ISSN 1472-2739 (on-line) 1472-2747 (printed)

Algebraic & Geometric Topology
Volume 2 (2002) 51{93
Published: 5 February 2002

Formes di erentielles generalisees sur une operade et modeles algebriques des brations

David Chataur

Abstract We construct functors of generalized di erential forms. In the case of nilpotent spaces of nite type, they determine the weak homotopy type of the spaces. Moreover they are equipped, in an elementary and natural way, with the action of cup-i products. Working with commutative algebras up to homotopy (viewed as algebras over a co brant resolution of the operad of commutative algebras), we show using these functors that the model of the ber of a simplicial map is the co ber of the algebraic model of this map.

Resume On construit des foncteurs de formes di erentielles generalisees. Ceux-ci, dans le cas d'espaces nilpotents de type ni, determinent le type d'homotopie faible des espaces. Ils sont munis, d'une maniere elementaire et naturelle, de l'action de cup-i produits. Pour les algebres commutatives a homotopit pres (algebres sur une resolution co brante de l'operade des algebres commutatives), on demontre en utilisant les formes di erentielles generalisees que le modele de la bre d'une application simpliciale est la co bre du modele de ce morphisme.

AMS Classi cation 18D50; 55P43, 55P48, 55T99

Keywords Modeles algebriques, formes di erentielles, operades, suites spectrales

1 Introduction

Il est bien connu que les cochaînes singulieres d'un espace topologique forment une algebre di erentielle graduee. Celle-ci n'est pas commutative, mais commutative a homotopie pres, ce defaut de commutativite se traduit par l'existence d'operations sur la cohomologie a coe cients dans $\mathbb{F}_p$: les operations de Steenrod.

En outre, la theorie des operades fournit un cadre agreable pour la construction de modeles algebriques pour les espaces topologiques. Une operade est une structure algebrique permettant de coder un type d'algebres (en particulier des types d'algebres di erentielles $\mathbb{Z}$-graduees). La theorie des algebres sur une operade semble tout adaptee a l'etude des structures algebriques a homotopie pres. Pour les algebres commutatives (algebres sur l'operade $\mathcal{C}om$) on a la notion d'algebres commutatives a homotopie pres ou E_1-algebres [26].

Aussi, V. Hinich et V. Schechtman ont montre que l'ont pouvait munir les cocha^nes singulieres d'un espace topologique, de maniere naturelle, d'une structure de E_1-algebre [21].

L'homotopie des E_1-algebres et leur structure de categorie modele fermee ont ete etudiees recemment par M. Mandell [31] et V. Hinich [19], [20]. V. Hinich a prouve que la categorie des operades est une categorie modele fermee, et qu'une telle structure existe pour les algebres sur une operade co brante. On xe un remplacement co brant E_1 de l'operade des algebres commutatives; il est alors possible d'etudier l'homotopie des E_1-algebres, c'est-a dire l'homotopie des algebres commutatives a homotopie pres.

Pour une operade E_1 particuliere C (obtenue a partir de l'operade des cha^nes singulieres de l'operade des isometries lineaires), M. Mandell a montre une equivalence de categories entre une sous-categorie pleine de la categorie homotopique des C-algebres sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ et la categorie homotopique des espaces topologiques nilpotents $\overline{\mathbb{F}_p}$-complets. V. Hinich a etendu ce resultat au cadre des E_1-algebres [20]. En n, M. Mandell a prouve que deux espaces nilpotents de type nis sont faiblement homotopiquement equivalents si et seulement si leurs algebres de cocha^nes singulieres sont E_1-quasi-isomorphes [32].

Resultats Le cadre dans lequel on travaille est celui des operades unitales augmentees dans la categorie des R-modules di erentiels $\mathbb{Z}$-gradues. On construit des foncteurs $\Omega^{\mathcal{O}}$ de *formes di erentielles generalisees* pour les algebres sur une operade $\mathcal{O}$ (chapitre 3). Ces foncteurs sont l'analogue pour les $\mathcal{O}$-algebres du foncteur A_{Pl} de Sullivan pour les algebres di erentielles graduees commutatives. On montre que sous des hypotheses raisonnables (essentiellement que l'operade choisie soit co brante) ces foncteurs permettent de calculer la cohomologie singuliere a coe cients (theoreme 3.1):

Theoreme 1.1 *Pour tout ensemble simplicial X on a* $\Omega^{\mathcal{O}}(X) = H\ (X;R)$.

La preuve de ce resultat repose essentiellement sur des techniques de modeles acycliques adaptees au cadre des R-modules di erentiels $\mathbb{Z}$-gradues. Toujours en utilisant la theorie des modeles acycliques et la structure de categorie modele fermee pour les operades unitales augmentees, on montre que les foncteurs *formes di erentielles generalisees* sont tous munis d'une structure de E_1-algebre. Ce resultat generalise ceux de V. Hinich et V. Schechtman obtenus pour les cocha^nes singulieres [21]. Si on travaille avec des O-algebres a coe -cients dans $\mathbb{F}$ un corps de caracteristique positive, cette structure de E_1-algebre implique le resultat suivant (theoreme 3.4):

Theoreme 1.2 *Pour tout ensemble simplicial X l'algebre $\Omega^{O}(X)$ est munie de l'action d'operations. Cette action induit sur $\Omega^{O}(X)$ une structure d'algebre instable sur l'algebre de Steenrod telle que $\Omega^{O}(X) = H\ (X;\mathbb{F})$ soit un isomorphisme d'algebres instables.*

Un des interêts des *formes di erentielles generalisees* est qu'elle permettent de travailler avec n'importe quel remplacement co brant de l'operade Com. De plus la structure de E_1-algebre n'est pas tres \lisible" sur les cocha^nes singulieres (les resultats de V. Hinich et V. Schechtman donnent seulement son existence, pour une description combinatoire de cette structure on pourra se referer aux travaux de C. Berger et B. Fresse [2]); alors que celle-ci est immediate pour le foncteur des formes di erentielles generalisees en E_1-algebres. Pour un choix judicieux d'une operade E_1, on peut donner des representants canoniques pour les cup-i produits.

Ces formes di erentielles permettent de construire, de maniere elementaire, une paire de foncteurs adjoints (en fait une paire de foncteurs adjoints de Quillen) entre la categorie des ensembles simpliciaux et de nombreuses categories d'algebres sur une operade. En n, comme en theorie de Sullivan, le foncteur Ω^{O} permet de de nir un objet chemin naturel pour les O-algebres, et aussi des espaces fonctionnels simpliciaux pour ces mêmes O-algebres.

Grâce a l'introduction de formes di erentielles generalisees a coe cients locaux et a l'extension de ces theories aux ensembles bisimpliciaux, on donne une construction de la suite spectrale de Leray-Serre (theoreme 4.1):

Theoreme 1.3 *Soit $f : E -! B$ une bration entre ensembles simpliciaux de bre F (On suppose que la cohomologie de la base ou celle de la bre est nie). Il existe une suite spectrale qui converge vers $H\ (E;k)$ telle que*

$$E_0^{r;s} = \Omega^{O;r}(B;F^s)$$

pour un certain systeme de coe cients locaux F. Quand celui-ci est simple (par exemple si B est 1-connexe) le terme E_2 de cette suite spectrale s'ecrit:

$$E_2^{r;s} = H^r(B;H^s(F;k)):$$

Pour les E_1-algebres cette suite spectrale nous permet de construire un modele algebrique de la bre d'une application simpliciale cf theoreme 4.2. Ainsi, on obtient un resultat qui est classique en homotopie rationnelle: Le modele algebrique de la bre correspond a la co bre du modele. Le theoreme 4.2 s'inscrit dans la lignee des travaux de K. Hess et N. Dupont [7]. Il possede l'avantage de rester valide sur les entiers, mais aussi de donner un modele de la bre qui determine son type d'homotopie. On espere aussi appliquer ce resultat a l'etude des espaces de lacets et des espaces de lacets libres. On retrouve aussi dans ce cadre algebrique les resultats de Kudo sur la transgression dans la suite spectrale de Leray-Serre.

Remerciements Ce travail est en grande partie issu de ma these \Formes di erentielles sur une operade et modeles algebriques pour les espaces topologiques". J'en pro te donc pour remercier Jean-Louis Loday et Lionel Schwartz dont les conseils de redaction m'ont ete tres utiles. Je tiens aussi a exprimer toute ma gratitude a Beno^t Fresse pour ses nombreux conseils et l'attention bienveillante qu'il apporte a mes recherches. En n je remercie tres chaleureusement mon directeur de these Marc Aubry pour sa disponibilite, son soutien infaillible et ses encouragements constants.

2 Homotopie des operades et des algebres sur une operade

2.1 Operades

La structure d'*operade* a ete utilisee et introduite au debut des annees 1970 par J. M. Boardman, R. M. Vogt [3] et J. P. May [34] dans un contexte topologique a n d'etudier l'homotopie des espaces de lacets iteres. V. Ginzburg, M. Kapranov [16] et E. Getzler, J.D.S. Jones [15] ont repris cette notion dans le cadre algebrique. On peut egalement se referer a l'expose Bourbaki de J.L. Loday [28] ou a la premiere partie du livre de I. Kriz et J. P. May [26].

La categorie des R-modules di erentiels $\mathbb{Z}$-gradues On xe un anneau R, que l'on suppose commutatif et unitaire. Les operades avec lesquelles on travaille sont des operades dans la *categorie mono¨dale symetrique des R-modules di erentiels $\mathbb{Z}$-gradues* que l'on note $\mathrm{R}M_{\mathbf{dg}}$. Par convention, la di erentielle augmente le degre de 1.

Soit M un objet de la categorie $\mathrm{R}M_{\mathbf{dg}}$. On note M^n avec $n \in \mathbb{Z}$ le R-module des cocha^nes de degre n.

On forme un complexe

$$\cdots \xrightarrow{d} M^{n-1} \xrightarrow{d} M^{n} \xrightarrow{d} \cdots$$

avec les composantes et la di erentielle de notre R-module. Le R-module gradue M est la cohomologie de ce complexe.

Le produit tensoriel de deux R-modules di erentiels $\mathbb{Z}$-gradues M et N s'ecrit:

$$(M \otimes N)^n = \bigoplus_{p+q=n} M^p \otimes N^q.$$

La di erentielle d'un tenseur etant donnee par la formule:

$$d(m \otimes n) = dm \otimes n + (-1)^{|m|} m \otimes dn.$$

On a un operateur d'echange:

$$T : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$$

$$a \otimes b \mapsto (-1)^{|a||b|} b \otimes a.$$

Si A est un R-module di erentiel gradue, alors $A[m]$, $m \in \mathbb{Z}$, designe la m-suspension de A, le R-module di erentiel gradue tel que $A[m] = A^{m+}$.

-modules Un *-module* ou *suite symetrique* est la donnee d'un ensemble $\{M(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'objets de $R\,M_{\mathbf{dg}}$. Pour tout entier n, le R-module M_n est muni d'une action a droite du groupe symetrique $_n$. On rearque que les -modules forment une categorie monoidale symetrique.

Operades Une operade O dans la categorie $R\,M_{\mathbf{dg}}$ est la donnee d'un -module $\{O(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, d'un morphisme $: R \longrightarrow O(1)$ appele morphisme unite et de produits de composition

$$\gamma : O(k) \otimes O(j_1) \otimes \cdots \otimes O(j_k) \longrightarrow O(j)$$

de nis pour $1 \leq k$ et $\sum j_s = j$. Ces produits de composition sont, dans un certain sens, associatifs, unitaires et equivariants (cf [26], Part 1, section 1).

Operades unitaires augmentees On travaille avec des operades unitaires augmentees. On note $\mathbf{Op_{ua}}$ la categorie formee par de telles operades.

Un objet de $\mathbf{Op_{ua}}$ est une operade O avec un morphisme d'augmentation

$$: O \longrightarrow Com.$$

On rappelle que l'operade Com est l'operade des algebres di erentielles graduees commutatives. Elle est donnee par la formule $Com(i) = R$.

On demande aussi que ε induise un isomorphisme sur les composantes de degres 0 et 1:

$$\mathcal{O}(0) = \mathcal{C}om(0) = R$$

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{C}om(1) = R.$$

Un morphisme de $\mathbf{Op_{ua}}$ est un morphisme d'operades $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ tel que $f_0 = f_1 = Id$.

La categorie $\mathbf{Op_{ua}}$ possede un objet initial qui est aussi un objet final on note $\mathbb{I}$ cette operade. Celle-ci est telle que $\mathbb{I}(0) = \mathbb{I}(1) = R$ et $\mathbb{I}(i) = 0$ pour $i > 1$. On verifie aussi que cette categorie est complete et cocomplete (on forme les limites et les colimites dans la categorie des operades au-dessus de l'operade $\mathcal{C}om$).

Algebres sur une operade On fixe $\mathcal{O}$ une operade unitale augmentee. Une algebre sur $\mathcal{O}$ (on dit aussi $\mathcal{O}$-algebre) est un R-module differentiel $\mathbb{Z}$-gradue A muni de produits d'evaluation:

$$\mu_j : \mathcal{O}(j) \otimes A^{\otimes j} \longrightarrow A$$

associatifs, unitaires et equivariants (pour l'action de Σ_j).

On note $\mathcal{O} - \mathcal{A}lg_{\mathbf{dg}}$ la categorie des $\mathcal{O}$-algebres.

