il a ete dit dans l'introduction ces preliminaires se trouvent pour une part substantielle dans les references, neanmoins un certain nombre de precisions apportees ici seraient totalement hors contexte, pour le non-expert, si des rappels n'etaient pas effectues.

Theoreme 1.5 *Soit X un espace 1-connexe tel que H^*X est de dimension finie en chaque degre et que $H^*X \in \mathcal{N}il_d$, $d > 1$. Alors $H^*\Omega X \in \mathcal{N}il_{d-1}$ et pour $d-1 \leq s < 2d-2$ on a :*

$$R_s(H^*X) \cong_{\mathcal{F}} R_{s-1}(H^*\Omega X) :$$

On peut se demander si il n'y a pas, en fait, isomorphisme.

Theoreme 1.6 *Soit X un espace 1-connexe tel que H^*X soit de dimension finie en chaque degre et que $H^*X \in \mathcal{N}il_d$, $d > 1$. Alors $H^*\Omega X \in \mathcal{N}il_{d-1}$ et le module instable $R_{2d-2}(H^*\Omega X)$ est fortement $\mathcal{F}$-isomorphe a un module instable E donne par une extension de la forme :*

$$\{0\} \to R_{2d-1}(H^*X) \to E \to M \to \{0\} ;$$

ou M est un sous-module de $(R_d(H^*X))^{\otimes 2}$.

Soit F_{-2} le deuxieme terme de la filtration d'Eilenberg-Moore de $H^*\Omega X$ (voir section 2). Si $d = 1$ les enonces precedents sont remplaces par :

Theoreme 1.7 *Soit X un espace 1-connexe tel que H^*X est de dimension finie en chaque degre et que $H^*X \in \mathcal{N}il_1$. Alors le module instable $R_0(F_{-2}(H^*\Omega X))$ est fortement $\mathcal{F}$-isomorphe a un module E donne par une extension de la forme :*

$$\{0\} \to R_1(H^*X) \to E \to M \to \{0\} ;$$

ou M est un sous-module de $(R_1(H^*X))^{\otimes 2}$.

Les propositions 1.8 et 1.9 decrivent le comportement des foncteurs R_s par rapport aux suites exactes.

Proposition 1.8 *Soit M un module instable, et soit d un entier donne, $k \geq 1$. On suppose qu'il existe une suite exacte :*

$$0 \to K \to M \to N \to 0\,;$$

avec $K \in \mathcal{N}il_k$. Alors si $s < k$ on a :

$$R_s(M) = R_s(N)\,.$$

Il suffit de demontrer que l'application $M/M_k \to N/N_k$ est bijective. Elle est surjective par construction, il suffit de donc montrer qu'elle est injective. La difficulte vient de ce que le foncteur $M \mapsto M_k$ n'est pas exact a droite. Mais un element $x \in M/M_k$ d'image nulle dans N/N_k se releve en un element $y \in M$ dont l'image dans N appartient au sous-module N_k. Il faut montrer que $y \in M_k$. Pour ce faire il suffit de montrer que $(\mathrm{Sq}_i)^c y$ est nul des que c est assez grand, pour $0 \leq i < k$. Soit z l'image de y dans N, $z \in N_k$.

On a donc :

$$(\mathrm{Sq}_i)^c z = 0; \qquad 0 \leq i < k; \qquad \text{si } c \geq c_0\,.$$

Chacun des elements $(\mathrm{Sq}_i)^{c_0} y$, $0 \leq i < k$ appartient donc a C qui est k-nilpotent. Le resultat suit.

Proposition 1.9 *Soit M un module instable, et soit d un entier donne, $d \geq 1$. On suppose qu'il existe une suite exacte :*

$$0 \to N \to M \to C \to 0\,;$$

avec

- $N \in \mathcal{N}il_d$,
- $C \in \mathcal{N}il_{2d}$.

Alors :

- *le module M est dans $\mathcal{N}il_d$,*
- *si $d \leq s < 2d$ on a :*
$$R_s(N) =_{\mathcal{F}} R_s(M)\,;$$
- *$R_{2d}(M) =_{\mathcal{F}} E$ ou E est donne par une extension de la forme :*
$$\{0\} \to R_{2d}(N) \to E \to L \to \{0\}\,;$$
L designant un sous-module de $R_{2d}(C)$.

Demonstration :

Une application de modules instables $f : N \to M$ respecte la filtration nilpotente et induit donc pour tout s une application $f_s : N_s \to M_s$ et une application $f_s : R_s(N) \to R_s(N)$. Le foncteur $M \mapsto M_s$ est exact a gauche. Il est facile de voir que si f est un monomorphisme il en est de même pour chaque f_s.

Le premier enonce de la proposition est clair.

Passons a la seconde partie, soit $s < 2d$.

Notons i l'injection de N dans M et p la projection de M sur C. Considerons le diagramme ou les notations sont evidentes :

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & N_{s+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M_{s+1} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r] & N_s \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M_s \arrow[r, "p"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r] & \Sigma^s R_s(N) \arrow[r, "i"] & \Sigma^s R_s(M) \arrow[r, "p"] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

On notera que $C_{s+1} = C_s = C$.

Par hypothese le conoyau de l'injection $i_s : N_s \to M_s$ est dans Nil_{2d} et $C_{s+1} = C_s = C$. Soit x une classe non-nulle dans M_s/M_{s+1} et soit $x \in M_s$, $x \neq 0$ un relevement dans M_s. Soit y l'image de x dans C. Comme $s < 2d$ il existe un entier c -dependant de x- tel que $(\mathrm{Sq}_s)^c y = 0$. Donc la classe $(\mathrm{Sq}_s)^c x$ est d'image nulle dans C et si $k \geq c$ $(\mathrm{Sq}_s)^k x \in i(N)$.

Soit $\Sigma^{-s} x \in R_s(M)$ la s-ieme desuspension de l'image de

$$x \in M_s/M_{s+1} \cong \Sigma^s R_s(M) :$$

On a :

$$\Sigma^{-s}((\mathrm{Sq}_s)^k(x)) = (\mathrm{Sq}_0)^k(\Sigma^{-s} x) \in ((R_s(N)) ;$$

si $k \geq c$. On a donc demontre que $(\mathrm{Sq}_0)^k(\Sigma^{-s} x)$ est non-nulle et dans l'image de i_s pour tout $k \geq c$. Ceci donne la seconde partie de la proposition.

Passons a la troisieme partie, et faisons donc $s = 2d$. La demonstration va occuper la fin de cette section. Si on a une suite exacte :

$$\{0\} \to N \to M \to C \to \{0\}$$

le complexe :

$$\{0\} \to R_{2d}(N) \to R_{2d}(M) \to R_{2d}(C) \to \{0\}$$

n'est pas exact au centre et a droite. En fait le complexe de foncteurs [2] :

$$\{0\} \to f(R_{2d}(N)) \to f(R_{2d}(M)) \to f(R_{2d}(C))$$

est exact. Ceci se traduit, en termes de modules instables, par la proposition suivante :

Proposition 1.10 *Il existe un diagramme commutatif de modules instables ou la ligne superieure est exacte :*

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & R_{2d}(N) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & K \arrow[r] \arrow[d, "i"] & L \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & R_{2d}(N) \arrow[r] & R_{2d}(M) \arrow[r] & R_{2d}(C) &
\end{tikzcd}$$

et ou i est un F-isomorphisme fort, et j est un monomorphisme.

