ISSN 1472-2739 (on-line) 1472-2747 (printed)

Algebraic & Geometric Topology
Volume 4 (2004) 151–175
Published: 24 March 2004

Sur la realisation des modules instables

DongHua Jiang

Abstract In this article, we give some conditions on the structure of an unstable module, which are satisfied whenever this module is the reduced cohomology of a space or a spectrum. First, we study the structure of the sub-modules of $\Sigma^s\tilde{H}^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\times d};\mathbb{Z}/2)$, i.e., the unstable modules whose nilpotent filtration has length 1. Next, we generalise this result to unstable modules whose nilpotent filtration has a finite length, and which verify an additional condition. The result says that under certain hypotheses, the reduced cohomology of a space or a spectrum does not have arbitrary large gaps in its structure. This result is obtained by applying Adams' theorem on the Hopf invariant and the classification of the injective unstable modules.

This work was carried out under the direction of L. Schwartz.

Resume Dans cet article, on donne des restrictions sur la structure d'un module instable, qui doivent être verifiees pour que celui-ci soit la cohomologie reduite d'un espace ou d'un spectre. On commence par une etude sur la structure des sous-modules de $\Sigma^s\tilde{H}^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\times d};\mathbb{Z}/2)$, i.e., les modules instables dont la filtration nilpotente est de longueur 1. Ensuite, on generalise le resultat aux modules instables dont la filtration nilpotente est de longueur finie, et qui verifient une condition supplementaire. Le resultat dit que sous certaines hypotheses, la cohomologie reduite d'un espace ou d'un spectre ne contient pas de lacunes de longueur arbitrairement grande. Ce resultat est obtenu par application du celebre theoreme d'Adams sur l'invariant de Hopf et de la classification des modules instables injectifs.

Ce travail est effectue sous la direction de L. Schwartz.

AMS Classification 55N99; 55S10

Keywords Operations de Steenrod; module instable; theoreme d'Adams; la classification des modules instables injectifs

1 Introduction

En topologie algebrique, pour distinguer les espaces, on introduit des invariants, tels que l'homologie, la cohomologie et les groupes d'homotopie des espaces.

Nous nous interessons dans cet article a la cohomologie reduite des espaces en tant que module instable sur l'algebre de Steenrod. Nous considerons d'abord le cas $p = 2$, les generalisations pour les nombres p premiers impairs seront donnees dans la derniere section.

Un probleme central sur les modules instables est de savoir quand un tel module est la cohomologie reduite d'un espace. Un resultat celebre de J.F. Adams impose des restrictions fortes a un module instable pour qu'il soit la cohomologie reduite d'un espace. Voici le resultat d'Adams dont il est question:

Theoreme 1 (Adams [1]) *Soit X un espace ou un spectre, $k \geq 4$, soit $x \in H^n(X;\mathbb{Z}/2)$ tel que $Sq^{2^i}x = 0$, $\forall\ i < k$, alors $Sq^{2^k}x \in \sum_{i<k}\mathrm{Im}(Sq^{2^i})$.*

Définition 1 Un module sur l'algebre de Steenrod M est un *module instable* si pour tout element $x \in M$, $Sq^i x = 0$ quand $i > |x|$. Ici, $|x|$ designe le degre de x.

Comme Sq^0 est l'identite, ceci implique que les modules instables sont triviaux en degre strictement inferieur a zero.

Définition 2 Par *lacune* de longueur d dans un module instable M, on entend une suite d'entiers $I = \{i, \cdots, i + d - 1\}$ telle que $M^j = \{0\}$, si $j \in I$, $M^{i-1} \neq \{0\}$, $M^{i+d} \neq \{0\}$. On note cette lacune par $(i - 1, i + d)$ ou $(i - 1, i + d - 1]$.

Issue du theoreme d'Adams, une question interessante est de savoir si dans la cohomologie mod 2 d'un espace, il peut exister ou non des lacunes de longueur arbitrairement grande. Dans cet article, on demontre que c'est impossible sous certaines hypotheses supplementaires sur la structure du module instable.