Le foncteur oubli de $\mathcal{O} - \mathcal{A}lg_{\mathbf{dg}}$ vers $\mathrm{R}\mathcal{M}_{\mathbf{dg}}$ admet un adjoint a gauche, le foncteur $\mathcal{O}$-algebre libre que l'on note aussi $\mathcal{O}$. Pour tout R-module differentiel $\mathbb{Z}$-gradue M, on definit $\mathcal{O}(\mathrm{M})$ la $\mathcal{O}$-algebre libre sur M par:

$$\mathcal{O}(M) = \bigoplus_{p\geq 0} \mathcal{O}(p) \otimes_{R[\Sigma_p]} M^{\otimes p} = R \oplus M \oplus \bigoplus_{p\geq 2} \mathcal{O}(p) \otimes_{R[\Sigma_p]} M^{\otimes p}.$$

Si $\mathcal{O}$ est une operade dans la categorie $\mathrm{R}\mathcal{M}_{\mathbf{dg}}$ alors $H_*\mathcal{O}$ est une operade dans la categorie des R-modules $\mathbb{Z}$-gradues.

De plus, si A est une $\mathcal{O}$-algebre alors H_*A est une $H_*\mathcal{O}$-algebre.

2.2 La theorie homotopique des operades

Les operades sont un langage pour aborder l'etude d'espaces en topologie algebrique. Il parait naturel de se placer dans un cadre homotopique. Celui de Quillen ([9], [23], [36]) semble convenir tout a fait.

Homotopie des R-modules differentiels gradues D. Quillen a demontre que l'on pouvait munir la categorie des R-modules differentiels $\mathbb{N}$-gradues d'une structure de categorie modele fermee [36]. Cette construction s'etend au cadre des R-modules di erentiels $\mathbb{Z}$-gradues ([23],[39]). On a alors un structure de categorie modele pour laquelle les equivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les brations sont les surjections. On remarque que tous les objets sont brants.

Sur les R-modules di erentiels gradues co brants Pour tout A les conditions suivantes sont equivalentes (cf [37]):

(a) Le complexe A est co brant.

(b) Pour tout complexe acyclique S le complexe $Hom(A; S)$ est aussi acyclique.

En consequence, on en deduit que si A est un objet co brant, alors pour tout entier A^n est un R-module projectif. Reciproquement tout complexe de R-modules projectifs borne superieurement est co brant.

Homotopie des -modules La categorie des -modules possede une structure de categorie modele fermee qui provient de la structure de categorie modele fermee des $R[\ _n]$-modules di erentiels gradues. Explicitement:

i) Un morphisme $f : M \longrightarrow N$ est une equivalence faible si pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application $f_n : M_n \longrightarrow N_n$ est un quasi-isomorphisme de $R[\ _n]$-module di erentiel gradue.

ii) Un morphisme $f : M \longrightarrow N$ est une bration si pour tout $n \in \mathbb{N}$ le morphisme f_n est un epimorphisme.

iii) Un morphisme $f : M \longrightarrow N$ est une co bration si pour tout $n \in \mathbb{N}$ le morphisme f_n est une co bration.

Homotopies des operades

Operades unitaires augmentees libres On note mod^2 la categorie des -modules 2-reduits. Un objet M de mod^2 est un -module tel que $M_0 = M_1 = 0$.

Soit R le -module 2-reduit tel que $R_n = R$ pour tout entier $n \ \ 2$. On introduit mod^2_a la categorie des -modules 2-reduits augmentes comme etant la categorie des objets de mod^2 au-dessus de R.

On remarque que la categorie des -modules 2-reduits augmentes est munie d'une structure de categorie modele fermee. En e et, mod^2 est une categorie modele fermee. De plus on rappelle que si X est un objet d'une categorie modele fermee C, alors la categorie des objets au-dessus de X est aussi une categorie modele fermee. Les brations sont les epimorphismes et les equivalences faibles sont les quasi-isomorphismes.

Soit $U : \mathrm{Op}_{ua} \longrightarrow \mathrm{mod}^2_a$ le foncteur oubli de la categorie des operades unitaires augmentees dans la categorie des Σ-modules 2-reduits augmentes. Le foncteur U admet un foncteur adjoint a gauche le foncteur operade unitaire augmentee libre note $\mathbb{T}_{ua}$ (Appendice B de [1]).

Une operade O est dite quasi-libre s'il existe un Σ-module M tel que $\mathbb{T}_{ua}(M)$ soit isomorphe a O en tant qu'operade graduee.

V. Hinich montre que les operades forment une categorie modele fermee (cf [19]). Il est possible d'adapter ce resultat au cadre unital augmente.

Theoreme 2.1 *La categorie des operades unitaires augmentees est munie d'une structure de categorie modele fermee pour laquelle*

i) *Un morphisme $f : O \longrightarrow P$ est une equivalence faible si pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application $f(n) : O(n) \longrightarrow P(n)$ est un quasi-isomorphisme de $R[\Sigma_n]$-modules differentiels gradues.*

ii) *Un morphisme $f : O \longrightarrow P$ est une fibration si pour tout $n \in \mathbb{N}$ le morphisme $f(n)$ est un epimorphisme.*

Proof On reprend les arguments de V. Hinich. On transporte la structure de categorie modele fermee des Σ-modules 2-reduits vers les operades unitaires augmentees via le foncteur $\mathbb{T}_{ua}$.

Il suffit de verifier que si M est un Σ-module 2-reduit cofibrant acyclique ($M(n) = 0$ pour $n \geq 2$) alors pour toute operade unitaire augmentee O le morphisme canonique

$$O \longrightarrow O \amalg \mathbb{T}_{ua}(M)$$

est un quasi-isomorphisme.

Ce point se demontre facilement par extension d'une homotopie contractante de M a l'operade $\mathbb{T}_{ua}(M)$. Les formules d'extension de V. Hinich restent valables dans notre cadre. □

On a pour cette structure la caracterisation suivante des objets cofibrants:

Proposition 2.1 *Une operade est cofibrante si et seulement si celle-ci est une retraction d'une operade quasi-libre.*

Proof La proposition repose sur le fait que la categorie O_{ua} est engendree de maniere cofibrante. □

Homotopie des algebres sur une operade Si on travaille sur un corps $\mathbb{K}$ de caracteristique nulle, nous savons que pour toute operade $\mathcal{O}$ la categorie des $\mathcal{O}$-algebres est munie d'une structure de categorie modele fermee. Les equivalences sont les quasi-isomorphismes, les epimorphismes sont les brations, on donnera plus loin une description des co brations. On appelle cette structure la *structure modele adjointe*. Cette terminologie provient de l'adjonction de Quillen entre la categorie des $\mathcal{O}$-algebres et la categorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels di erentiels gradues.

Si on travaille sur un anneau R quelconque ce resultat n'est pas toujours vrai. Par exemple, sur $\mathbb{F}_p$, la categorie des $\mathbb{Z}$-algebres di erentielles graduees commutatives ne peut être munie d'une structure modele adjointe (il existe une autre structure de categorie modele fermee pour ces algebres [39]). Par contre, si $\mathcal{O}$ est une operade; la categorie des $\mathcal{O}$-algebres est munie d'une structure modele adjointe si et seulement si pour toute $\mathcal{O}$-algebre A et tout $n \in \mathbb{Z}$ le morphisme canonique

$$A \longrightarrow A \amalg \mathcal{O}(x_n; dx_n)$$

est un quasi-isomorphisme.

On retrouve l'analogue du resultat de V. Hinich [19] pour les operades unitaires augmentees co brantes. En e et, si $\mathcal{O}$ est une operade co brante, alors la categorie des $\mathcal{O}$-algebres admet une structure modele adjointe. Supposons que $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ soient deux modeles co brants de la même operade $\mathbb{O}$; alors la categorie des $\mathcal{O}$-algebres et la categorie des $\mathcal{O}'$-algebres sont equivalentes au sens de Quillen. La preuve repose sur une ltration du coproduit pour une operade quasi-libre (cf [20]).

Extensions libres Dans cette section on caracterise les co brations pour les $\mathcal{O}$-algebres.

Notons $A \amalg B$ le coproduit de deux $\mathcal{O}$-algebres (pour une realisation de ce coproduit consulter [14]). On peut generaliser la notion d'extension libre (on parle aussi de morphisme quasi-libre) introduite dans le cadre des algebres di erentielles graduees [12] aux $\mathcal{O}$-algebres.

De nition 2.1 Une extension libre est un morphisme de $\mathcal{O}$-algebres

$$A \xrightarrow{i} A \amalg \mathcal{O}(M)$$

tel que:

a) $A \amalg \mathcal{O}(M) = A \amalg \mathcal{O}(M)$ en tant que module gradue.

b) Le morphisme i est l'application canonique.

c) Le R-module M s'ecrit sous la forme $M = \bigcup_{i=0}^{\infty} M(i)$ avec $M(i) \subset M(i+1)$. Les R-modules gradues $M(0)$ et $M(i+1)/M(i)$ sont libres.

d) La differentielle d est telle que $d : M(0) \longrightarrow A$ et $d : M(i+1) \longrightarrow A \amalg O(M(i))$.

Toute application $f : A \longrightarrow B$ admet une factorisation:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & B \\ & A \amalg O(M) \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

avec i une extension libre et p une fibration acyclique.

De plus, un morphisme est une cofibration si et seulement si c'est une retraction d'une extension libre. Ceci repose sur le fait que la categorie des O-algebres est engendree de maniere cofibrante. On peut montrer que la categorie des O-algebres est une categorie modele cellulaire [22], [23] (ce qui est aussi le cas de la categorie des operades unitaires augmentees et de la categorie des -modules).

2.3 Sur les O-algebres a homotopie pres

Soit $\mathbb{O}$ une operade unitaire et augmentee, on fixe un modele cofibrant O de cette operade.

Definition 2.2 On appelle $\mathbb{O}$-algebre a homotopie pres un objet de la categorie des O-algebres.

Nous avons vu precedemment que du point vue homotopique le choix du modele cofibrant importait peu (pour deux modeles cofibrants de la même operade les categories homotopiques sont equivalentes).

Une des difficultes consiste a construire un modele cofibrant explicite pour une operade $\mathbb{O}$ donnee.

Dans le cadre rationnel et pour les operades de Koszul ([16], [28]), il existe un procede utilisant la construction cobar B pour obtenir un tel modele. Si $\mathbb{O}$ est une operade de Koszul, si $\mathbb{O}^!$ est son dual de Koszul, alors $B(\mathbb{O}^![-1])$ est une resolution quasi-libre de $\mathbb{O}$. Toujours dans le cadre rationnel une theorie du modele minimal a ete developpe par M. Markl [33].

Toute $\mathbb{O}$-algebre est une O-algebre via le morphisme d'operades $O -! \mathbb{O}$.

On s'interesse plus speci quement au cas des algebres commutatives a homotopie pres. On choisit un modele co brant de l'operade Com que l'on note E_1. On dit que E_1 est une E_1-operade co brante. On peut même supposer que l'operade E_1 est quasi-libre. Dans ce cas, les modules di erentiels gradues $E_1(n)$ sont tous $R[\ _n]$-libres et acycliques. On peut choisir ces modules di erentiels $\mathbb{Z}$-gradues tels que $E_1(n)^p = 0$ pour $p > 0$.

Dans le langage de P. May [26] une E_1-operade O est une operade telle que $O(l)$ soit une resolution $R[\ _l]$-projective de R. On remarque qu'une E_1-operade au sens de P. May n'est pas necessairement co brante en tant qu'operade.

Si on travaille avec une E_1-operade O et avec R un corps de caracteristique positive, alors l'homotopie des O-algebres est munie d'operations:

Soient O une E_1-operade et A une O-algebre, il existe pour tout $s \quad 0$ et R de caracteristique 2 des operations:

$$P^s : \ ^qA -! \ ^{q+s}A$$

et pour R de caracteristique $p > 2$:

$$P^s : \ ^qA -! \ ^{q+2s(p-1)}A:$$

Ces operations veri ent les proprietes suivantes:

i) $P^s(x) = 0$ si $p = 2$ et $s < jxj$ ou si $p > 2$ et $2s < jxj$.

ii) $P^s(x) = x^p$ si $p = 2$ et $s = jxj$ ou si $p > 2$ et $2s = jxj$.

iii) $P^s(xy) = \mathrm{P}\ P^t(x)P^{s-t}(y)$ (formule de Cartan).

iv) (formule d'Adem) Si $p \quad 2$ et $t > ps$:

$$P^tP^s = \mathrm{X}_i\ (-1)^{t+i}(pi - t; t - (p-1)s - i)P^{s+t-i-1}P^i$$

si $p > 2$, $t > ps$, et si par on note le mod-p Bockstein, alors:

$$P^t\ \ P^s = \mathrm{X}_i\ (-1)^{t+i}(pi - t; t - (p-1)s - i)\ \ P^{s+t-i-1}P^i$$
$$- \mathrm{X}_i\ (-1)^{t+i}(pi - t - 1; t - (p-1)s - i)P^{s+t-i-1}\ \ P^i$$

$(i; j) = \frac{(i+j)!}{i!j!}$ si $i \quad 0$ et $j \quad 0$ et $(i; j) = 0$ si i ou j sont negatifs.