Demontrons cette propriete. Comme le foncteur $M \mapsto M_{2d}$ est exact a gauche on a evidemment un complexe exact a gauche et au centre :

$$0 \to N_{2d} \to M_{2d} \to C_{2d}\,;$$

et donc un complexe :

$$0 \to R_{2d}(N) \to R_{2d}(M) \to R_{2d}(C)\,;$$

ou, *a priori*, on sait seulement que la premiere application est injective. Avec les mêmes notations que plus haut, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & N_{2d+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M_{2d+1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & C_{2d+1} \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r] & N_{2d} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M_{2d} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & C_{2d} \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r] & \Sigma^{2d}R_{2d}(N) \arrow[r, "i"] & \Sigma^{2d}R_{2d}(M) \arrow[r, "\pi"] & \Sigma^{2d}R_{2d}(C)
\end{tikzcd}$$

La ligne inferieure est exacte au milieu au sens donne par le lemme suivant :

Lemme 1.11 *Si un element $x \in \Sigma^{2d}R_{2d}(M)$ est dans le noyau de p, alors pour tout k assez grand $(\mathrm{Sq}_{2d})^k x$ est dans l'image de i.*

La demonstration est identique a celle donnee plus haut et laissee au lecteur.

Pour demontrer la proposition il reste a construire le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & R_{2d}(N) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & K \arrow[r] \arrow[d, "i"] & L \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & R_{2d}(N) \arrow[r] & R_{2d}(M) \arrow[r] & R_{2d}(C) &
\end{tikzcd}$$

avec les proprietes requises.

Le lemme suivant permet de construire K :

Lemme 1.12 *Soit H un module instable reduit, et soit J un sous-module. Alors il existe un sous-module H' de H tel que :*

$H' =_F H$,

si $x \in H'$ et $\mathrm{Sq}_0 x \in J$ alors $x \in J$.

La demonstration procede en deux etapes. D'abord si H a un nombre fini de generateurs sur l'algebre de Steenrod on montre que $(\mathrm{Sq}_0)^k(H) + J$ convient des que k est assez grand. En effet, soit J_h le sous-module de H constitue par les elements $x \in H$ tels que $(\mathrm{Sq}_0)^h x \in J$, on a $J_h \subset J_{h+1} \subset \ldots$. Comme J a un nombre fini de generateurs il existe un entier k tel que $J_k = J_{k+1} = \ldots$. On verifie que $(\mathrm{Sq}_0)^k(H) \cap J_k \subset J$ et que $(\mathrm{Sq}_0)^k(H) + J$ convient (on utilise l'injectivite de Sq_0). Puis un argument de limite directe convenable, utilisant le fait que les modules consideres sont de dimension finie en chaque degre permet de conclure. En fait on ne considerera que des modules ayant un nombre fini de generateurs et on n'aura pas besoin de cette generalisation.

Pour terminer la demonstration de la proposition on applique le lemme avec $H = R_{2d}(M)$ et $J = R_{2d}(N)$ Le module L est alors le quotient de K par l'image de $R_{2d}(N)$.

En fait le lemme 1.12 peut être precise en utilisant les notations de [2], et notamment les foncteurs m et f. On montre que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & R_{2d}(N) \arrow[r] \arrow[d] & R_{2d}(M) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & L \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & m\, f(R_{2d}(N)) \arrow[r] & m\, f(R_{2d}(M)) \arrow[r] & m\, f(R_{2d}(C)) &
\end{tikzcd}$$

ou chaque ligne est exacte et j a un noyau dans Nil_1.

2 La filtration de Krull de la categorie U

Rappelons la definition de la filtration de Gabriel-Krull sur la categorie $\mathcal{U}$ (voir [1]).

Un module instable est localement fini s'il est limite directe de modules instables finis. La sous-categorie pleine, $\mathcal{B}$ des modules localement finis est le premier terme de la filtration de Gabriel-Krull sur la categorie $\mathcal{U}$. Rappelons la definition de cette filtration, $\mathcal{U}_0$ est la plus petite classe de Serre de $\mathcal{U}$, stable par limite directe et contenant tous les objets simples de $\mathcal{U}$. Comme ceux-ci sont de la forme $\Sigma^n \mathbb{F}_2$, $\mathcal{U}_0$ s'identifie a $\mathcal{B}$. Cette construction s'etend a toute categorie abelienne $\mathcal{A}$. Supposons que $\mathcal{U}_n$ ait ete definie, definissons alors $\mathcal{U}_{n+1}$ comme etant la sous-categorie pleine de $\mathcal{U}$ definie comme suit. Dans la categorie quotient $\mathcal{U}/\mathcal{U}_n$ on considere la plus petite sous-categorie epaisse qui est stable par limite directe et qui contient tous les objets simples de $\mathcal{U}/\mathcal{U}_n$. Alors, un objet M de $\mathcal{U}$ appartient a $\mathcal{U}_n$, si et seulement si en tant qu'objet de la categorie abelienne $\mathcal{U}/\mathcal{U}_n$, il appartient a la sous-categorie $(\mathcal{U}/\mathcal{U}_n)_0$.

Theoreme 2.1 ([7] section 6.2) *La plus petite sous-categorie de $\mathcal{U}$ contenant toutes les categories $\mathcal{U}_n$, et stable par limite directe, est $\mathcal{U}$ elle même.*

Voici une caracterisation de la filtration de Krull a l'aide de T.

Theoreme 2.2 ([7] 6.2.4) *Soit M un module instable. Alors M appartient a $\mathcal{U}_n$ si et seulement si $T^{n+1}M$ est trivial.*

On decrit maintenant en details les objets de $\mathcal{U}_1$, ce resultat est dans [8], avec l'hypothese supplementaire que le module a un nombre fini de generateurs. La demonstration, ne change en rien, et est donnee rapidement.

Proposition 2.3 *Soit un module instable M qui appartient a U_1, mais qui n'appartient pas a U_0. Soit $K = T(M)$, alors K est localement fini et non-trivial, et il existe une suite exacte :*

$$0 \to L \to M \to K \otimes F(1) \to L' \to 0\,;$$

ou L et L' sont localement finis.

Par definition de T on a une application

$$M \to K \otimes H^* RP^1 :$$

Le noyau de cette application est localement fini, notons le L. En effet, la definition de T donne, par adjonction, $TL = \{0\}$. On a vu plus haut que cette condition caracterise les modules localement finis. On demontre comme dans [8], que cette application est a valeurs dans $K \otimes F(1)$.

Pour montrer que le conoyau L' est localement fini, affirmation la plus facile, il suffit d'appliquer le foncteur T a la suite exacte :

$$0 \to L \to M \to K \otimes F(1) \to L' \to 0\,;$$

ce qui donne $T(L') = 0$.

On va maintenant decrire la filtration nilpotente sur un tel module. Le resultat suivant est une consequence elementaire de la definition de cette filtration.