Nous devons rappeler, pour enoncer ces conditions, diverses définitions. Rappelons qu'un module M est connexe si $M^{\leq 0} = \{0\}$, un module instable est donc connexe si $M^0 = \{0\}$.

Définition 3 La *suspension* d'un module instable M est le module ΣM tel que $(\Sigma M)^n = M^{n-1}$, $\forall\ n$.

Définition 4 Un module instable M est *reduit* si le morphisme $Sq_0 : M \to M$ défini par $Sq_0(x) = Sq^{|x|}(x)$, $\forall\ x \in M$, est injectif.

On va se restreindre dans la suite a etudier des modules instables dont l'enveloppe injective est somme directe finie d'objets injectifs indecomposables. D'apres la classification des $\mathcal{U}-$injectifs (Lannes-Schwartz, [5]), on sait que pour un tel module instable reduit M, il existe des entiers d et a_d tels que M se plonge dans $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^d;\mathbb{Z}/2)^{\oplus a_d}$. Si M est connexe, on peut supposer $a_d = 1$. Donc pour etablir une propriete pour les modules instables reduits, il suffit de le faire pour les sous-modules instables de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^d;\mathbb{Z}/2)^{\oplus a_d}$. Dans la suite on supposera $a_d = 1$, les demonstrations s'etendent sans probleme.

Definition 5 (Schwartz [9]) Un module instable M est $s-$*nilpotent* s'il est l'union de ses sous-modules ayant une filtration finie dont les quotients sont des $s-$eme suspensions.

Soit $\mathcal{U}$ la categorie des modules instables. On designe $\mathcal{N}il_s$ la sous-categorie abelienne pleine de $\mathcal{U}$ des modules $s-$nilpotents. La sous-categorie $\mathcal{N}il_s$ est epaisse (voir [2], [10]). On a une filtration de $\mathcal{U}$:

$$\cdots \subset \mathcal{N}il_2 \subset \mathcal{N}il_1 = \mathcal{N}il \subset \mathcal{N}il_0 = \mathcal{U}.$$

Soit $nil_s : \mathcal{U} \to \mathcal{N}il_s$ l'adjoint a droite de l'inclusion $\mathcal{N}il_s \hookrightarrow \mathcal{U}$, $nil_s M$ est le plus grand sous-module d'un module instable M dans $\mathcal{N}il_s$ et on a la filtration nilpotente de M:

$$\cdots \subset nil_2 M \subset nil_1 M \subset nil_0 M = M.$$

Proposition 1 ([4], [8]) *Soit M un module instable. Alors le quotient $nil_s M/nil_{s+1}M$ est la $s-$eme suspension d'un module instable reduit R_s, donc*

$$nil_s M/nil_{s+1}M \cong \Sigma^s R_s.$$

Definition 6 La filtration nilpotente d'un module instable M est *de longueur finie* s'il existe un $n \geq 0$ tel que $nil_n M = 0$.

Definition 7 Soit M un module instable connexe reduit non-trivial. On designe par $n_1 < n_2 < \cdots$ les degres n tels que $M^n \neq \{0\}$. Supposons que M se plonge dans $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^d;\mathbb{Z}/2)$. Le module instable M sera dit *de type* $\mathcal{T}$, s'il contient une lacune $(s, s+l]$ avec $s \geq n_1$ et

$$l \geq \max\{2^{d+4}, n_{j+1} - n_j \mid j = 1, \ldots, 1 + (d-1)2^{d-2}\}.$$

Remarque Le module M est necessairement infini car M est reduit non-trivial.

Le resultat principal de cet article est le theoreme suivant:

Theoreme 2 *Soit M un A_2-module qui est une suspension iteree d'un sous-module de type T de $\tilde{H}^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\times d};\mathbb{Z}/2)$. Alors M n'est pas realisable, i.e., il n'existe aucun espace X tel que $M = \tilde{H}^*(X;\mathbb{Z}/2)$.*

En fait le theoreme d'Adams s'applique aussi aux spectres. Il en est donc de même du theoreme precedent, la suspension iteree peut être positive ou negative et le module n'est ni la cohomologie reduite d'un espace ni la cohomologie d'un spectre.

Une generalisation de ce theoreme est faite sous certaines hypotheses pour les modules instables connexes ayant une filtration nilpotente de longueur finie.