Exemple de E_∞-operade: la resolution bar des groupes symetriques Soit R_B le Σ-module tel que $R_B(n)$ est le complexe normalise de la resolution bar du groupe symetrique Σ_n. Ce Σ-module est une operade. L'operade R_B est evidemment une E_∞-operade au sens de P. May, mais elle n'est pas cofibrante (l'operade Com est retracte de cette operade). Les cogebres sur cette operade ont ete etudiees par J. Smith [40]. V.A. Smirnov a lui ausi etudie les cogebres sur une E_∞-operade et leurs liens avec l'homotopie des espaces topologiques [41], [42].

3 Formes differentielles generalisees

Dans ce chapitre on construit des foncteurs de formes differentielles generalisees. Ce sont des foncteurs de la categorie des ensembles simpliciaux vers une categorie de $\mathcal{O}$-algebres.

Grâce a la theorie de modeles acycliques que nous developpons dans le premier paragraphe on etablit une equivalence d'homotopie entre ces foncteurs et le foncteur des cochaînes singulieres normalisees (c'est le resultat principal du second paragraphe).

Dans le troisieme paragraphe, on etudie la structure multiplicative de ces foncteurs et on montre qu'ils sont tous a valeurs dans les E_∞-algebres.

Enfin dans le dernier paragraphe, on construit une paire de foncteurs adjoints de Quillen entre les ensembles simpliciaux et les $\mathcal{O}$-algebres, via un foncteur de formes differentielles generalisees et un foncteur de realisation simpliciale. On donne aussi quelques applications a l'homotopie des $\mathcal{O}$-algebres (espace de chemins et homotopie simpliciale).

3.1 La theorie des modeles acycliques

On etend la theorie des modeles acycliques [11], [30], [38] au cadre $\mathbb{Z}$-gradue.

Soit $F : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur contravariant des ensembles simpliciaux a valeurs dans une categorie $\mathcal{C}$. On associe a F le foncteur contravariant $F' : \mathcal{S}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que:

$$F'(X) = \prod_{x \in X_n} F(\Delta[n])$$

ou $\Delta[n]$ est le simplexe standard de dimension n. Le produit est pris sur tous les $n \geq 0$ et les $x \in X_n$. On notera $\{m_x; x\} \in F'(X)$ l'element dont la composante indexée par $x \in X_n$ est l'élément $m_x \in F'(\Delta[n])$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre ensembles simpliciaux. Le morphisme associé $F'(f) : F'(Y) \longrightarrow F'(X)$ est donné par

$$F'(f)\{m_y; y\} = \{m_{f(x);x}\}_{y=f(x)}.$$

Une transformation naturelle $T : F \longrightarrow G$ induit $T' : F' \longrightarrow G'$ donnée par la formule:

$$T'(X)\{m_x; x\} = \{T(\Delta[n])m_x; x)\}.$$

On définit aussi une transformation naturelle $\Phi : F \longrightarrow F'$ en posant

$$\Phi(X)u = \{F(\mathrm{x})u; x\}$$

pour $u \in F(X)$. Dans cette formule, on utilise le fait que la donnée de $x \in X_n$ est équivalente à un morphisme $\mathrm{x} : \Delta[\mathrm{n}] \longrightarrow \mathrm{X}$. On vérifie facilement la formule $T'\Phi = \Phi T$.

Définition 3.1 a) On dit que $F : S^{op} \longrightarrow \mathrm{R}M_{\mathbf{dg}}$ est coreprésentable s'il existe une transformation naturelle $\Psi : F' \longrightarrow F$ telle que Ψ est inverse à gauche de Φ.

b) Un foncteur $F : S^{op} \longrightarrow \mathrm{R}M_{\mathbf{dg}}$ est augmenté s'il existe une transformation naturelle $\varepsilon : F \longrightarrow R$. On suppose que pour tout n le morphisme $\varepsilon : F(\Delta[n]) \longrightarrow R$ est une fibration.

c) On dit que F est acyclique sur les modèles, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'augmentation $\varepsilon : F(\Delta[n]) \longrightarrow R$ est une équivalence faible.

d) Le foncteur F est cofibrant, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(\Delta[n])$ est cofibrant.

Proposition 3.1 *Supposons que $F : S^{op} \longrightarrow \mathrm{C}$ est un foncteur coreprésentable, augmenté, acyclique sur les modèles et que le foncteur $G : S^{op} \longrightarrow \mathrm{C}$ est augmenté, cofibrant.*

Alors, il existe une transformation naturelle $f : G \longrightarrow F$ telle que $\varepsilon f = \varepsilon$.

De plus, deux transformations naturelles $f, g : G \longrightarrow F$ telles que $\varepsilon f = \varepsilon = \varepsilon g$, sont homotopes. Plus précisément, il existe une homotopie à gauche (naturelle) $h : G \longrightarrow F$ entre f et g.

Preuve i) Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & F(\Delta[n]) \arrow[d, "\varepsilon"] \\
G(\Delta[n]) \arrow[ur, dotted, "f'_n"] \arrow[r, "\varepsilon"] & R
\end{tikzcd}$$

l'application verticale est une bration acyclique (par hypothese), et $G([n])$ est co brant. Sous ces hypotheses, il existe un relevement f_n^0. On obtient ainsi une transformation naturelle $f^0 : F^0 \longrightarrow G^0$. On pose $f = \Psi f^0$, c'est la transformation naturelle demandee.

ii) Comme le relevement est unique a une homotopie a gauche pres, on en deduit une famille d'homotopie a gauche H_n^0 de f_n^0 a g_n^0.

Comme il existe dans $\mathrm{R}M_{\mathbf{dg}}$ un objet cylindre naturel qui commute avec les produits, ceci permet de construire une homotopie $H^0 : IF^0 \longrightarrow G^0$ de f a g. Grâce a la naturalite de ce même objet chemin on a une homotopie a gauche $H : IF \longrightarrow G$. □

Corollaire 3.1 *Si F et G sont tous deux corepresentables, augmentes, co - brants et acycliques sur les modeles, alors F et G sont naturellement homotopiquement equivalents.*

Toute transformation naturelle entre deux foncteurs corepresentables, augmentes, co brants et acycliques sur les modeles qui commute aux augmentations induit une equivalence d'homotopie.

On note $C : S^{op} \longrightarrow \mathrm{R}M_{\mathbf{dg}}$ le foncteur des cochaînes singulieres normalisees. Le foncteur C est corepresentable, augmente, co brant et acyclique sur les modeles. On en deduit le resultat suivant:

Proposition 3.2 *Soit $F : S^{op} \longrightarrow \mathrm{R}M_{\mathbf{dg}}$ un foncteur contravariant qui est corepresentable, augmente, co brant et acyclique sur les modeles, et $C : S^{op} \longrightarrow \mathrm{R}M_{\mathbf{dg}}$ le foncteur des cochaînes singulieres normalisees.*

Alors, les foncteurs F et C sont naturellement equivalents. Donc, pour tout ensemble simplicial X on a un isomorphisme naturel:

$$F(X) = \quad C(X) = H \ (X;R):$$

3.2 Le foncteur des formes di erentielles generalisees pour les algebres sur une operade

Nous construisons dans ce qui suit un foncteur de formes di erentielles generalisees pour les algebres sur une operade O. On prouve que ce foncteur qui est note Ω^O veri e les hypotheses de la proposition ci-dessus. Pour être plus precis, on xe O une operade unitaire augmentee avec les proprietes suivantes:

a) Le morphisme d'augmentation $: O \longrightarrow Com$ est une bration.

b) Le R-module differentiel $\mathcal{O}(n)$ est concentre en degres negatifs.

c) L'operade $\mathcal{O}$ est cofibrante.

L'hypothese a) permet de definir une suite d'applications $s_n : R \longrightarrow \mathcal{O}(n)$ telles que $\epsilon \circ s_n = Id_R$. Les $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne donnent en aucun cas un morphisme d'operades, sinon l'operade $\mathcal{C}om$ serait une retraction de $\mathcal{O}$ et donc cofibrante.

Posons $1_n = s_n(1)$. Comme $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}(1) = R$ (car $\mathcal{O}$ est unitaire augmentee), on a $1_0 = 1_1 = 1$.

Proposition 3.3 *Soit A une $\mathcal{O}$-algebre. Le morphisme structural*

$$\mu_2 : \mathcal{O}(2) \otimes A^{\otimes 2} \longrightarrow A$$

verifie l'equation:

$$\mu_2(1_2 \otimes \lambda \otimes a) = \mu_2(1_2 \otimes a \otimes \lambda) = \lambda . a$$

pour tout $\lambda \in R$ et tout $a \in A$.

Proof On considere le produit $\gamma_2 : \mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathcal{O}(1)$. Le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(1) \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d] & \mathcal{O}(1) \arrow[d] \\
\mathcal{C}om(2) \otimes \mathcal{C}om(0) \otimes \mathcal{C}om(1) \arrow[r, "\gamma_2"] & \mathcal{C}om(1)
\end{tikzcd}$$

montre que $\gamma_2(1_2 \otimes 1_0 \otimes 1_1) = 1_1 = 1$. Les relations de la proposition sont une consequence de ces identites. □

Cette proposition montre que pour toute $\mathcal{O}$-algebre A le produit:

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A$$

$$\mu(a \otimes b) = \mu_2(1_2 \otimes a \otimes b)$$

possede une unite. Cette propriete d'unitalite n'est pas verifiee pour une E_∞-operade quelconque.

Definition 3.2 On a une O-algebre simpliciale $\Omega^O_\bullet$ dont la composante de dimension simpliciale n est la O-algebre

$$\Omega^O{}_n = \frac{O(x_0; \ldots ; x_n; dx_0; \ldots ; dx_n)}{I_n}$$

engendree par les elements $x_0; \ldots ; x_n$ de degre 0 et $dx_0; \ldots ; dx_n$ de degre 1 et quotientee par l'ideal I_n engendre par les relations $\sum x_i = 1_O$, $\sum dx_i = 0$. Les operateurs de face sont donnes par les formules:

$\partial_j(x_j) = 0$ et $\partial_j(dx_j) = 0$;

$\partial_j(x_i) = x_i$ et $\partial_j(dx_i) = dx_i$ si $i < j$;

$\partial_j(x_i) = x_{i-1}$ et $\partial_j(dx_i) = dx_{i-1}$ si $i > j$;

les operateurs de degenerescence par les formules:

$s_j(x_j) = x_j + x_{j+1}$ et $s_j(dx_j) = dx_j + dx_{j+1}$;

$s_j(x_i) = x_i$ et $s_j(dx_i) = dx_i$ si $i < j$;

$s_j(x_i) = x_{i+1}$ et $s_j(dx_i) = dx_{i+1}$ si $i > j$.

On definit le foncteur des formes differentielles generalisees:

$$\Omega^O : S^{op} \longrightarrow O - Alg_{dg}$$

par la formule:

$$\Omega^O(X) = Hom_S(X; \Omega^O_\bullet)$$

On remarque que $\Omega^O(\Delta[n]) = Hom_S(\Delta[n]; \Omega^O_\bullet) = \Omega^O{}_n$. On va montrer que le foncteur des formes differentielles generalisees est corepresentable, cofibrant et acyclique sur les modeles.

Si on applique la theorie des modeles acycliques, on deduit que ce foncteur est homotopiquement equivalent au foncteur des cochaînes singulieres.

Lemme 3.1 *Si l'operade O est cofibrante et si chaque R-module differentiel $\mathbb{Z}$-gradue $O(l)$ est concentre en degres negatifs, alors $\Omega^O{}_n$ est cofibrant et acyclique relativement a l'augmentation.*

Preuve Montrons d'abord que $\Omega^O{}_n$ est acyclique; a cette fin on remarque que l'on a l'isomorphisme de O-algebres:

$$\frac{O(x_0; \ldots ; x_n; dx_0; \ldots ; dx_n)}{I_n} = O(x_1; \ldots ; x_n; dx_1; \ldots ; dx_n)$$

Or $\mathcal{O}(x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n)$ est acyclique. En effet, pour une operade cofibrante une algebre libre sur un R-module differentiel gradue acyclique est acyclique.

Il reste a montrer que $\Omega^{\mathcal{O}}{}_n$ est cofibrant en tant que R-module differentiel $\mathbb{Z}$-gradue.

On rappelle qu'un R-module differentiel $\mathbb{Z}$-gradue projectif n'est pas necessairement cofibrant [37]. Mais c'est le cas s'il est borne superieurement.

En utilisant l'isomorphisme precedent $\Omega^{\mathcal{O}}{}_n$, on a:

$$\Omega^{\mathcal{O}}{}_n = \bigoplus_{l \geq 0} \mathcal{O}(l) \otimes_{R[\Sigma_l]} M^{\otimes l}$$

On pose $\Omega^{\mathcal{O}}{}_n(l) = \mathcal{O}(l) \otimes_{R[\Sigma_l]} M^{\otimes l}$. Montrons que ce R-module differentiel $\mathbb{Z}$-gradue est cofibrant, on en deduit alors que $\Omega^{\mathcal{O}}{}_n$ est aussi cofibrant.

Comme $\mathcal{O}$ est cofibrante il existe une operade quasi-libre $\mathcal{O}''$ telle que $\mathcal{O}$ est une retraction de $\mathcal{O}''$. Donc pour tout l, $\mathcal{O}(l)$ est un retract de $\mathcal{O}''(l)$. Et $\mathcal{O}''(l)$ est un $R[\Sigma_l]$-module libre, car $\mathcal{O}''$ est une operade libre et cofibrante. On peut supposer que cette operade est aussi bornee superieurement. Alors $\Omega^{\mathcal{O}}{}_n(l)$ est un retract de $\mathcal{O}''(l) \otimes_{R[\Sigma_l]} M^{\otimes l}$. L'objet M est un R-module differentiel $\mathbb{Z}$-gradue libre concentre en degres 0 et 1. On en deduit facilement que $\mathcal{O}''(l) \otimes_{R[\Sigma_l]} M^{\otimes l}$ est cofibrant (car celui-ci est R-libre en tout degre et borne superieurement).