Proposition 2.4 *Soit M un module instable localement fini. Le sous-module M_s de M est le sous-module des elements de degre superieur ou egal a s.*

La demonstration est laissee en exercice au lecteur (voir aussi [3]). Dans ce cas la filtration nilpotente s'identifie donc a la filtration par le degre.

Si $M \in U_1$ on applique 1.14. Si le module K est localement fini c'est encore un exercice facile de verifier que la filtration nilpotente sur $K \otimes F(1)$ est induite, par produit tensoriel par $F(1)$, par la filtration par le degre sur K. Ceci est demontre en details et en plus grande generalite dans [3], et est d'ailleurs une consequence immediate de [6]. On en deduit donc que :

Corollaire 2.5 *Si K est localement fini on a :*

$$R_s(K \otimes F(1)) = K_s \otimes F(1)\,;$$

K_s etant compris comme un module instable concentre en degre zero.

Ceci decrit, par restriction, la filtration sur le quotient M/L.

Le resultat suivant est corollaire des deux propositions precedentes.

Corollaire 2.6 *Soit M un module instable qui appartient a $\mathcal{U}_1$. Supposons que M doit k-connexe. Soit alors s un entier tel que $s \geq k$, le module $R_s(M)$ est trivial dans les degres qui ne sont pas une puissance de 2.*

La condition de connexite est la pour garantir que L est k-nilpotent, et que l'on peut appliquer 1.8.

On aura aussi considerer des modules reduits qui sont produit tensoriel de deux modules dans $\mathcal{U}_1$ et des extensions de tels modules par des modules dans $\mathcal{U}_1$. La proposition suivante est vraie, par construction, pour ces modules. Ces modules sont dans la categorie $\mathcal{U}_2$ [FS], [7], et il est interessant de donner la propostion dans son contexte general, ne serait ce que parce que pour montrer que le resultat n'est pas fortuit.

Proposition 2.7 [FS] *Soit M un module instable reduit qui appartient a $\mathcal{U}_2$. Supposons que M soit 0-connexe. Alors M est trivial dans les degres qui ne sont pas de la forme 2^h, $h \geq 0$, ou $2^i + 2^j$, $i > j \geq 0$.*

La condition de connexite est la pour ne pas ne pas avoir a inclure 0 dans la liste des degres.

Les enonces qui suivent specialisent la proposition 1.9 au cas considere dans l'article.

Proposition 2.8 *Soit M un module instable, et soit d un entier donne, $d \geq 1$. On suppose qu'il existe une suite exacte :*

$$0 \to N \to M \to D \to 0,$$

avec

- *$N \in \mathcal{N}il_d$,*
- *$D \in \mathcal{N}il_{2d}$,*
- *la connectivite de M est superieure ou egale a $2d$,*
- *le quotient N/N_{2d}, est dans $\mathcal{U}_1$,*
- *le module $R_{2d}(N)$ est dans $\mathcal{U}_1$, le module $R_{2d}(D)$ est dans $\mathcal{U}_2$.*

Alors :

- *le module M est dans Nil_d et donc $R_s(M) = \{0\}$ si $s < d$. ,*
- *le module $R_k(M)$, avec $d \leq k < 2d$, est dans $\mathcal{U}_1$, connexe, et donc trivial dans les degres qui ne sont pas une puissance de 2,*
- *le quotient $R_{2d}(M)$ est dans $\mathcal{U}_2$, connexe, et donc trivial dans les degres qui ne sont pas de la forme 2^h, $h \geq 0$ ou de la forme $2^h + 2^j$, $h > j \geq 0$.*

Demonstration : La premiere partie est claire. La seconde resulte de 1.9 et 2.5, utilisant que le quotient N/N_{2d}, est dans $\mathcal{U}_1$. La troisieme resulte de 1.9 et 2.6, utilisant que le module $R_{2d}(N)$ est dans $\mathcal{U}_1$ et connexe, et que le module $R_{2d}(D)$ est dans $\mathcal{U}_2$ et connexe.

Dans l'enonce les conditions de connectivite sont de convenance. On pourrait les supprimer et remplacer les categories Nil_k par les categories Nil_k [7], ou encore rajouter dans les conclusions, aux degres 2^h, le degre 0, et aux degres $2^j + 2^h$, le degre 0. Ceci entraînerait quelques modifications mineures dans la suite, dans les enonces et les demonstrations. Il faudrait prendre garde a la convergence de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. Ceci pourrait être fait comme dans [7].

Un enonce analogue a lieu pour $d = 0$:

Proposition 2.9 *Soit M un module instable. On suppose qu'il existe une suite exacte :*

$$0 \to N \to M \to C \to 0;$$

avec

- *M est connexe,*
- *le quotient $N/N_1 = R_0(N)$, est dans $\mathcal{U}_1$, le quotient $C/C_1 = R_0(C)$, est dans $\mathcal{U}_2$.*

Alors :

- *le quotient $M/M_1 = R_0(M)$ est dans $\mathcal{U}_2$, connexe, et donc trivial dans les degres qui ne sont pas de la forme 2^h, ≥ 0 ou de la forme $2^h + 2^j$ $j > h \geq 0$.*

Demonstration : Comme plus haut.

3 Applications à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore

On va appliquer les résultats précédents dans le contexte de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. Rappelons en les propriétés principales [Re], [10]. Soit X un espace 1-connexe.

La cohomologie modulo 2 de ΩX a une filtration naturelle décroissante et convergente par des modules instables :

$$\ldots \supset F_{-s} \supset F_{-s+1} \ldots \supset F_{-1} \supset F_0 \supset \{0\} .$$

Le quotient $\Sigma^d(F_{-d}/F_{-d+1})$ est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel gradué à la colonne $E_\infty^{-d,*}$ de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore.

Le terme $E_2^{-d,*}$ de la suite spectrale est isomorphe à $\mathrm{Tor}^{-d}_{H^*X}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$. Ce module est un sous-quotient de $\tilde{H}^*X^{\otimes d}$, et la formule de Cartan y détermine une structure de module instable.

Soit $r \geq 2$, les différentielles s'interprètent comme des applications de degré zéro :

$$d_r : E_r^{s,*} \to \Sigma^{r-1}(E_r^{s+r,*}) .$$

Ce sont des applications de modules instables. On a donc sur le terme $E_\infty^{-d,*}$ une seconde structure de module instable. Elle est identique à la précédente.

On va étudier le comportement des foncteurs R_s quand on passe de X à ΩX. On a :

Proposition 3.1 *Soit X un espace tel que H^*X soit de dimension finie en chaque degré et que $H^*X \in \mathcal{N}il_d$, $d > 1$. Alors $H^*\Omega X \in \mathcal{N}il_{d-1}$ et pour $d \leq s < 2d-1$ on a :*

$$R_s(H^*X) =_{\mathcal{F}} R_{s-1}(H^*\Omega X) .$$

On a évidemment $R_s(H^*X) = \{0\}$ si $s < d$, et $R_s(H^*\Omega X) = \{0\}$ si $s < d-1$.

Démonstration : On va comparer H^*X, F_{-1} et $H^*\Omega X$. Pour ce faire on commence par considérer l'homomorphisme de coin, dont on rappelle qu'il est induit par l'application canonique d'évaluation

$$\Sigma\Omega X \to X .$$

Il se décompose comme suit :

$$H^*X \to QH^*X \to \Sigma F_{-1} \to \Sigma H^*\Omega X ,$$

où $QH^*X = \tilde{H}^*X/(\tilde{H}^*X)^2$.