Le resultat est une consequence immediate du fait que les objets cofibrants sont stables par retraction. $\square$

Afin de montrer que le foncteur des formes differentielles generalisees est corepresentable, il suffit de prouver que l'algebre simpliciale $\Omega^{\mathcal{O}}{}_\bullet$ est contractile en tant qu'ensemble simplicial. En effet d'apres M. Majewski [30], si $\mathbb{A} : S \longrightarrow RM_{\mathbf{dg}}$ est un foncteur de la categorie des ensembles simpliciaux a valeurs dans $RM_{\mathbf{dg}}$ tel que $\mathbb{A}(X) = Hom_S(X, M_\bullet)$, alors $\mathbb{A}$ est corepresentable si $M_\bullet$ est contractile.

Lemme 3.2 *Pour tout $s \geq 1$, les groupes d'homotopie $\pi_{s-1}(\Omega^{\mathcal{O}}{}_\bullet)$ sont triviaux.*

Preuve On etend a l'algebre simpliciale $\Omega^{\mathcal{O}}{}_\bullet$ la preuve donnee par M. Karoubi dans le cadre des formes differentielles non commutatives ([24],[25]). On commence par montrer que $\pi_0(\Omega^{\mathcal{O}}{}_\bullet)$ est trivial. Soit $\omega \in \Omega^{\mathcal{O}}{}_0$. On identifie $\Omega^{\mathcal{O}}{}_0$ avec R, on suppose que ω est un scalaire. On identifie aussi $\Omega^{\mathcal{O}}{}_1$ avec $\mathcal{O}(x, dx)$.

L'application $_0$ correspond a l'evaluation en $x = 0$, $dx = 0$ et $_1$ a l'evaluation $x = 1$ et $dx = 0$. L'element $= \omega(1 - x)$ veri e $_0 = \omega$, $_1 = \omega$. D'ou le resultat. On suppose s 2. Montrer que $_{s-1}(\Omega^{O}\ )$ est trivial est equivalent a prouver que, pour toute forme $\omega \in \Omega^{O}{}_{s-1}$ satisfaisant $_i\omega = 0$ pour tout i, il existe $\in \Omega^{O}{}_s$ tel que $_0 = \omega$ et $_i = 0$ si $i > 0$. Comme on a $1 - t_1 - \ldots - t_s = 0$ et $dt_1 + \ldots + dt_s = 0$ dans $\Omega^{O}{}_{s-1}$ on remplace t_1 par $1 - t_2 - \ldots - t_s$ et dt_1 par $-dt_2 - \ldots - dt_s$. Puis on pose

$$\omega = {}_1(t_2, \ldots, t_s; dt_2, \ldots, dt_s)$$

avec $_1 \in O(t_2, \ldots, t_s; dt_2, \ldots, dt_s)$. En n on de nit $\in \Omega^{O}{}_s$:

$$_1(t_0, t_1, \ldots, t_s; dt_0, \ldots, dt_s) = \gamma_2(1_2 \quad t_1 \quad {}_1(t_2, \ldots, t_s; dt_2, \ldots, dt_s))$$

On veri e que les restrictions aux faces sont nulles pour $i > 0$ et que la restriction a la 0-face est de la forme $_2(1_2 \quad t_1 \quad \omega(t_1, \ldots, t_s; dt_1, \ldots, dt_s))$. De maniere analogue on construit pour chaque i des formes $_i$ telles que:

$_j(\ _i) = 0$ pour $j \neq 0$,

$_0(\ _j) = {}_2(1_2 \quad t_j \quad \omega(t_1, \ldots, t_s; dt_1, \ldots, dt_s))$.

Et la forme est donnee par la formule suivante:

$$= \sum_{1 \quad i \quad s} {}_i(t_0, t_1, \ldots, t_s; dt_0, \ldots, dt_s).$$

Cette forme veri e:

$_j(\ ) = 0$ pour $j \neq 0$,

$$_0(\ ) = \sum_{1 \quad i \quad s} \gamma_2(1_2 \quad t_j \quad \omega(t_1, \ldots, t_s; dt_1, \ldots, dt_s))$$

$$_0(\ ) = {}_2(1_2 \quad \sum_{1 \quad i \quad s} t_j \quad \omega(t_1, \ldots, t_s; dt_1, \ldots, dt_s))$$

$$_0 = {}_2(1_2 \quad 1_0 \quad \omega(t_1, \ldots, t_s; dt_1, \ldots, dt_s)).$$

Comme $_2(1_2 \quad 1_0 \quad w) = w$ (d'apres la proposition 3.3) on a:

$_0(\ ) = \omega(t_1, \ldots, t_s; dt_1, \ldots, dt_s).$ □

Theoreme 3.1 *Soit O une operade co brante, unitaire, augmentee (l'augmentation est surjective), telle que chaque R-module di erentiel gradue $O(l)$ est borne superieurement.*

Alors l'algebre $\Omega^{O}(X)$ est homotopiquement equivalente a $C\ X$ (comme R-module di erentiel $\mathbb{Z}$-gradue). Cette equivalence d'homotopie est naturelle en X.

Preuve C'est une consequence immediate des lemmes precedents et de la theorie des modeles acycliques. □

Remarques On peut en fait montrer que si O est une operade unitaire, augmentee (l'augmentation est toujours supposee surjective), telle que chaque R-module di erentiel gradue $O(l)$ est borne superieurement et $R[\ _l]$-projectif, alors le theoreme precedent est encore valable. En particulier cette construction s'applique a l'operade R_B. Cette construction s'applique aussi a As l'operade des algebres associatives. M. Karoubi a aussi de ni un foncteur a valeurs dans les algebres associatives (cf [24], [25]). Mais ce foncteur di ere de notre foncteur Ω^{As}. En n si on travaille avec R un corps de caracteristique nulle on peut toujours de nir un foncteur de formes di erentielles generalisees pour O une operade unitaire, augmentee et bornee superieurement.

3.3 Theories de cocha^nes et structures E_1

On fait d'abord quelques rappels sur les notions de theories de cocha^nes [43], [27] et de theories cohomologiques [5]. On montre que tout foncteur de formes di erentielles generalisees est une theorie de cocha^nes. On explore la structure de E_1-algebre des theories cohomologiques et des foncteurs de formes di erentielles generalisees; on en deduit deux approches pour construire des cup-i produits sur ces objets. Pour nir on montre que le foncteur des formes di erentielles generalisees pour les E_1-algebres est en un certain sens, universel.

On donne une version $\mathbb{Z}$-graduee des notions de theories de cocha^nes et de theories cohomologiques.

De nition 3.3 Soit $F : S^{op} \longrightarrow O{-}Alg_{dg}$ un foncteur. On dit que ce foncteur est une theorie de cocha^nes s'il satisfait aux proprietes suivantes:

i) Pour tout ensemble simplicial X on a $F(X) = H\ (X;R)$.

ii) Pour toute inclusion simpliciale $i : K \longrightarrow X$, le morphisme induit

$F(i) : F(X) \longrightarrow F(K)$ est un epimorphisme.

Proposition 3.4 *Le foncteur des formes di erentielles generalisees* Ω^O *de nit une theorie de cocha^nes.*

Preuve La condition i) a ete veri ee dans le paragraphe precedent (theoreme 3.1). Veri ons que Ω^O transforme les inclusions simpliciales en epimorphismes.

C'est une consequence immediate du fait que Ω^O est un ensemble simplicial contractile. En effet, on considere le diagramme d'ensembles simpliciaux suivants:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[r, "f'"'] & \Omega^O \end{tikzcd}$$

Comme i est une inclusion simpliciale (une cofibration dans la categorie des ensembles simpliciaux), et que Ω^O est contractile et fibrant (comme ensemble simplicial), on peut toujours etendre une application simpliciale $f : K \longrightarrow \Omega^O$ en un morphisme $f' : X \longrightarrow \Omega^O$. □

Les axiomes dus a Cartan [5] et a Swan [44] permettent de construire une vaste classe de theories de cochaînes. Nous donnons ici une version $\mathbb{Z}$-graduee de ces axiomes.

Definition 3.4 Soit M un R-module differentiel $\mathbb{Z}$-gradue simplicial et augmente. On considere le foncteur

$$M : S^{op} \longrightarrow \mathrm{R}M_{\mathbf{dg}}$$

tel que:

$$M_X = Hom_S(X; M).$$

On dit que le foncteur M verifie les axiomes de Cartan-Swan s'il satisfait les deux conditions suivantes:

i) Le R-module M est acyclique relativement a l'augmentation. Et le noyau de la differentielle $d : M^0 \longrightarrow M^1$ a le type d'homotopie d'un $K(R; 0)$.

ii) Le R-module simplicial M est un ensemble simplicial contractile.

Le theoreme suivant est dû a Cartan [5] dans le cas $\mathbb{N}$-gradue; on le generalise au cas $\mathbb{Z}$-gradue:

Theoreme 3.2 *Si le foncteur M associe au R-module simplicial differentiel $\mathbb{Z}$-gradue M satisfait les axiomes de Cartan-Swan, alors il definit une theorie de cochaînes.*

Preuve Cette generalisation ne pose pas de difficultes. Rappelons juste les arguments de Cartan.

Soit Z^nM le noyau de la différentielle

$$d : M^n \longrightarrow M^{n+1}$$

Comme le R-module M est acyclique relativement a l'augmentation, on a les suites exactes courtes:

$$0 \longrightarrow Z^nM \longrightarrow M^n \xrightarrow{d} Z^{n+1}M \longrightarrow 0$$

pour $n \geq 0$.

En tant que suites exactes courtes de groupes abeliens simpliciaux, le morphisme d est une fibration de Kan de fibre Z^nM. De plus comme M^n est un ensemble simplicial contractile et que Z^0M a le type d'homotopie d'un $K(R;0)$, on en deduit que chaque Z^nM a le type d'homotopie d'un $K(R;n)$. Ces suites exactes s'identifient aux fibrations:

$$K(R;n) \longrightarrow PK(R;n) \longrightarrow K(R;n+1).$$

Pour conclure on identifie $\pi^nM(X)$ avec $[X;Z^nM]$. $\square$

Les Z^nM forment un spectre dans la categorie des ensembles simpliciaux (en l'occurence un spectre d'Eilenberg-Mac-Lane HR).

Proposition 3.5 *Le foncteur des formes différentielles generalisees $\Omega^{\mathcal{O}}$ verifie les axiomes de Cartan-Swan. On a les isomorphismes suivants:*

$$\pi^n\Omega^{\mathcal{O}}(X) = H^n(X;R) = [X;Z_n\Omega^{\mathcal{O}}].$$

Preuve On verifie que le noyau $Z_0\Omega^{\mathcal{O}}$ de la différentielle

$$d : \Omega^{\mathcal{O}0} \longrightarrow \Omega^{\mathcal{O}1}$$

a le type d'homotopie d'un $K(R;0)$.

Dans la preuve du theoreme precedent $\pi_n\Omega^{\mathcal{O}}{}_X$ est identifie avec $[X;Z_n\Omega^{\mathcal{O}}]$, ou $Z^n\Omega^{\mathcal{O}}$ est le noyau de

$$d : \Omega^{\mathcal{O}n} \longrightarrow \Omega^{\mathcal{O}n+1}.$$

De plus, on sait que le foncteur des formes différentielles generalisees $\pi^n\Omega^{\mathcal{O}}{}_X$ est isomorphe a $H^n(X;R)$.

Ce qui nous permet l'identification de $\pi^0\Omega^{\mathcal{O}}(X)$ avec $[X,Z_0\Omega^{\mathcal{O}}]$. $\square$

On suppose maintenant que $\mathcal{O} = E_\infty$ est un modele cofibrant de $\mathcal{C}om$ dans la categorie des operades unitaires augmentees.

Un des interêts majeurs des E_∞-algebres est qu'elles apparaissent de maniere naturelle dans l'etude de l'homotopie des espaces topologiques.

En effet, Hinich et Schechtmann [21] ont demontre que pour tout ensemble simplicial X, l'algebre des cochaînes singulieres normalisees est munie de maniere naturelle d'une structure de E_∞-algebre.

En coefficients $\mathbb{F}_p$, les operations de Steenrod sur $H^*C^*(X;\mathbb{F}_p) = H^*(X;\mathbb{F}_p)$ determinees par cette structure E_∞ coincident avec les operations de Steenrod classiques.

Proposition 3.6 *Il existe un morphisme naturel de E_∞-algebres:*

$$\Omega^{E_\infty}(X) \longrightarrow C^*(X;R)$$

qui induit une equivalence d'homotopie dans la categorie $R\text{-}\mathcal{M}_{\mathbf{dg}}$.

Preuve On generalise la construction donnee par M. Karoubi dans le cadre des formes differentielles non-commutatives.

Pour ce faire on rappelle qu'une cochaîne singuliere $\varphi \in C^n(\Delta[s];R)$ peut être consideree comme une application qui associe un element $\varphi(i_0,\ldots,i_n)$ de R a toute suite $(i_0,\ldots,i_n)$ d'elements de $\{0,\ldots,s\}$ (ce morphisme doit aussi verifier des conditions de compatibilite avec les morphismes de faces et de degenerescences de $\Delta[s]$).