Commencons par examiner le conoyau de $F_{-1} \to H^*\Omega X$. Le module instable $\Sigma^s(F_{-s}/F_{-s+1})$ est un sous-quotient de $\mathrm{Tor}^{-s}_{H^*X}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$, qui est lui même un sous-quotient de $\bar{H}^*X^{\otimes s}$. Or, il resulte de [6] que le produit tensoriel d'un module L dans $\mathcal{N}il_u$ par un module L' dans $\mathcal{N}il_v$ est dans $\mathcal{N}il_{u+v}$. On en deduit que

$$\mathrm{Tor}^{-s}_{H^*X}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$$

est dans $\mathcal{N}il_{sd}$. Le sous-quotient itere $E_1^{-s,*}$ est dans $\mathcal{N}il_{sd}$. Donc le quotient F_{-s}/F_{-s+1} est dans $\mathcal{N}il_{sd-s}$. Le quotient $H^*\Omega X/F_{-1}$ admet une filtration decroissante dont les termes sont les modules F_{-i}/F_{-2}, $i \geq 2$. Changeant $-i$ en i, $i \geq 2$ on obtient une filtration croissante dont le i-ieme quotient est dans $\mathcal{N}il_{i(d-1)}$. Comme les categories $\mathcal{N}il_k$ sont des classes de Serre, et sont stables par limite directe, on en conclut que le quotient $H^*\Omega X/F_{-1}$ est $(2d-2)$-nilpotent.

On peut appliquer la proposition 1.9 a :

$$\{0\} \to F_{-1} \to H^*\Omega X \to H^*\Omega X/F_{-1};$$

et en conclure que :

$$R_s(F_{-1}) =_{\mathcal{F}} R_s(H^*\Omega X)$$

pour $s < 2d-2$.

Le noyau de $H^*X \to QH^*X$ est egal a $(\bar{H}^*X)^2$ et est $2d$-nilpotent. Il en resulte (Proposition 1.8) que l'application :

$$R_s(H^*X) \to R_s(QH^*X)$$

est un isomorphisme pour $s < 2d$. Le noyau de $QH^*X \to \Sigma F_{-1}$ est l'image des differentielles dans $E_2^{-1,*} = QH^*X$. La description des differentielles donnee plus haut et le fait que la colonne $E_r^{-s,*}$ soit sd-nilpotente implique que cette image est $2d$-nilpotente, $d \geq 1$. Il en resulte (Proposition 1.8) que l'application :

$$R_s(H^*X) \to R_s(\Sigma F_{-1})$$

est un isomorphisme pour $s < 2d$.

L'ensemble de ces resultats donne la proposition.

On etudie maintenant le cas de $R_{2d-2}(H^*\Omega X)$. Le resultat suivant est consequence de la proposition 1.9 :

Proposition 3.2 *Soit X un espace. On suppose que H^*X est d-nilpotent, $d > 1$. Alors :*

$R_{2d-2}(H\ \Omega X)$ est fortement F-isomorphe a un module E donne par une extension de la forme :

$$\{0\} \to R_{2d-1}(H\ X) \to E \to L \to \{0\};$$

ou L est un sous-module de $R_d(H\ X)\ ^2$

Si $d = 1$ on a un resultat analogue en substituant F_{-2} a $H\ \Omega X$.

Demonstration : On commence par observer que

$$R_{2d-2}(F_{-2}) =_F R_{2d-2}(H\ \Omega X):$$

Ceci resulte de 1:9 et du fait que $H\ \Omega X{=}F_{-2}$ est $3d-3$-nilpotent, demontre comme plus haut. Il reste donc a analyser $R_{2d-2}(F_{-2})$, ce qu'on fait par devissage et application de 1:9 en considerant la suite exacte :

$$\{0\} \to F_{-1} \to F_{-2} \to F_{-2}{=}F_{-1} \to \{0\}:$$

Le module instable F_{-1} est -a suspension pres- l'image de l'homomorphisme de coin (voir la demonstration qui precede). Le module instable $^2(F_{-2}{=}F_{-1})$ est un sous-quotient de $\mathrm{Tor}^{-2}_{H\ X}(\mathbb{F}_2; \mathbb{F}_2)$, qui est lui même un sous-quotient de $H\ X\ ^2$. Du fait que les di erentielles ont des images au moins $3d$-nilpotentes et de la proposition 1:8 et on deduit que $R_{2d}(\ ^2(F_{-2}{=}F_{-1}))$ est isomorphe a un sous-module de $R_d(H\ X)\ ^2$.

Le resultat suit.

Les enonces suivants adaptent et precisent les enonces precedents au contexte, ils en sont consequence directe.

Theoreme 3.3 *Soit d un entier strictement superieur 1, soit X un espace, et soit $H\ X$ sa cohomologie reduite. Supposons que :*

$H\ X$ appartient a Nil_d,

la connectivite de $H\ X$ est strictement superieure a $2d$,

le quotient $H\ X{=}(H\ X)_{2d}$ est dans U_1.

Alors

$H\ \Omega X$ appartient a Nil_{d-1},

la connectivite de $H\ \Omega X$ est superieure a $2d-2$,

le module $R_s(H\ \Omega X)$, $d-1 \quad s < 2d-2$, est dans U_1, connexe, et donc trivial dans les degres qui ne sont pas de la forme 2^h, $h \quad 0$,

> *le module* $R_{2d-2}(H^*\Omega X)$ *est dans* U_2*, connexe, et donc trivial dans les degres qui ne sont pas de la forme* 2^h*,* $h \geq 0$*, ou* $2^h + 2^j$*,* $h > j \geq 0$.

La demonstration est consequence de 3.1, 3.2, 2.5, et 2.6.

Un enonce particulier est necessaire dans le cas, exclu ci-dessus, ou $d = 1$. L'enonce est similaire, mais le resultat ne s'applique qu'au sous-module F_{-2} de $H^*\Omega X$:

Theoreme 3.4 *Soit* X *un espace, et soit* H^*X *sa cohomologie reduite. Supposons que :*

> H^*X *appartient a* Nil_1*,*
>
> *la connectivite de* H^*X *est superieure a* 2*,*
>
> *le module* $R_1(H^*X)$ *est dans* U_1*.*

Alors

> *le quotient* $R_0(F_{-2}(H^*\Omega X))$ *est dans* U_2*, connexe, et donc trivial dans les degres qui ne sont pas de la forme* 2^h*,* $h \geq 0$ *et* $2^h + 2^j$*,* $j > h \geq 0$.

La demonstration est identique a celle faite plus haut mais on doit se restreindre a F_{-2}.

4 Construction de classes dans la cohomologie des espaces de lacets

On va maintenant donner le debut de la demonstration du theoreme 0.1. La reduction de Kuhn permet de supposer qu'il existe un espace X dont la cohomologie appartienne a U_1, mais pas a U_0. Cette reduction s'effectue comme dans le cas precedent, le seul probleme est d'assurer les conditions d'application du theoreme de Lannes sur la cohomologie des espaces fonctionnels.