Le cup produit

$$C^n(\Delta[s];R) \otimes C^m(\Delta[s];R) \longrightarrow C^{n+m}(\Delta[s];R)$$

est donne par la formule d'Alexander-Whitney:

$$(\varphi \cup \psi)(i_0,\ldots,i_{n+m}) = \varphi(i_0,\ldots,i_n)\,\psi(i_n,\ldots,i_{n+m}).$$

Si $\varphi \in C^0(\Delta[s];R)$, son bord $\delta(\varphi)$ est donne par: $\delta(\varphi)(i,j) = \varphi(i) - \varphi(j)$.

Nous allons definir un morphisme de E_∞-algebres:

$$\psi_s : \Omega^{E_\infty}(\Delta[s]) \longrightarrow C^*(\Delta[s];R).$$

Comme $\Omega^{E_\infty}(\Delta[s]) = E_\infty(t_0,\ldots,t_s,dt_0,\ldots,dt_s)/I_s$, pour definir ψ_s il suffit de donner l'image de $\{t_0,\ldots,t_s\,dt_0,\ldots,dt_s\}$.

On pose $\psi_s(t_r) = X_r$ avec $X_r \in R[X_0,\ldots,X_s]/(\sum_{r=0}^{n} X_r = 1)$ ce polynôme definit un element de $C^0(\Delta[s];R)$: pour $i \in \{0,\ldots,s\}$ $X_r(i)$ correspond a l'evaluation de ce polynôme en $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ ou 1 est en i^{eme} position.

On definit X_r par $X_r(i;j) = X_r(i) - X_r(j)$, enfin on pose $_s(dt_r) = X_r$.

Ces morphismes induisent des quasi-isomorphismes (en effet on remarque que l'image d'un scalaire $r \in R$ par $_s$ est l'application constante de valeur r).

Tout ce qui precede permet de definir une transformation naturelle:

$$: \Omega^{E_\infty} \longrightarrow C^*(-;R).$$

Et, par un argument de la theorie des modeles acycliques, on en deduit que induit une equivalence d'homotopie dans la categorie des R-modules differentiels gradues. $\square$

On donne maintenant des resultats de comparaison entre les differentes theories de formes differentielles generalisees. Pour ce faire, on remarque que si O est une operade cofibrante unitaire augmentee, alors toute E_∞-algebre est de maniere naturelle une O-algebre; cette structure est induite par le morphisme d'operades f:

$$\begin{tikzcd} & E_\infty \arrow[d, "\simeq"] \\ O \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r] & Com \end{tikzcd}$$

Le morphisme f est un relevement de l'augmentation . Celui-ci existe car O est cofibrante et l'augmentation $: E_\infty \longrightarrow Com$ etant une fibration triviale possede la propriete de relevement par rapport aux cofibrations.

Proposition 3.7 *Soit O une operade (cofibrante unitaire augmentee), il existe une structure naturelle de O-algebre sur $C^*(X;R)$ et sur $\Omega^{E_\infty}(X)$.*

De plus, on a des morphismes naturels de O-algebres:

$$\Omega^{O}(X) \longrightarrow \Omega^{E_\infty}(X)$$

$$\Omega^{O}(X) \longrightarrow C^*(X;R).$$

qui induisent des equivalences d'homotopie.

Preuve La structure de O-algebre sur $C^*(X;R)$ provient du morphisme

$$f : O \longrightarrow E_\infty$$

et du fait que $C^*(X;R)$ est une E_∞-algebre.

Le premier morphisme

$$\Psi_X : \Omega^{O}(X) \longrightarrow \Omega^{E_\infty}(X)$$

est obtenu via les applications:

$$\Psi_s : \Omega^{O}(\Delta[s]) \longrightarrow \Omega^{E_\infty}(\Delta[s]).$$

On rappelle que:

$$\Omega^{O}(\Delta[s]) = O(t_0, \dots, t_s, dt_0, \dots, dt_s)/I_s$$

et que:

$$\Omega^{E_\infty}(\Delta[s]) = E_\infty(t'_0, \dots, t'_s, dt'_0, \dots, dt'_s)/I_s.$$

Alors Ψ_s est entierement determinee par les conditions suivantes $\Psi_s(t_i) = t'_i$ et $\Psi_s(dt_i) = dt'_i$. □

On donne maintenant deux manieres de construire des cup-i produits pour le foncteur Ω^{O}.

La premiere methode applique la theorie des modeles acycliques.

Le groupe symetrique Σ_p agit sur $\Omega^{O}(X)^{\otimes p}$ via l'application d'echange T.

Soit $\tau \in \Sigma_p$ une permutation cyclique d'ordre p. On introduit les operations suivantes:

$$\alpha = 1 - \tau$$

$$\beta = 1 + \tau + \dots + \tau^{p-1}.$$

Elles verifient $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$. Considerons le produit $\cup_0$ defini par la composee

$$\cup_0 : \Omega^{O}(X)^{\otimes p} \xrightarrow{s_p \otimes} O(p) \otimes \Omega^{O}(X)^{\otimes p} \xrightarrow{\theta_p} \Omega^{O}(X)$$

Avec s_p une section de l'augmentation $\varepsilon : O(p) \longrightarrow R$, et θ_p l'action de O sur $\Omega^{O}(X)$.

Le morphisme $\cup_0 \alpha$ est nul en homotopie (le produit etant commutatif en homotopie, d'apres un argument de la theorie des modeles acycliques). Il existe un homomorphisme $\cup_1$ de degre -1, tel que:

$$\cup_0 \alpha = \cup_1 d + d \cup_1.$$

Maintenant on considere le morphisme $\cup_1 \beta$: lui aussi est nul en homotopie. Toujours d'apres la theorie des modeles acycliques il existe un homomorphisme $\cup_2$, de degre -2, tel que:

$$\cup_1 \beta = \cup_2 d - d \cup_2.$$

Ainsi par iteration on construit une suite d'operations veri ant les formules suivantes:

$$_{2n} = {}_{2n+1}d + d\ {}_{2n+1}$$
$$_{2n+1} = {}_{2n}d - d\ {}_{2n}:$$

Si on travaille a coe cients dans $\mathbb{F}_p$, les operations de Steenrod sont obtenues en composant avec la diagonale:

$$\Omega^O(X) \longrightarrow \Omega^O(X)^{\ p} \overset{n}{\longrightarrow} \Omega^O(X):$$

Bien sûr toutes ces constructions sont naturelles en X.

Decrivons maintenant la seconde approche:

Proposition 3.8 *Pour toute operade co brante le foncteur Ω^O est a valeurs dans la categorie des E_1-algebres.*

Preuve On commence par montrer que $\Omega^O(X)$ est une algebre sur une operade acyclique que l'on note $End(O)$.

On de nit cette operade par:

$$End(O)(n) = Hom_{\mathbf{R}\,M_{\mathbf{dg}S}}(\Omega^O\ {}^n; \Omega^O\ )$$

pour n 2, on pose $End(O)(0) = End(O)(1) = R$. Cette operade est acyclique car on a prouve que Ω^O est contractile comme R-module simplicial di erentiel $\mathbb{Z}$-gradue.

Dans la categorie des operades il existe un modele co brant note E_1 de l'operade $End(O)$:

$$E_1 \longrightarrow End(O) \longrightarrow Com:$$

Chaque morphisme est une bration triviale donc E_1 est aussi un modele co - brant de l'operade Com.

Et le morphisme d'operades $E_1 \longrightarrow End(O)$ permet de de nir une structure de E_1-algebre sur $\Omega^O(X)$. □

Remarques Le R-module $\Omega^O(X)$ est aussi une algebre sur une seconde operade notee $TN_{Dold}(O)$. Cette operade est telle que:

$$TN_{Dold}(O)(n) = Hom(\Omega^O\ {}^n; \Omega^O)$$

pour n 2, et

$$TN_{Dold}(O)(0) = TN_{Dold}(O)(1) = R:$$

Ce sont les transformations naturelles entre le foncteur $\Omega^{O\ \ n}$ et le foncteur Ω^{O}. L'acyclicite de cette operade est une consequence immediate de la theorie des modeles acycliques. Ceci generalise un resultat de A. Dold [6] obtenu pour le foncteur des cha^nes singulieres d'un ensemble simplicial. De plus, il existe une paire de morphismes $: TN_{Dold}(O) \rightleftharpoons End(O) :$, telle que est une bration acyclique (dans la categorie des operades) et $= Id$.

Soit T un element de $TN_{Dold}(O)(n)$, le morphisme $(T)\ 2\ End(O)(n)$ est donne par $(T) = T(\ )$.On rappelle que est l'ensemble cosimplicial forme par les $[p]$.

Considerons $f\ 2\ End(O)(n)$, on lui associe la transformation naturelle T_f de nie comme etant la composee:

$$T_f(X) : Hom_{\mathbf{S}}(X;\Omega^{O})^{\ n} -! \ Hom_{\mathbf{S}}(X;\Omega^{O\ \ n}) \stackrel{f}{-!} \ Hom_{\mathbf{S}}(X;\Omega^{O}):$$

Les operades $TN_{Dold}(O)$ et $End(O)$ ne sont pas co brantes car l'operade Com est un retract de ces deux operades.

On resume ces resultats par le theoreme suivant:

Theoreme 3.3 *Pour tout ensemble simplicial X l'algebre $\Omega^{O}(X)$ est munie de l'action d'operations. Cette action induit sur $\Omega^{O}(X)$ une structure d'algebre instable sur l'algebre de Steenrod telle que $\Omega^{O}(X) = H\ (X;\mathbb{F}_p)$ soit un isomorphisme d'algebres instables.*

La proposition suivante relie les di erents foncteurs de formes di erentielles generalisees.

Proposition 3.9 i) *Il existe un morphisme naturel de E_1-algebres:*

$$\Omega^{E_1}(X) -! \ \Omega^{O}(X)$$

qui induit une equivalence d'homotopie dans la categorie $\mathrm{R}\,M_{\mathbf{dg}}$.

ii) *Si R est un corps de caracteristique nulle, on note A_{PL} le foncteur de Sullivan ([43], [4], [13]). Alors on a un morphisme naturel de E_1-algebres:*

$$\Omega^{E_1}(X) -! \ A_{PL}(X)$$

qui induit une equivalence d'homotopie dans la categorie $\mathrm{R}\,M_{\mathbf{dg}}$.

iii) *Si on note Ω_K le foncteur des formes di erentielles non-commutatives introduit par M. Karoubi [24], [25], on a un morphisme naturel de E_1-algebres:*

$$\Omega^{E_1}(X) -! \ \Omega_K(X)$$

qui induit une equivalence d'homotopie dans la categorie $\mathrm{R}\,M_{\mathbf{dg}}$.

Preuve Comme pour les propositions precedentes, on peut donner des formules explicites pour chacun de ces morphismes. □

3.4 Applications a l'homotopie des algebres sur une operade

On suppose que l'operade O permet de de nir un foncteur de formes di erentielles generalisees. Dans ce cadre on va generaliser quelques constructions bien connues en homotopie rationnelle. En fait on retrouve les constructions de l'homotopie rationnelle, quand on prend $R = \mathbb{Q}$ et $O = Com$, le foncteur Ω^{Com} est le foncteur A_{PL} de Sullivan ([43],[4]).

De nition 3.5 Pour deux O-algebres A et B on de nit un espace fonctionnel simplicial $Hom\ (A;B)$ dont les n-simplexes sont donnes par:

$Hom\ ^{[n]}(A;B) = Hom_{O-\mathbf{Alg_{dg}}}(A;O^n\ q\ B).$

De nition 3.6 Le foncteur

$$\mathbb{M} : O - Alg_{dg}^{op} -!\ S$$

donne par:

$$\mathbb{M}(A) = Hom_{O-\mathbf{Alg_{dg}}}(A;\Omega^O) = Hom\ (A;R):$$

est appele foncteur de realisation simpliciale.

Proposition 3.10 *Les foncteurs contravariants Ω^O et $\mathbb{M}$ sont des foncteurs adjoints au sens de Quillen entre les categories $O - A\mathrm{lg}_{\mathbf{dg}}$ et S.*

Preuve On commence par montrer que Ω^O et $\mathbb{M}$ sont adjoints, c'est-a dire que l'on a une bijection naturelle

$$\Psi_X : Hom_S(X;Hom\ (A;R)) -!\ Hom_{O-\mathbf{Alg_{dg}}}(A;\Omega^O(X))$$

Si $X = \ [n]$ c'est evident (d'apres la de nition du foncteur $\mathbb{M}$).