On peut appliquer le theoreme de Lannes pour la raison suivante. On a suppose que chaque quotient de la filtration nilpotente a un nombre fini de generateurs, ceci implique que H^*X est de dimension finie en chaque degre. De plus l'hypothese est preservee par application de T. Ceci implique que $T(H^*X)$ est de dimension finie en chaque degre, ce qui permet de calculer la cohomologie de l'espace fonctionnel a l'aide du theoreme de Lannes.

La proposition 2.3 s'applique a la cohomologie de X en posant $M = H^*X$ et $K = T(H^*X)$. Le module instable K est non trivial. Soit $d - 1$ sa connexite, l'entier d designera dorenavant, et pour toute la suite cette constante. Le module instable K est inchange quand on remplace H^*X par un sous-module M' tel que le quotient H^*X/M' soit fini. Ceci implique, en particulier, que K est inchange, quand on quotiente X par un sous-complexe de dimension finie. On peut donc supposer, par commodite, la connectivite de X aussi grande que l'on veut, donc on peut la supposer superieure a $2d$.

On doit traiter d'abord le cas ou $d = 0$. Dans ce cas, par hypothese, et a cause de 2.5, le quotient de H^*X par son sous-module nilpotent maximal est non-nul seulement en degre de la forme 2^h. Le sous-module nilpotent maximal est un ideal, le quotient est donc aussi une algebre instable. Soit x est un element non-nul dans ce quotient. Toutes les puissances x^{2^h} sont non nulles. L'element x^3 est aussi non-nul, car x^4 est non-nul. Le degre de x^3 n'est pas une puissance de 2, il y a donc une contradiction et d n'est pas nul.

Supposons donc $d \geq 1$, et introduisons, comme dans [8], des classes dans la cohomologie de X et de ses espaces de lacets iteres. Rappelons que l'on identifie $F(1)$, comme a l'ordinaire, avec le sous-module instable, de $H^*B\mathbb{Z}/2 = \mathbb{F}_2[u]$, engendre par u et qui admet pour base sur $\mathbb{F}_2$ les elements u^{2^i}. On peut appliquer la proposition 2.3 a H^*X. Considerons alors une classe $\omega \in K^d$, $\omega \neq 0$ et les classes

$$\omega \otimes u^{2^j} \in K \otimes F(1) .$$

Faisons l'hypothese suivante. Soit $A\omega$ le module instable engendre par ω. On sait qu'il est fini puisque c'est un sous-module de K qui est localement fini. Supposons $A\omega$ nul en degre superieur ou egal a h. Soit un entier k tel que $2^{k-1} \geq h$, sous cette hypothese la formule de Cartan montre que : $Sq^{2^{k+i}}(\omega \otimes u^{2^{k+i}}) = \omega \otimes u^{2^{k+i+1}}$.

D'apres 2.3 il existe un entier positif k_0, dependant de ω, tel que $\omega \otimes u^{2^j} \in K \otimes F(1)$ se releve a H^*X des que $j \geq k_0$. On notera $\lambda_{i,d}$ ces relevements, ils sont de degre $2^{k_0+i}+d$. *A priori* ils ne sont definis que modulo un element localement fini, mais on peut les determiner de maniere univoque en choisissant $\lambda_{0,d}$ et en supposant qu'ils verifient $Sq^{2^{k_0+i}}(\lambda_{i,d}) = \lambda_{i+1,d}$.

L'entier k_0 restera fixe dans toute la suite de la demonstration.

Quitte a suspendre l'espace X on peut supposer que tous les produits de classes de degre strictement positif sont nuls. On peut donc supposer que :

$$\lambda_{i,d}^2 = 0 .$$

Soit ℓ tel que $0 \leq \ell \leq d$. Definissons des classes $\lambda_{i,\ell}$, $i \geq 0$, de degre $2^{k_0+i}+\ell$, dans $\tilde{H}^*\Omega^{d-\ell}X$ comme etant les images, desuspendues $d-\ell$ fois, des classes

$_{i;d}$ par l' homomorphisme de coin itere

$$Q(H\ X)\ !\quad ^{d-\ell}H\ \Omega^{d-\ell}X\ :$$

Elles sont de degre $2^{k_0+i}+\ell$ dans $\tilde{H}\ \Omega^{d-\ell}X$. On va demontrer qu'elles ont les proprietes suivantes :

- $_{i;\ell}$ est detectee dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de $\Omega(\Omega^{d-(\ell+1)}X)$ par l'image des classes $_{i;\ell+1}$ dans la colonne -1,
- $Sq^{2^{k_0+i}}\ _{i;\ell} = \ _{i+1;\ell}$,
- ces classes sont de degre de nilpotence ℓ, exactement,
- $^2_{i;\ell} = 0$, pour tout i assez grand.

On ne donne pas de borne pour i dans la derniere condition.

Pour $\ell = 0$, les deux dernieres conditions, sont contradictoires. Ceci demontrera le theoreme.

Les proprietes de ces classes vont être demontrees par recurrence descendante. Les classes $_{i;d}$ introduites plus haut satisfont aux conditions requises. Ceci permet de debuter la recurrence.

Supposons donc les proprietes etablies pour les classes $_{i;\ell}$; $\ell\quad 1$, et demontrons les pour les classes $_{i;\ell-1}$.

Lemme 4.1 *Les classes* $_{i;\ell-1}$, $i\quad 0$ *de* $H\ \Omega^{d-\ell+1}X$ *de degre* $2^{k_0+i}+\ell-1$ *sont telles que :*

- $_{i;\ell-1}$ *est detecte dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de* $\Omega(\Omega^{d-\ell}X)$ *par l'image des classes* $_{i;\ell}$ *dans la colonne* -1,
- $Sq^{2^{k_0+i}}\ _{i;\ell-1} = \ _{i+1;\ell-1}$,
- *ces classes sont de degre de nilpotence* $\ell-1$, *exactement,*
- $^2_{i;\ell-1} = 0$, *pour tout* i *assez grand.*

Demonstration :

La premiere a rmation est consequence de la de nition des classes.

La seconde a rmation, c'est-a-dire la description de l'action des operations de Steenrod, est une consequence directe des proprietes de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore ([5], [10]) et de la construction des $_{i;\ell-1}$ a partir de l'homomorphisme de coin. Les suspensions iterees $^{d-\ell+1}\ _{i;\ell-1}$ sont, par construction, image par l'homomorphisme de coin itere :

$$Q(H\ X)\ !\quad ^{d-(\ell-1)}H\ \Omega^{d-(\ell-1)}X$$

des classes $_{i;d}$. La relation correspondante a lieu dans la source, pour les classes $_{i;d}$.

A priori les classes $_{i;`}$ sont au moins $`$-nilpotentes et determinent des classes $_{i;`} \, 2 \, R_{`}(H \; \Omega^{d-`}X)$

Par construction les classes $_{i;`-1}$ sont images des classes $_{i;`} \, 2 \, R_{`}(H \; \Omega^{d-`}X)$ par le F-isomorphisme fort $R_{`}(H \; \Omega^{d-`}X) =_F R_{`-1}(H \; \Omega^{d-`+1}X)$. Les classes $_{i;d}$ etant non-nulles il en est de même, par recurrence, des classes $_{i;`-1}$.

Compte tenu de l'action des operations de Steenrod l'a rmation concernant le degre de nilpotence de $_{i;`-1}$ en resulte.

Il reste a montrer que le cup-carre de ces classes est nul si i est assez grand. La methode ne donne pas de borne pour i. C'est, comme dans [8], la partie la plus delicate de la demonstration, l'argument se simpli e quelque peu, dans la mesure ou on ne cherche pas a demontrer de resultat sur des complexes nis. Il sera expose dans la prochaine section, avec la partie nale de la demonstration du theoreme.

5 Fin de la demonstration de 4.1, demonstration du theoreme 0.1

Pour achever la demonstration on va introduire une famille de classes $!_{i;`-1}$ dans la cohomologie de $\Omega^{d-`+1}X$, puis on etudiera l'action des operations de Steenrod sur ces classes. Ceci donnera la nullite du cup-carre. Si $` = 1$, on aura la contradiction annoncee. On doit etudier tous les cas, car c'est la nullite du cup-carre $^2_{i;`}$ qui entraîne l'existence de $!_{i;`-1}$.

Supposons donc le cup-carre $^2_{i;`}$ nul pour $i \quad i_{`}$. Il faut montrer que $^2_{i;`-1} = 0$ l'est aussi, pour $i \quad i_{`-1}$, ou $i_{`-1}$ est assez grand.

Comme le cup-carre de $_{i;`}$ est nul la classe

$$_{i;`} \qquad _{i;`} \, 2 \, (H \; \Omega^{d-`}X) \;\; ^2$$

determine, pour tout $i \quad i_{`}$, un element dans le terme :

$$E_2^{-2;} \;=\; \mathrm{Tor}^{-2;}_{H \;\; \Omega^{d-`}X}(\mathrm{F}_2; \mathrm{F}_2)$$

de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de $\Omega(\Omega^{d-`}X)$ en degre $2^{k_0+i+1} + 2`$.

Cet element est non-nul. En e et, la classe $_{i;`} \qquad _{i;`} \; 2 \; (H \; \Omega^{d-`}X) \;\; ^2$ est exactement $2`$-nilpotente car elle reduit non-trivialement dans

$$^{2`}R_{2`}(\mathrm{Tor}^{-2;}_{H \;\; \Omega^{d-`}X}(\mathrm{F}_2; \mathrm{F}_2)) \qquad ^{2`}R_{2`}((H \; \Omega^{d-`}X) \;\; ^2) = \;\; ^{2`}R_{`}(H \; \Omega^{d-`}X) \;\; ^2 :$$

La premiere inclusion est consequence de 1.8, car les bords, qui proviennent de $(H\ \Omega^{d-\ell}X)^{3}$; sont au moins 3ℓ-nilpotents, et comme $\ell \quad 1$, on peut appliquer la proposition, l'isomorphisme vient de ce que $H\ \Omega^{d-\ell}X \in Nil_d$.

Lemme 5.1 *Ce cycle determine une classe non-nulle, notee $\omega_{i;\ell-1}$, dans la cohomologie de $\Omega^{d-\ell+1}X$.*

L'element considere de la colonne -2 ne peut être source d'une differentielle non-nulle car la colonne 0 est triviale.

L'image de la differentielle d_t dans $E_t^{-2;}$, est un sous-module au moins $((t+2)\ell - t + 1)$-nilpotent. Comme $\ell \quad 1$, on a $(t+2)\ell - t + 1 > 2\ell$. On a donc une suite exacte :

$$\{0\} \to D \to \mathrm{Tor}^{-2;}_{H\ \Omega^{d-\ell}X}(\mathbb{F}_2;\mathbb{F}_2) \to E_\infty^{-2;} \to \{0\};$$

ou D est au moins $(4\ell-1)$-nilpotent, et les classes $\ _{i;\ell} \quad _{i;\ell}$ sont donc non-triviales dans l'aboutissement de la suite spectrale.

Les classes

$$\omega_{i;\ell-1} \in H\ \Omega^{d-\ell+1}X$$

sont non-nulles, et de degre $2^{k_0+i+1}+2\ell-2$. Elles appartiennent au terme F_{-2} de la filtration d'Eilenberg-Moore de $\tilde{H}\ \Omega^{d-\ell+1}X$. Le terme F_{-1} de la filtration n'est pas nul dans ce degre. Il y a donc une indetermination sur la definition des classes $\omega_{i;\ell-1}$, seule leur image dans F_{-2}/F_{-1} est bien determinee. L'indetermination appartient au terme F_{-1} de la filtration en degre $2^{k_0+i+1}+2\ell-2$, et est donc detectee dans $E_\infty^{-1;}$ en degre $2^{k_0+i+1}+2\ell-1$.

On va calculer l'action de certaines operations de Steenrod sur les classes $\omega_{i;\ell-1}$. Ce calcul sera fait modulo l'ordre de nilpotence $2\ell-1$. En fait ces calculs vont avoir lieu dans le complexe :

$$R_{2\ell-1}(H\ \Omega^{d-\ell}X) \to R_{2\ell-2}(H\ \Omega^{d-\ell+1}X) \to (R_\ell(H\ \Omega^{d-\ell}X)^{2}$$

qui est exact au centre au sens donne en 1.11. On a, a cause de 1.10 et 3.2, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
R_{2\ell-1}F_{-1}(\ell) \arrow[r] \arrow[d, "\cong_F"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\cong_F"] & L \arrow[d, "j"] \\
R_{2\ell-2}F_{-1}(\ell-1) \arrow[r] & R_{2\ell-2}F_{-2}(\ell-1) \arrow[r] & R_{2\ell-2}(F_{-2}(\ell-1)/F_{-1}(\ell-1))
\end{tikzcd}$$

ou on note $F_{-i}(h)$ pour $F_{-i}(H \ \Omega^{d-h}X)$, et $L \quad (R_\ell(F_{-1}(\ell)))^{\ 2}$, et j est un monomorphisme.

Considerons l'image de la classe $\ ^{-2^\ell}(\ _{i;\ell} \quad _{i;\ell})$ dans $L \quad (R_\ell(F_{-1}(\ell)))^{\ 2}$. Son image par la fleche verticale est l'image de la classe $\ ^{-2^\ell}\omega_{i;\ell-1}$ dans $R_{2\ell-2}(F_{-2}(\ell-1)/F_{-1}(\ell-1))$.

Lemme 5.2 *La classe* $\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\omega_{i;\ell-1})$ *ne depend pas du choix du relevement* $\omega_{i;\ell-1}$.

Par application iteree de 3.3 on sait que $R_{2\ell-2}(F_{-1})$ dans $\mathcal{U}_1$. Comme il est par definition reduit il est fortement F-isomorphe a une somme directe de copies de $F(1)$. Il en resulte aussitôt que l'operation $\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}$ est nulle en degre 2^{k_0+i+1}. Ce qui donne le resultat annonce.

Dans la proposition suivante, les elements associes a $\ _{i;\ell}$ et $\ _{i;\ell} \quad _{i;\ell}$ dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore pour $\Omega(\Omega^{d-\ell}X)$ sont indiques entre crochets.