Tout ensemble simplicial peut s'ecrire sous la forme d'un coegalisateur:

$$q_{s2S}\ \ [s] \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} q_{t2T}\ \ [t] \longrightarrow X$$

On utilise la propriete suivante du foncteur Ω^O:

Le foncteur $\Omega^O : S -!\ O - A\mathrm{lg}_{\mathbf{dg}}$ transforme les colimites en limites. D'ou en appliquant Ω^O au coegalisateur precedent on obtient l'egalisateur:

$$\Omega^O(X) \longrightarrow \Omega^O(q_{t2T}\ \ [t]) \underset{\Omega^O g}{\overset{\Omega^O f}{\rightrightarrows}} \Omega^O(q_{s2S}\ \ [s])$$

Puis

$$\Omega^{\mathcal{O}}(X) \longrightarrow \prod_{t\in T} \Omega^{\mathcal{O}}(\Delta[t]) \rightrightarrows \prod_{s\in S} \Omega^{\mathcal{O}}(\Delta[s])$$

et

$$\Omega^{\mathcal{O}}(X)\otimes R \longrightarrow \prod_{t\in T} (\Omega^{\mathcal{O}}(\Delta[t])\otimes R) \rightrightarrows \prod_{s\in S} (\Omega^{\mathcal{O}}(\Delta[s])\otimes R)$$

Le foncteur $Hom_{\mathcal{O}-\mathbf{Alg_{dg}}}(A;-)$ transforme les produits en produits et les egalisateurs en egalisateurs. On a alors:

$$Hom_{\mathcal{O}-\mathbf{Alg_{dg}}}(A;\Omega^{\mathcal{O}}(X)\otimes R) \longrightarrow \prod_{t\in T} Hom_{\mathcal{O}-\mathbf{Alg_{dg}}}(A;\Omega^{\mathcal{O}}(\Delta[t])\otimes R)$$
$$\ldots \rightrightarrows \prod_{s\in S} Hom_{\mathcal{O}-\mathbf{Algdg}}(A;\Omega^{\mathcal{O}}(\Delta[s])\otimes R)$$

Si on applique le foncteur $Hom_{\mathcal{S}}(-;Hom(A;B))$ au coegalisateur initial, on obtient l'egalisateur:

$$Hom_{\mathcal{S}}(X;Hom(A;R)) \longrightarrow \prod_{t\in T} Hom_{\mathcal{S}}(\Delta[t];Hom(A;R))$$
$$\ldots \rightrightarrows \prod_{s\in S} Hom_{\mathcal{S}}(\Delta[s];Hom(A;R))$$

Comme Ψ est une bijection sur les seconds et troisiemes termes, c'est aussi une bijection sur les premiers.

Pour finir, on remarque que le foncteur $\Omega^{\mathcal{O}}$ transforme les cofibrations entre ensembles simpliciaux en fibrations et qu'il preserve les equivalences faibles. □

Grâce a la notion de formes differentielles generalisees, on peut definir un objet chemin pour la categorie des $\mathcal{O}$-algebres: en effet considerons la $\mathcal{O}$-algebre $\Omega_1^{\mathcal{O}} = \Omega^{\mathcal{O}}(\Delta[1])$ (avec $\Delta[1]$ le 1-simplexe standard). Puis on definit le foncteur:

$$-\otimes\Omega_1^{\mathcal{O}} : \mathcal{O}-\mathrm{Alg}_{\mathbf{dg}} \longrightarrow \mathcal{O}-\mathrm{Alg}_{\mathbf{dg}}$$

Pour toute $\mathcal{O}$-algebre A on a les applications suivantes:

$$A \xrightarrow{p} A\otimes\Omega_1^{\mathcal{O}} \xrightarrow{(d_0,d_1)} A\times A.$$

On rappelle que l'on peut identifier $\Omega_1^{\mathcal{O}}$ avec $\mathcal{O}(t,dt)$, on a des morphismes

$$\varepsilon_0,\varepsilon_1 : \Omega_1^{\mathcal{O}} \longrightarrow \Omega_0^{\mathcal{O}} = R$$

tels que $\varepsilon_i(dt) = 0$ et $\varepsilon_i(t) = i$. Le morphisme p est l'application canonique. Et les applications d_0, d_1 sont definies comme etant l'identite sur A et ε_i sur $\Omega_1^{\mathcal{O}}$.

Ces morphismes satisfont les proprietes suivantes:

i) $d_i p$ est l'identite, $i = 0; 1$.

ii) d_i est une bration triviale, $i = 0; 1$. Le morphsime $(d_0; d_1)$ est une bration.

iii) p est une equivalence faible.

Grâce a ces observations on de nit maintenant une notion d'homotopie simpliciale.

De nition 3.7 Deux morphismes $f; g : A \longrightarrow B$ sont simplicialement homotopes s'il existe une application H de $Hom^{[1]}(A; B)$, $H : A \longrightarrow B \, q \, \Omega_1^O$ telle que $d_0 H = f$ et $d_1 H = g$.

Proposition 3.11 *L'homotopie simpliciale satisfait les proprietes suivantes:*

i) *Soient deux applications $f; g : A \longrightarrow B$ qui sont simplicialement homotopes, alors:*

$$f = g : A \longrightarrow B:$$

ii) *Si A est une O-algebre co brante l'homotopie simpliciale est une relation d'equivalence.*

iii) *Si A est co brante on a l'isomorphisme:*

$$[A; B]_{HoO-\mathbf{Alg_{dg}}} = {}^0 Hom (A; B):$$

4 Un modele de la suite spectrale de Leray-Serre

Un des outils fondamentaux en homotopie rationnelle est la construction du modele algebrique de la bre a partir de celui de la bration. Construction que l'on doit a P.P. Grivel [17] (pour les espaces 1-connexes) et a S. Halperin [18] (pour les espaces nilpotents).

Nous generalisons l'approche de P.P. Grivel pour le foncteur A_{PL} de Sullivan aux formes di erentielles generalisees pour les O-algebres.

Les quatre premiers paragraphes sont consacres a la construction d'une suite spectrale de Leray-Serre au moyen des formes di erentielles generalisees. A cet e et, on de nit des formes di erentielles generalisees avec coe cients locaux (paragraphe 1), puis des formes di erentielles generalisees pour les bisimplexes (paragraphe 2).

Les techniques bisimpliciales (Dress [8],[29]) sont utilisees pour associer un bicomplexe a une fibration (paragraphe 3). En filtrant ce bicomplexe, on retrouve la suite spectrale de Leray-Serre (paragraphe 4.3, theoreme 4.1).

Dans le paragraphe 4.4, on construit une suite spectrale a partir du modele cofibrant en E_1-algebres d'une fibration. Par un theoreme de comparaison entre cette nouvelle suite spectrale et la suite spectrale de Leray-Serre construite precedemment, on en deduit un modele de la fibre (proposition 4.9).

Le paragraphe 4.5 donne une interpretation algebrique (sur le modele) de la transgression pour la suite spectrale de Leray-Serre.

4.1 Prefaisceaux sur les ensembles simpliciaux

Soit X un ensemble simplicial; on lui associe une categorie que l'on note X. Les objets de X sont les p-simplexes de X. Les morphismes de X correspondent aux applications $\theta : [p] \longrightarrow [q]$ telles que le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
{[p]} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "x"'] & & {[q]} \arrow[dl, "x'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

A toute application simpliciale $f : X \longrightarrow Y$ est associe un foncteur f : X $\longrightarrow$ Y.

Un prefaisceau sur X a valeurs dans une categorie C est un foncteur contravariant de X dans C. On note $F(\theta; x) : F(\theta^* x) \longrightarrow F(x)$ l'application induite par $\theta : [p] \longrightarrow [q]$.

Les prefaisceaux que l'on considere sont a valeurs dans Ab (la categorie des groupes abeliens), dans $R\,M_{\mathbf{dg}}$ ou dans $O - Alg_{dg}$.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application simpliciale et si F est un prefaisceau sur X alors on a un prefaisceau image reciproque $f^* F = F$f.

Les prefaisceaux sur X a valeurs dans une categorie abelienne forment encore une categorie abelienne. Une suite de prefaisceaux

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

est exacte si pour tout p-simplexe x_p de X la suite

$$0 \longrightarrow F(x_p) \longrightarrow G(x_p) \longrightarrow H(x_p) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Les foncteurs formes di erentielles generalisees sont des prefaisceaux. Les cocha^nes singulieres sont aussi un exemple de prefaisceau.

Prefaisceaux simpliciaux Un exemple important est le cas des prefaisceaux a valeurs dans **SC** la categorie des objets simpliciaux de **C**. Soit F un prefaisceau a valeurs dans **SC**.

Une section s du prefaisceau F est la donnee pour tout q-simplexe $x \in X_q$ d'un ensemble simplicial $s(x)$ tel que pour toute application $\ :[p] \to [q]$ on a:

$$F(\ ;x)(s(\ (x))) = \ (s(x)).$$

Un prefaisceau constant F sur X est tel que pour tout q-simplexe $x \in X_q$, $F(x) = M$ avec M un objet de **SC**; une section de F est une application simpliciale de X dans M.

Systemes de coe cents locaux Un systeme de coe cients locaux L sur un ensemble simplicial X est un prefaisceau sur X a valeurs dans **Ab** tel que pour tout operateur de face $\ _i : \ [p+1] \to \ [p]$ et pour tout p-simplexe $x \in X_p$, les morphismes $L(\ _i;x) : L(\ _i x) \to L(x)$ soient des isomorphismes.

Pour tout 0-simplexe $x \in X$, on a une action de $\ _1(X;x)$ sur le groupe abelien $L(x)$. Le systeme de coe cients est dit simple si l'action des groupes fondamentaux est triviale. De plus si X est connexe et si le systeme de coe cients est simple alors les groupes $L(x)$ sont isomorphes.

On construit un foncteur $\Omega^O(X;-) : \mathbf{FR}M_{\mathbf{dg}_\mathbf{X}} \to \mathbf{SFR}M_{\mathbf{dg}_\mathbf{X}}$ de la categorie des prefaisceaux sur X a valeurs dans $\mathbf{R}M_{\mathbf{dg}}$ vers la categorie des prefaisceaux sur X a valeurs dans $\mathbf{SR}M_{\mathbf{dg}}$.

On xe F un prefaisceau sur X a valeurs dans $\mathbf{R}M_{\mathbf{dg}}$. On lui associe un prefaisceau note $\Omega^O(X;F)$ sur X a valeurs dans $\mathbf{SR}M_{\mathbf{dg}}$. Ce prefaisceau associe a $x \in X$ le module di erentiel gradue simplicial $\Omega^O\ \ F(x)$.

De nition 4.1 Une section du prefaisceau sur $\Omega^O(X;F)$ s'appelle une forme di erentielle generalisee sur X a valeurs dans le prefaisceau F. On note $\underline{\Omega}^O(X;F)$ l'ensemble de ses sections.

L'objet $\underline{\Omega}^O(X;F)$ est naturellement bigradue. L'ensemble des elements de bidegre $(r;s)$ est note $\underline{\Omega}^{O;r}(X;F^s)$. Le degre s est donne par le degre di erentiel de F, et le degre r par celui de Ω^O. On a donc bien un foncteur $\underline{\Omega}^{O;\ }(X;F\ )$ de la categorie des ensembles simpliciaux vers la categorie des R-modules di erentiels bigradues.

Interessons-nous au cas ou F est un prefaisceau constant. Alors F s'identifie a un R-module differentiel gradue M concentre en degre 0. Une forme differentielle generalisee a valeurs dans F est une application simpliciale de X dans $\Omega^* \otimes M$. En particulier si $M = R$ alors on a $\underline{\Omega}^*(X;R) = \Omega^*(X)$.

Proposition 4.1 *Soit X un ensemble simplicial et $F = M$ un prefaisceau constant, avec M un R-module plat; alors on a l'isomorphisme:*

$$\underline{\Omega}^*(X;M) \cong H^*(X;M).$$

Preuve On utilise la theorie des modeles acycliques. Le foncteur $\underline{\Omega}^*(-;M)$ est corepresentable car l'ensemble simplicial $\Omega^* \otimes M$ est contractile.

Le foncteur est acyclique car pour tout p le R-module differentiel gradue $\Omega^*(\Delta[p]) \otimes M$ est acyclique. □

De plus le foncteur $\underline{\Omega}^*(X;-)$ est exact:

Proposition 4.2 *Si $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ est une suite exacte de prefaisceaux, alors la suite*

$$0 \longrightarrow \Omega^*(X;F) \longrightarrow \Omega^*(X;G) \longrightarrow \Omega^*(X;H) \longrightarrow 0$$

est exacte, tout comme la suite

$$0 \longrightarrow \underline{\Omega}^*(X;F) \longrightarrow \underline{\Omega}^*(X;G) \longrightarrow \underline{\Omega}^*(X;H) \longrightarrow 0.$$

Preuve On suppose que $0 \longrightarrow F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H \longrightarrow 0$ est une suite exacte de prefaisceaux sur un ensemble simplicial X ce qui signifie que pour tout $x \in X$ la suite

$$0 \longrightarrow F(x) \xrightarrow{u_x} G(x) \xrightarrow{v_x} H(x) \longrightarrow 0$$

est exacte. La platitude de $\Omega(\nabla)$ entraîne que

$$0 \longrightarrow \Omega^* \otimes F(x) \xrightarrow{Id \otimes u_x} \Omega^* \otimes G(x) \xrightarrow{Id \otimes v_x} \Omega^* \otimes H(x) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte. Donc

$$0 \longrightarrow \Omega^* \otimes F \xrightarrow{Id \otimes u} \Omega^* \otimes G \xrightarrow{Id \otimes v} \Omega^* \otimes H \longrightarrow 0$$

est aussi une suite exacte courte.

L'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \underline{\Omega}^*(X;F) \longrightarrow \underline{\Omega}^*(X;G) \longrightarrow \underline{\Omega}^*(X;H) \longrightarrow 0.$$

se deduit de la propriete d'extension des formes differentielles. □

Soit F est un prefaisceau sur X a valeurs dans R $M_{\mathbf{dg}}$. On note d sa di erentielle, Z^s le prefaisceau des cobords de degre s de F et $H^s(F)$ le prefaisceau des classes de cohomologie de degre s de F. De la suite exacte:

$$0 \longrightarrow Z^s \longrightarrow F^s \longrightarrow H^s(F) \longrightarrow 0$$

et de la proposition precedente on deduit le resultat suivant:

Corollaire 4.1 *On a* $\ ^s(\underline{\Omega}^O(X;F)) = \underline{\Omega}^O(X;H^s(F))$ *ou* $\ ^s(\underline{\Omega}^O(X;F))$ *est la cohomologie de* $\underline{\Omega}^O(X;F)$ *calculee avec la di erentielle de* F.