Proposition 5.3 *Dans le terme E_2 de la suite spectrale on a la relation*

$$Sq^{2^{k_0+i}}([\ _{i;\ell} \quad _{i;\ell}]) = [\ _{i+1;\ell} \quad _{i;\ell} + \ _{i;\ell} \quad _{i+1;\ell}]\,:$$

Cet element persiste a l'infini en une classe non nulle.

Corollaire 5.4 *Dans la cohomologie de $\Omega^{d-\ell+1}X$ on a la relation :*

$$Sq^{2^{k_0+i}}\omega_{i;\ell-1} = \ _{i+1;\ell-1} \,[\ \ _{i;\ell-1} \quad \mathrm{mod} \quad (F_{-1})_{2\ell-1}\,:$$

La premiere partie de la proposition resulte de la description de l'action des operations de Steenrod dans la suite spectrale ([5], [10], [11]) et de la formule de Cartan. Comme seules Sq^0 et $\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}$ ont une action non-nulle sur $u^{2^{k_0+i}}$ la classe :

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}((\omega \quad u^{2^{k_0+i}}) \quad (\omega \quad u^{2^{k_0+i}}))$$

est somme de :

$$(\omega \quad u^{2^{k_0+i+1}}) \quad (\omega \quad u^{2^{k_0+i}}) + (\omega \quad u^{2^{k_0+i}}) \quad (\omega \quad u^{2^{k_0+i+1}})\,;$$

et de :

$$(\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\omega) \quad u^{2^{k_0+i}}) \quad (\omega \quad u^{2^{k_0+i}}) + (\omega \quad u^{2^{k_0+i}}) \quad (\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\omega) \quad u^{2^{k_0+i}})\,:$$

Ces derniers termes sont nuls, en effet la condition $2^{k-1} \quad h$ imposee plus haut implique que $\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\omega) = 0$.

Cette classe ne peut être l'image d'une differentielle pour les mêmes raisons que $_{i;\ell}$ $_{i;\ell}$. La proposition en resulte.

Pour ce qui est du corollaire il resulte des proprietes de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore par rapport au cup-produits, du lemme, et de ce qui a ete dit plus haut : la formule a lieu modulo F_{-1}, et ne depend pas du choix du relevement.

Corollaire 5.5 *On a :*

$$\mathrm{Sq}^{2^k}\mathrm{Sq}^{2^k}\omega_{i;\ell-1} = {}^{2}_{i+1;\ell-1}\,;$$

modulo des termes de degre de nilpotence superieur ou egal a $2\ell - 1$.

La demonstration est identique a ce qui precede.

Lemme 5.6 *Les classes* $\omega_{i;\ell-1}$ *sont de degre de nilpotence exactement* $2\ell - 2$. *Il en est de même des classes* ${}^{2}_{i+1;\ell-1}$, *si elles sont non-nulles pour tout* i.

En effet, les classes $\omega_{i;\ell-1}$ sont non-nulles et on calcule facilement que

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i+1}}(\omega_{i;\ell-1}) = \mathrm{Sq}_{2\ell-2}(\omega_{i;\ell-1}) = \omega_{i+1;\ell-1}\,.$$

Le même argument s'applique a l'autre cas, car on a :

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i+1}}({}^{2}_{i;\ell-1}) = \mathrm{Sq}_{2\ell-2}({}^{2}_{i;\ell-1}) = {}^{2}_{i+1;\ell-1}\,.$$

On va en deduire, par l'absurde, la nullite des cup-carres, et conclure. En fait, l'argument sera le même, simplement on utilisera en plus, si $\ell = 1$, la relation de cup-carre des algebres instables qui donnera la contradiction.

On va commencer par enoncer une formule concernant les operations de Steenrod.

Lemme 5.7 [8] *Pour tout entier* n

$$\mathrm{Sq}^{2^n}\mathrm{Sq}^{2^n} \in A(n-1)\mathrm{Sq}^{2^n}A(n-1)\,;$$

ou $A(n-1)$ *est la sous-algebre engendree par* $\mathrm{Sq}^1, \ldots, \mathrm{Sq}^{2^{n-1}}$ *et* $A(n-1)$ *est l'ideal des elements de degre strictement positif.*

La demonstration est basee sur les relations d'Adem. On ecrit la relation d'Adem pour $\mathrm{Sq}^{2^n}\mathrm{Sq}^{2^n}$:

$$\mathrm{Sq}^{2^n}\mathrm{Sq}^{2^n} = \sum_{t=1}^{t=n-1} \mathrm{Sq}^{2^{n+1}-2^t}\mathrm{Sq}^{2^t}\,.$$

Puis on montre, par recurrence sur h, que toute operation Sq^{2^n+h}, avec $0 < h < 2^n$, est dans $A(n-1)\mathrm{Sq}^{2^n}A(n-1)$.

En fait on a seulement besoin d'une relation de la forme :

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}} = \sum_j a_j b_j \ ;$$

avec $2^{k_0+i+1} > \deg(b_j) > 2^{k_0+i}$. Ceci resulte du lemme, mais peut aussi être montre en utilisant l'anti-involution c et la base de Cartan-Serre.

On ecrit la decomposition de $c(\mathrm{Sq}^{2^n}\mathrm{Sq}^{2^n})$ sur la base des monômes admissibles. On observe qu'un monôme admissible de degre 2^{n+1} commence toujours par une operation de degre strictement superieur a 2^n. On observe aussi, en evaluant sur $u^{2^{n+1}}$, que $\mathrm{Sq}^{2^{n+1}}$ n'apparaît pas dans la decomposition. Puis on reapplique c.

Fin de la demonstration : Le module $R_{2^\ell-2}(H\ \Omega^{d-\ell+1}X)$, $\ell > 1$ est non-trivial (eventuellement) seulement dans les degres de la forme 2^h ou $2^h + 2^j$.

Pour ce qui est de la cohomologie de $H\ \Omega^d X$, c'est-a-dire si $\ell = 1$, la même observation a lieu, si on se restreint au sous-module F_{-2}. Les relations etablies plus haut (corollaires 5.3 et 5.4) ont lieu, a desuspension pres, dans ce sous-module. On a pour tout $i > i_\ell$ la relation

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\ {}^{-2\ell+2}(\overline{\omega_{i;\ell-1}}) = {}^{-2\ell+2}(\overline{{}^2_{i+1;\ell-1}}) \ ;$$

avec les notations evidentes.

D'apres le lemme ci-dessus, on a :

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}} = \sum_j a_j b_j \ ;$$

avec $2^{k_0+i+1} > \deg(b_j) > 2^{k_0+i}$. Pour que les classes

$${}^{-2\ell+2}(\overline{b_j(\omega_{i;\ell-1})})$$

soient non-nulles elles doivent être de degre de la forme 2^a, ou $2^a + 2^b$.

Il faut donc que l'on ait une equation de la forme $\deg(b_j) + 2^{k_0+i+1} = 2^a$, soit de la forme $\deg(b_j) + 2^{k_0+i+1} = 2^a + 2^b$. La premiere equation est impossible car $\deg(b_j) < 2^{k_0+i+1}$. La seconde implique que $\deg(b_j)$ est une puissance de 2, ce qui est egalement impossible car $2^{k_0+i+1} > \deg(b_j) > 2^{k_0+i}$. En fait on a $(\deg({}^{-2\ell+2}(\overline{b_j(\omega_{i;\ell-1})})) \quad 3$.

Les classes ${}^{-2\ell+2}(\overline{b_j(\omega_{i;\ell-1})})$ sont donc nulles. Il en resulte que les classes

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\ {}^{-2\ell+2}\overline{\omega_{i;\ell-1}}) \in R_{2^\ell-2}(H\ \Omega^{d-\ell+1}X)$$

sont nulles. Donc que les classes

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}(\omega_{i,\ell-1})$$

sont de degre de nilpotence strictement superieur a $2\ell - 2$.

On en deduit, par 1.4, que la classe ${}^{2}_{i+1,\ell-1}$ est nulle des que i est assez grand. En effet, on a :

$$\mathrm{Sq}^{t}_{2\ell-2}({}^{2}_{i,\ell-1}) = {}^{2}_{i+t,\ell-1} .$$

Le terme F_{-2} de la filtration de $H^{*}\Omega^{d}X$ quotiente par le sous-module des elements nilpotents est nul dans les degres qui ne sont pas de la forme 2^{h} ou $2^{h}+2^{j}$. Insistons sur le fait que ceci n'est pas vrai pour la cohomologie de $\Omega^{d}X$, mais la relation utilisee ci-dessous a lieu dans F_{-2}.

On a, dans ce sous-module la relation

$$\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\mathrm{Sq}^{2^{k_0+i}}\omega_{i,0} = {}^{2}_{i+1,0} = {}_{i+2,0} \neq 0 .$$

Cette derniere est, exactement, de degre de nilpotence 0. On a donc une contradiction. Ce qui acheve la demonstration du theoreme.

En conclusion, on observera que l'on a utilise nulle part des proprietes des foncteurs R_s, $s > 2d-1$. En fait l'argument doit permettre de demontrer la conjecture 0.1.

6 Demonstration de 1.5

On enoncera et demontrera dans cette section la proposition suivante, mal degagee dans [6] :

Proposition 6.1 *Soit M un module instable, soit $h \geq 0$ un entier. Alors l'ensemble des elements x tels que pour tout $h \geq k \geq 0$ il existe un entier k_x, tel que :*

$$(\mathrm{Sq}_k)^{k_x}x = 0 ;$$

est un sous-module de M.

Cette proposition resulte evidemment de :

Lemme 6.2 *Soit M un module instable, soit $h \geq 0$ un entier. Alors l'ensemble des elements x tels que pour tout $0 \leq k \leq h$:*

$$\mathrm{Sq}_k x = 0 ;$$

est un sous-module de M.

Ce lemme est conséquence des relations d'Adem. Notons M_h le sous-espace vectoriel gradué déterminé par la condition du lemme. Il faut montrer que c'est un module sur l'algèbre de Steenrod.

Soit donc $x \in M_h$. Supposons avoir démontré que pour $i \leq t-1$ $\mathrm{Sq}^i x \in M_h$, et montrons que $\mathrm{Sq}^t x \in M_h$.

On calcule $\mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}_k(x)$ à l'aide des relations d'Adem. On a par définition :

$$\mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}_k(x) = \mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}^{|x|-k}(x)\,.$$

Si $2t < 2(|x|-k)$ les relations d'Adem donnent :

$$\mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}_k(x) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon_i \mathrm{Sq}^{2t+|x|-k-i}\mathrm{Sq}^i(x)\,,$$

avec $\varepsilon_i = \binom{|x|-k-i-1}{2t-2i}$.

Si $2t+|x|-k-i > i+|x|$, soit si $2i < 2t-k$, le terme $\mathrm{Sq}^{2t+|x|-k-i}\mathrm{Sq}^i(x)$ est nul par instabilité. La somme ci-dessus se réduit donc à :

$$\mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}_k(x) = \sum_{t-\frac{k}{2} \leq i \leq t} \varepsilon_i \mathrm{Sq}^{2t+|x|-k-i}\mathrm{Sq}^i(x)\,.$$

Le coefficient ε_t est égal à $\binom{|x|-k-t-1}{0}$ soit à 1, car $|x|-k-t-1 \geq 0$ par hypothèse. On a donc :

$$\mathrm{Sq}^{2t}\mathrm{Sq}_k(x) = \mathrm{Sq}_k\mathrm{Sq}^t(x) + \sum_{t-\frac{k}{2} \leq i \leq t-1} \varepsilon_i \mathrm{Sq}_{k-2(t-i)}\mathrm{Sq}^i(x)\,.$$

On en déduit que $\mathrm{Sq}_k\mathrm{Sq}^t(x)$ est nul car l'hypothèse de récurrence implique que tous les autres termes du membre de droite sont nuls, et car celui de gauche l'est par hypothèse.

Si $|x| < t+k$ on peut appliquer les relations d'Adem à $\mathrm{Sq}_k\mathrm{Sq}^t(x)$ directement. On obtient :

$$\mathrm{Sq}_k\mathrm{Sq}^t(x) = \sum_{0}^{\frac{t+|x|-k}{2}} \eta_i \mathrm{Sq}^{2t+|x|-k-i}\mathrm{Sq}^i(x)\,,$$

avec $\eta_i = \binom{t-i-1}{t+|x|-k-2i}$. Soit

$$\mathrm{Sq}_k\mathrm{Sq}^t(x) = \sum_{t-\frac{k}{2} \leq i \leq \frac{t+|x|-k}{2}} \eta_i \mathrm{Sq}_{k-2(t-i)}\mathrm{Sq}^i(x)\,.$$

Or $i \leq \frac{t+|x|-k}{2} < t$, et donc $k-2(t-i) < k$, on peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence.

References

[1] P. Gabriel, *Des categories abeliennes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 323-348.

[2] H. W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz, *The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects*, Am. J. of Math. 115 (1993) 1053-1106.

[3] N. Kuhn, *On topologically realizing modules over the Steenrod algebra*, Ann. of Math. 141 (1995) 321-347.

[4] J. Lannes, L. Schwartz, *A propos de conjectures de Serre et Sullivan*, Invent. Math. 83 (1986) 153-169.

[5] D. Rector, *Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Comment. Math. Helvet. 45 (1970) 540-552.

[6] L. Schwartz, *La ltration nilpotente de la categorie U et la cohomologie des espaces de lacets*, Proceedings Louvain La Neuve 1 Springer LMN 1318 (1988) 208-218.

[7] L. Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's xed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics Series (1994).

[8] L. Schwartz, *A propos de la conjecture de non-realisation due a N. Kuhn* Invent. Math. 134 (1998) 211-227.

[9] L. Schwartz, *Unstable modules, functors, and the mod-2 cohomology of spaces*, Proceedings Eurocoference Bielefeld 1998.

[10] L. Smith, *On Kunneth theorem 1*, Math. Zeit. 116 (1970) 94-140.

[11] L. Smith, *Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Springer LNM 134.

Universite Paris-Nord, Institut Galilee, LAGA, UMR 7539 du CNRS
Av. J.-B. Clement, 93430, Villetaneuse, France

Email: schwartz@math.univ-paris13.fr

Received: 9 October 2000 Revised: 4 July 2001