4.2 Les formes di erentielles generalisees pour les bisimplexes

Le R-module di erentiel $\Omega^O \quad \Omega^O$ est un R-module di erentiel bisimplicial et bigradue, un element de bidimension $(p;q)$ est un element de $\Omega^O(\ [p]) \quad \Omega^O(\ [q])$. On note $\Omega^O_{bi}(X)$ l'ensemble des formes di erentielles generalisees pour le bisimplexe X, $\Omega^O_{bi}(X) = Hom_{BiS}(X;\Omega^O \quad \Omega^O)$.

Une forme di erentielle generalisee de bidimension $(p;q)$ sur un ensemble bisimplicial X est une application bisimpliciale de X dans $\Omega^O_p \quad \Omega^O_q$.

L'objet $\Omega^O \quad \Omega^O$ possede une autre bigraduation donnee par le degre di erentiel.

Une forme di erentielle generalisee de bidegre $(l;m)$ sur X un ensemble bisimplicial est une application bisimpliciale de X dans $\Omega^{O;l} \quad \Omega^{O;m}$.

On a un foncteur $\ : S \longrightarrow BiS$ de la categorie des ensembles simpliciaux dans la categorie des ensembles bisimpliciaux tel que:

$$(\ X)_{p;q} = X_p$$

pour tout q. On veri e aisement que pour tout ensemble simplicial X on a:

$$\Omega^O_{bi}(\ X) = \Omega^O(X):$$

Soit $f : E \longrightarrow B$ une surjection simpliciale. A ce morphisme on associe un ensemble bisimplicial $S_{:;:}f$. Un element de $S_{p;q}f$ est un couple d'applications $w : \ [p] \quad [q] \longrightarrow E$ et $u : \ [p] \longrightarrow B$ telles que:

$$\begin{tikzcd}
{[p] \quad [q]} \arrow[r, "w"] \arrow[d, "pr_1"'] & E \arrow[d, "f"] \\
{[p]} \arrow[r, "u"] & B
\end{tikzcd}$$

On peut montrer que $S_{:;:}f$ et $\ E$ sont quasi-isomorphes [17]. Comme $\Omega^O_{bi}(\ E) = \Omega^O(E)$ on en deduit la proposition:

Proposition 4.3 *Soit $f : E \longrightarrow B$ une surjection simpliciale. On a l'isomorphisme:*

$$(\Omega^O_{bi}(S_{\cdot;\cdot}f)) = H(E;R)$$

Le bisimplexe $S_{\cdot;\cdot}f$ permet de definir un systeme de coefficients locaux sur B. On considere B comme une categorie (les objets de B sont les p-simplexes) et on definit un foncteur $\mathbb{F} : B \longrightarrow S$ en associant a tout simplexe $u_p : [p] \longrightarrow B$ l'ensemble simplicial:

$$(\mathbb{F}(u_p))_q = \{w_{p;q}/(w_{p;q}; u_p) \in S_{p;q}f\}$$

On a alors le systeme de coefficients locaux $F : B \longrightarrow RM_{\mathbf{dg}}$ en posant $F(u_p) = \Omega^O(\mathbb{F}(u_p))$. On a un prefaisceau $\Omega^O(B;F)$ sur B a valeurs dans F.

Proposition 4.4 *On a $H(\underline{\Omega}^{O;r}(B;F^s);d_F) = \underline{\Omega}^{O;r}(B;H^s(F))$. De plus si $f : E \longrightarrow B$ est une fibration de Kan et si le systeme de coefficients locaux F est simple, alors on a aussi:*

$$H(\underline{\Omega}^{O;r}(B;F^s);d_F) = \underline{\Omega}^{O;r}(B;H^s(F)).$$

4.3 Formes differentielles et suites spectrales de Leray-Serre

Dans ce paragraphe on donne une construction de la suite spectrale de Leray-Serre a partir des formes differentielles generalisees.

On utilise cette suite spectrale dans les paragraphes suivants dans le cadre des algebres sur une E_∞-operade cofibrante. Ceci permet de donner un modele algebrique des fibrations.

Theoreme 4.1 *Soit $f : E \longrightarrow B$ une application surjective entre ensembles simpliciaux (on suppose que la cohomologie de B ou que $H^s(F)$ sont finis).*

i) *On a une suite spectrale qui converge vers $H(E;R)$, telle que:*

$E_0^{r;s} = \underline{\Omega}^{O;r}(B;F^s)$, $E_1^{r;s} = \underline{\Omega}^{O;r}(B;H^s(F))$ *et* $E_2^{r;s} = H^r(B;H^s(F))$

ou F est le systeme de coefficients locaux sur B defini precedemment.

ii) *On suppose que f est une fibration de Kan, que B est connexe et que le systeme de coefficients locaux $H^s(F)$ est simple (ce qui est le cas si B est 1-connexe). Alors*

$$E_2^{r;s} = H^r(B;H^s(F;R))$$

F designant la fibre de f.

Preuve On considere la premiere filtration du bicomplexe $\Omega^{O}_{bi}(S_{r;s}f)$. Une forme $\omega \in \Omega^{O}_{bi}(S_{r;s}f)$ est de filtration n, si pour tout bisimplexe $(w;u) \in S_{p;q}f$ on a $\omega(w;u) \in \bigoplus_{r \geq n} \Omega^{O;r}_{p} \otimes \Omega^{O}_{q}$.

De cette filtration on deduit une suite spectrale telle que: $E_0^{r;s} \cong \underline{\Omega}^{O;r}(B;F^s)$. En fait on explicite deux morphismes de modules différentiels gradues:

$$\Phi : \underline{\Omega}^{O;r}(B;F^s) \rightleftharpoons \Omega^{O}_{bi}(S_{r;s}f) : \Psi$$

inverses l'un de l'autre.

L'application Φ est definie de la maniere suivante.

Soit $\omega \in \underline{\Omega}^{O;r}(B;F^s)$ et u_p un p-simplexe de B on a

$$\omega(u_p) \in \Omega^{O;r}_p \otimes F^s(u_p)$$

et par definition

$$\Omega^{O;r}_p \otimes F^s(u_p) = \Omega^{O;r}_p \otimes \Omega^{O;s}(\mathbb{F}(u_p)) = \underline{\Omega}^{O;s}(\mathbb{F}(u_p);\Omega^{O;r}_p).$$

L'application bisimpliciale $\Phi(\omega)$ envoie $(w_{p;q};u_p) \in S_{p;q}f$ sur $\omega(u_p)(w_{p;q}).$

A l'inverse, soit $\omega \in \Omega^{O}_{bi}(S_{r;s}f)$ et u_p un p-simplexe de B, alors pour $w_{p;q} \in (\mathbb{F}(u_p))_q$ on pose

$$\Psi(\omega)(u_p)(w_{p;q}) = \omega(w_{p;q};u_p)$$

Comme la différentielle de $E_0^{r;s}$ est induite par la deuxieme différentielle de $\Omega^{O}_{bi}(S_{r;s}f)$, elle s'identifie a la différentielle d_F sur $\underline{\Omega}^{O;r}(B;F^s)$. On a donc l'isomorphisme:

$$H(\underline{\Omega}^{O;r}(B;F^s); Id \otimes d) \cong \underline{\Omega}^{O;r}(B;H^s(F))$$

d'ou:

$$E_1^{r;s} \cong \underline{\Omega}^{O;r}(B;H^s(F))$$

et par suite:

$$E_2^{r;s} \cong H^r(B;H^s(F)).$$ □

4.4 Modele d'une fibration

On suppose maintenant que l'operade $O = E_\infty$ est un modele cofibrant de l'operade Com. L'existence de la suite spectrale de Leray-Serre associee aux formes différentielles generalisees pour les E_∞-algebres nous permet de decrire un modele algebrique des fibrations. Au prealable nous avons besoin de resultats concernant le coproduit des E_∞-algebres.

Le produit tensoriel des operades Soient P et Q deux operades. On definit l'operade $P \otimes Q$ en posant $(P \otimes Q)(n) = P(n) \otimes Q(n)$. On remarque que si A est une P-algebre et si B est une Q-algebre alors $A \otimes B$ est une $P \otimes Q$-algebre.

Le coproduit des E_1-algebres

Proposition 4.5 *Il existe un morphisme d'operades* $: E_1 \longrightarrow E_1 \otimes E_1$.

Preuve Considerons le morphisme canonique $^c : Com \longrightarrow Com \otimes Com$. Il existe une application telle que le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, dotted] \arrow[d] & E_1 \otimes E_1 \arrow[d] \\
Com \arrow[r, "c"] & Com \otimes Com.
\end{tikzcd}$$

L'existence de est une consequence de la propriete de relevement a gauche par rapport a la fibration triviale $E_1 \otimes E_1 \longrightarrow Com \otimes Com$. □

Corollaire 4.2 *Soient A et B deux E_1-algebres alors $A \otimes B$ possede une structure naturelle de E_1-algebre.*

Preuve L'objet $A \otimes B$ est une $E_1 \otimes E_1$-algebre. En consequence, si on a un morphisme $: E_1 \longrightarrow E_1 \otimes E_1$, alors on peut utiliser la restriction de structure. □

On a des morphismes canoniques de E_1-algebres $A \longrightarrow A \otimes B$, $B \longrightarrow A \otimes B$. De la propriete universelle du coproduit, on obtient un morphisme:

$$p : A \amalg B \longrightarrow A \otimes B.$$

On a le resultat suivant:

Proposition 4.6 *Soient A et B deux E_1-algebres cofibrantes, alors le morphisme ci-dessus:*

$$p : A \amalg B \longrightarrow A \otimes B$$

est une fibration triviale.

Preuve Pour commencer, on considere le morphisme de R-modules differentiels gradues:

$$s : A \otimes B \longrightarrow A \amalg B$$

tel que $s(a \otimes b) = 1_2 \; a \ast b$. V. Hinich a demontre [20] que s est un quasi-isomorphisme. On verifie aisement que: $p(s(a \otimes b)) = a \otimes b$. La propriete s'ensuit. □

La proposition suivante est une consequence directe de la proposition 4.5:

Proposition 4.7 *Le foncteur $\Omega_{bi}^{E_\infty}$ est un foncteur de la categorie des ensembles bisimpliciaux dans la categorie des E_∞-algebres.*

On a egalement:

Proposition 4.8 *Soient A une E_∞-algebre quasi-libre 1-connexe et $A \longrightarrow A \amalg E_\infty(V)$ un morphisme quasi-libre. Alors on a une suite spectrale de second terme:*

$$E_2^{p,q} = H^p(A \otimes H^q(E_\infty(V)))$$

si $H(A)$ ou $H(E_\infty(V))$ sont finis (finis en chaque dimension) celle-ci converge vers $H^{p+q}(A \amalg E_\infty(V))$ des que A et $E_\infty(V)$ sont connexes.

Preuve On filtre l'algebre A par le degre differentiel. De cette filtration on deduit une filtration de $A \amalg E_\infty(V)$. En effet, la filtration sur A donne une filtration sur $A \otimes B$, et par suite via le morphisme p une filtration sur $A \amalg E_\infty(V)$, ce qui permet de construire une suite spectrale.

Afin de determiner le second terme de cette suite spectrale, on se ramene au cas d'un coproduit $A \amalg E_\infty(V)$. En effet, d'apres l'hypothese de 1-connexite de A, les suites spectrales associees a $A \amalg E_\infty(V)$ et $A \amalg E_\infty(V)$ ont même second terme.

On remarque que pour un coproduit cette suite spectrale degenere au terme E_2. D'apres le quasi-isomorphisme $A \amalg E_\infty(V) \longrightarrow A \otimes E_\infty(V)$, on en deduit que:

$$E_2^{p,q} = H^p(A \otimes H^q(E_\infty(V))).$$

Les algebres A et $E_\infty(V)$ etant supposees connexes, on obtient une suite spectrale du premier quadrant. Cette suite spectrale converge vers $H^{p+q}(A \amalg E_\infty(V)).$ □

Le modele de la fibre Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration de fibre F, avec Y suppose 1-connexe, on suppose que la cohomologie de Y ou de F est finie. On se donne M_Y un modele cofibrant de $\Omega^{E_\infty}(Y)$. On fixe un modele quasi-libre de

$$M_Y \xrightarrow{\eta_Y} \Omega^{E_\infty}(Y) \xrightarrow{p} \Omega^{E_\infty}(X).$$

Soit

$$p' : M_Y \longrightarrow M_Y \amalg M_F.$$

On va montrer que la E_∞-algebre M_F est un modele cofibrant de F.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{E_\infty}(Y) \arrow[r, "p"] & \Omega^{E_\infty}(X) \arrow[r, "i"] & \Omega^{E_\infty}(F) \\
M_Y \arrow[u, "\eta_Y"] \arrow[r, "p'"] & M_Y \amalg M_F \arrow[u, "\eta_X"] \arrow[r, "i'"] & M_F \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}$$

Comme M_F est la cofibre de p' il existe un morphisme $\theta : M_F \longrightarrow \Omega^{E_\infty}(F)$ completant le diagramme.

Theoreme 4.2 *Le morphisme $\theta : M_F \longrightarrow \Omega^{E_\infty}(F)$ est une fibration triviale.*

Preuve On a par definition $\theta i' = i\,\eta_X : M_Y \amalg M_F \longrightarrow \Omega^{E_\infty}(F)$. Or les morphismes η_X, i et i' sont des fibrations, on en deduit que θ est aussi une fibration.

Appliquons le foncteur Ω^{E_∞} au diagramme d'ensembles bisimpliciaux:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "p"'] & & S_{\bullet,\bullet}f \\
& Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On obtient:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{E_\infty}(X) \arrow[rr, "a"] & & \Omega^{E_\infty}_{bi}(S_{\bullet,\bullet}f) \\
& \Omega^{E_\infty}(Y) \arrow[ul, "p"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ou le morphime a est une fibration acyclique dans la categorie des R-modules differentiels. Considerons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{E_\infty}(X) \arrow[rr, "i"] & & \Omega^{E_\infty}(F) \\
& \Omega_{bi}^{E_\infty}(S_{\cdot,\cdot}f) \arrow[ul, "a"] \arrow[ur] & \\
M_Y \otimes M_F \arrow[uu, "\varphi_X"] \arrow[ur, dotted, "\varphi"] \arrow[rr, "i'"] & & M_F \arrow[uu, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

L'existence de φ (morphisme dans $\mathrm{R}M_{\mathbf{dg}}$) est assuree par le fait que a est une fibration triviale.

Ce morphisme induit un morphisme de suites spectrales. En particulier, on a:

$$\varphi_2^{p;q} : H^p(M_Y \otimes H^q(M_F)) \longrightarrow H^p(B;H^q(F;R))$$

et

$$\varphi_2^{p;0} = H(\varphi_Y) : H^p(M_Y) \longrightarrow H^p(B;R)$$
$$\varphi_2^{0;q} = H(\varphi) : H^q(M_F) \longrightarrow H^q(F;R)$$

On sait que φ_X est un quasi-isomorphisme et que $\varphi_2^{p;0} = H(\varphi_Y)$ est un isomorphisme. On en deduit que $\varphi_2^{0;q} = H(\varphi)$ est aussi un isomorphisme par un theoreme de comparaison de suites spectrales ([29], section 3.1.1). □

4.5 Transgression dans la suite spectrale de Leray-Serre

On fixe $R = k$ un corps. Rappelons la definition classique de la transgression [10].

Definition 4.2 Soit $F \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} X$ une fibration on considere le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
H^n(Y;k) \arrow[r, "i^*"] & H^n(F;k) \arrow[r, "\delta"] & H^{n+1}(Y;F;k) \arrow[r] & H^{n+1}(F;k) \\
& H^n(*;k) \arrow[u] \arrow[r, "\delta"] & H^{n+1}(X;*;k) \arrow[u, "p'^*"'] \arrow[r] & H^{n+1}(X;k) \arrow[u, "p^*"']
\end{tikzcd}$$

On dit que $[x] \in H^{n+1}(X;*;k)$ transgresse $[y] \in H^n(F;k)$ si $p'^*([x]) = \delta([y])$.

On suppose que $_1(X)$ opere trivialement sur $H^n(F;k)$. On rappelle que, pour la suite spectrale de Leray-Serre associee a cette bration, on a $E^{0;n}_{n+1} \quad E^{0;n}_2 = H^n(F;k)$. Il est equivalent de dire que $[x]$ est une transgression de $[y]$ 2 $E^{0;n}_{n+1}$, si $[x]$ se projette sur $d_{n+1}[y]$ via l'application:

$$H^{n+1}(X;k) = E^{n+1;0}_2 \longrightarrow E^{n+1;0}_{n+1}.$$

Proposition 4.9 *Soit* $[x]$ *une transgression de* $[y]$*; pour tout representant* y 2 $Z^n\Omega^{E_1}(F)$ *de* $[y]$ *et tout representant* x 2 $Z^{n+1}\Omega^{E_1}(X; \ )$ *de* $[x]$, *il existe* u 2 $\Omega^{E_1}(Y)$ *tel que* $i\ (u) = y$ *et* $du = q\ (\ _0(x))$.

Preuve On considere le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^{E_1}(Y;F) \arrow[r] & \Omega^{E_1}(Y) \arrow[r, "i"] & \Omega^{E_1}(F) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^{E_1}(X; \ ) \arrow[r, "0"] \arrow[u, "q^0"] & \Omega^{E_1}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[u, "q"] & \Omega^{E_1}(\ ) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Soit y 2 $Z^n\Omega^{E_1}(F)$. Comme le morphisme i est surjectif, il existe u_1 2 $\Omega^{E^n_1}(Y)$ tel que $i\ (u_1) = y$. Par hypothese, puisque $[x]$ est une transgression de $[y]$, on a $q^0\ ([x]) = \ ([y])$. Il existe $\ 2\ Z^{n+1}E_1(Y;F)$, $_1$ 2 $Z^n\Omega^{E_1}(Y;F)$ tels que $q^0\ (x) = \ + d\ _1$ et $(\ ) = d(u_1)$. On en deduit $(q^0\ (x)) = \ (\ ) + \ (d\ _1)$. C'est-a-dire $q\ (\ _0(x)) = d(u_1 + \ (\ _1))$. Comme on a aussi $i\ (u_1 + \ (\ _1)) = y$, on en conclut que $u = u_1 + \ (\ _1)$ convient. □

La transgression algebrique On travaille desormais sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ la clôture algebrique de $\mathbb{F}_p$. On suppose que $A \longrightarrow A\ q\ \ O(V)$ est une extension libre, on note $i: A \longrightarrow A\ q\ \ O(V)$ et $p: A\ q\ \ O(V) \longrightarrow O(V)$ les morphismes canoniques. On suppose aussi que A est 1-connexe et que $O(V)$ est connexe. On s'interesse a la transgression dans la suite spectrale de nie dans la proposition 4.8.

De nition 4.3 Un element de $[a]$ 2 $^{n+1}(A)$ transgresse $[v]$ 2 $E^{0;n}_{n+1} \quad E^{0;n}_2 = \ ^n(O(V))$, si $[a]$ se projette sur $d_{n+1}(v)$ 2 $E^{n+1;0}_{n+1}$.

Theoreme 4.3 (Theoreme de Kudo algebrique) *Si un element* $[a]2\ ^{n+1}(A)$ *est une transgression de* $[v]$ 2 $^n(O(V))$, *alors* $P^s([a])$ *transgresse* $P^s([v])$ *et* $P^s([a])$ *transgresse* $-\ P^s([v])$.

Preuve La preuve reprend les arguments developpes par J.P. May dans [35] (theoremes 3.3 et 3.4). On applique le theoreme 3.3 de [35] a i et p. C'est-a-dire que l'on construit un morphisme de "suspension" $\colon Ker(\ (i)) \longrightarrow Coker(\ (p))$ en posant $([a]) = [p(u)]$ tel que $[a] \in Ker(\ (i))$ et $d(u) = i(a)$. Et on montre que ce morphisme de suspension commute aux operations de Steenrod. On a les formules: $P^s([a]) = P^s(\ [a])$ et $P^s([a]) = -\ P^s(\ [a])$. La deuxieme partie de la preuve est aussi une adaptation ad hoc de la preuve du theoreme 3.4: si $[v] \in\ ^n(O(V))$ est transgressif alors il est represente par un element $p(u)$ tel que $d(u) = i(a)$. Le resultat est une consequence des formules de commutation des operations de Steenrod a la suspension. □

Remarque le theoreme de Kudo classique est alors un corollaire du resultat precedent applique au modele de la suite spectrale de Leray-Serre.

References

[1] H.J. Baues, M. Jibladze, A. Tonks: *Cohomology of monoids in monoidal categories*, Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT; Luminy, 1995), 137{165, Contemp. Math., 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[2] C. Berger, B. Fresse: *Combinatorial operad actions on cochains*, preprint (2001).

[3] J.M. Boardman, R.M. Vogt: *Homotopy invariant structures on topological spaces*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag.

[4] A.K. Bous eld, V.K.A.M. Gugheneim: *On P.L. de Rham theory and rational homotopy type*, Memoirs A.M.S, t.8, 179 (1976).

[5] H. Cartan: *Theories cohomologiques*, Inventiones Mathematicae 3, 172{178 (1967).

[6] A. Dold: *Ueber die Steenrodschen Kohomologieoperationen*, Ann. of Math (2) 73, 258{294 (1961).

[7] N. Dupont, K. Hess: *Noncommutative algebraic models for ber squares*, Math. Ann. 314, no. 3, 449{467 (1999).

[8] A. Dress: *Zur Spectralsequenz von Faserungen*, Inventiones Mathematicae 35, 261{271 (1976).

[9] W.G. Dwyer, J. Spalinski: *Homotopy theory and model categories*, Handbook of algebraic topology 73{126 (North-Holland) (1995).

[10] S. Eilenberg, S. Maclane: *Relations between homology and homotopy groups*, Ann. of Math. 46, 480{509 (1945).

[11] S. Eilenberg, S. Maclane: *Acyclic models*, Amer. J. of Math. 79, 189{199 (1953).

[12] Y. Felix, S. Halperin, J.C. Thomas: *Di erential graded algebras in topology,* Handbook of algebraic topology 829{865 (North Holland) (1995).

[13] Y. Felix, S. Halperin, J.C. Thomas: *Rational Homotopy Theory,* Graduate Texts in Mathematics 205, Springer Verlag (2000).

[14] B. Fresse: *Cogroups in algebras over an operad are free algebras,* Comment. Math. Helv. 73, 637{676 (1998).

[15] E. Getzler, J.D.S Jones: *Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces,* preprint (1994).

[16] V. Ginzburg, M. Kapranov: *Koszul duality for operads,* Duke J.Math.(1)76, 203{272 (1994).

[17] P.P. Grivel, *Formes di erentielles et suites spectrales,* Ann. de Inst. Fourier (Grenoble) 29, 17{37 (1979).

[18] S. Halperin: *Lectures on minimal models,* Memoire de la S.M.F. 9/10 (1983).

[19] V. Hinich: *Homological algebra of homotopy algebras,* Comm. Algebra 25 no. 10, 3291{3323 (1997).

[20] V. Hinich: *Virtual operad algebras and realization of homotopy types,* J. Pure Appl. Algebra 159, no. 2{3, 173{185, (2001).

[21] V. Hinich, V. Schechtmann: *Homotopy limits of homotopy algebras,* in \K-theory: algebra, geometry, arithmetic", Lecture Notes in Math. 1289, 240{264.

[22] P.S. Hirschorn: *Localization of models categories,* Preprint (1998).

[23] M. Hovey; *Model categories,* Mathematical Surveys and Monographs, 63. American Mathematical Society, 1999.

[24] M. Karoubi: *Formes di erentielles non commutatives et cohomologie a coe -cients arbitraires,* Transactions of the A.M.S 347, 4277{4299 (1995).

[25] M. Karoubi: *Formes di erentielles non commutatives et operations de Steenrod,* Topology 34, 699{715 (1995).

[26] I. Kriz, J.P. May: *Operads, algebras, modules and motives,* Asterisque, 233 (1995).

[27] D. Lehmann: *Theorie homotopique des formes di erentielles,* Asterisque, 45 (1977).

[28] J.L. Loday: *La renaissance des operades,* Seminaire Bourbaki 1994{1995, Asterisque, 236 47{74 (1996).

[29] J. McCleary: *A user's guide to spectral sequences,* Mathematics Lecture series 12, Publish or Perish (1985).

[30] M. Majewski: *Rational homotopical models and uniquess,* Memoir of the American Mathematical Society, 143 (2000).

[31] M. Mandell: *E_1 -algebras and p-adic homotopy theory,* Topology (1) 40, 43{94 (2001).

[32] M. Mandell: *Cochains and homotopy type,* preprint (2001).

[33] M. Markl: *Models for operads,* Comm.Algebra.(24)4, 1471{1500 (1996).

[34] J.P. May: *The geometry of iterated loop spaces,* Lecture Notes in Math., Springer-Verlag 271 (1972).

[35] J.P. May: *A general algebraic approach to Steenrod operations*, Lecture Notes in Math. 168 153{231.

[36] D. Quillen: *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Math. 43.

[37] N. Spaltenstein: *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Mathematica 65 (1988) 121{154.

[38] E.H. Spanier: *Algebraic Topology*, McGraw-Hill series in higher mathematics (1966).

[39] D. Stanley: *Determining closed model category structure,* Preprint (1998).

[40] J. Smith: Iterating the cobar construction, Mem. Amer. Math. Soc. 109, 524 (1994).

[41] V.A. Smirnov: *Homotopy theory of coalgebras,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 49, $n^0$6, 1302{1321 (1985).

[42] V.A. Smirnov: *Lie algebras over operads and their application to homotopy theory,* Izv. Math. 62, $n^0$3, 549{580 (1998).

[43] D. Sullivan: *In nitesimal computations in topology,* Publ. I.H.E.S. 47 (1977), 269{331.

[44] R. Swan: *Thom's theory of di erential forms on simplicial sets,* Topology 14, 271{273 (1975).

Centre di Recerca Matematica, Institut d'Estudis Catalans
Apartat 50 E - 08193 Bellaterra, Spain

Email: dchataur@crm.es

Received: 17 October 2001