Definition 8 Soit M un module instable infini connexe dont la filtration nilpotente est de longueur finie. Les quotients $nil_s M/nil_{s+1} M$ non-triviaux s'ecrivent sous la forme $\Sigma^{m_i} R_{m_i}$, R_{m_i} reduits, $i = 1, \cdots, t$, $m_1 < \cdots < m_t$. Notons que l'un au moins des R_{m_i} est infini. Supposons qu'il existe des entiers d et ℓ_d tels que tous les R_{m_i} se plongent dans $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\times d};\mathbb{Z}/2)^{\oplus \ell_d}$. Notons $I \subset \{1, \cdots, t\}$ le sous-ensemble des i tels que R_{m_i} soit infini, et soit $n_{1,i} < n_{2,i} < \cdots$ les degres en lesquels ce module est non-trivial.

Soit ν tel que $2^\nu \geq t > 2^{\nu-1}$. Le module instable M sera dit *de type T* s'il contient une lacune $(s, s+l]$ avec $s \geq \min\{m_i + n_{1,i} \mid i \in I\}$ et

$$l \geq \max\{(m_t+1)2^{d+4}, n_{j+1,i} - n_{j,i} \mid i \in I, j = 1, \cdots, 1 + (d+\nu-1)2^{d-2}\}.$$

Condition 1 Soit M un module instable connexe dont la filtration nilpotente est de longueur finie. En utilisant les notations introduites dans la definition precedente, on dira que M verifie la condition 1 si

$$\begin{aligned} m_{i+1} - m_i &\neq 1, 2, 4, 8, \quad 1 \leq i \leq t-1, \\ m_{i+2} - m_i &\neq 8, \qquad\quad 1 \leq i \leq t-2, \end{aligned}$$

c'est-a-dire, $m_j - m_i = 2^\alpha$ n'a pas de solution pour $1 \leq i, j \leq t$ et $0 \leq \alpha \leq 3$.

Theoreme 3 *Soit M un module qui est une suspension iteree (positive ou negative) d'un module instable connexe dont la filtration nilpotente est de longueur finie, qui est de type T et verifie la condition 1. Alors M n'est pas realisable, i.e., il n'existe aucun espace ou spectre X tel que $M = \tilde{H}^*(X;\mathbb{Z}/2)$.*

Corollaire 1 *La longueur des lacunes ne peut pas être arbitrairement grande dans un module instable connexe realisable dont la filtration nilpotente est de longueur finie et qui verifie la condition 1.* □

Dans cet article, on ne considere que les modules dont l'enveloppe injective est somme directe finie de modules injectifs indecomposables. Les resultats obtenus sont consequences du theoreme d'Adams et de la classification de Lannes-Schwartz.

Voici quelques details sur le plan de cet article. Dans la section 2, on definit des operations Q_t^s, $s,t \geq 0$, qui generalisent les operations de Milnor. La section 3 contient un resultat combinatoire. En utilisant ce resultat, le theoreme 2 est demontre dans la section 4. Ensuite, le theoreme 3 est demontre dans la section 5. La derniere section contient des generalisations pour le cas p premier impair. Il y a un appendice a la fin sur les operations Q_t^s.

L'auteur tient a remercier le rapporteur pour ses remarques et ses conseils, qui l'ont aide a eviter bien des imprecisions dans les definitions et demonstrations.

2 Les operations Q_t^s, $s,t \geq 0$

Dans cette section, on definit les operations Q_t^s, $s,t \geq 0$ et on donne brievement leurs proprietes utilisees dans les sections suivantes. Pour plus de details sur ces operations, on renvoie le lecteur a l'appendice.

Definition 9 Les operations Q_t^s, $s,t \geq 0$ sont definies recursivement comme suit:

(1) $Q_0^s = Sq^{2^s}$;

(2) $Q_{t+1}^s = [Sq^{2^{s+t+1}}, Q_t^s]$.

Notation 1 On note souvent Q_t^0 par Q_t, qui est la notation usuelle de l'operation de Milnor concernee [7].

Pour etablir les proprietes de ces operations Q_t^s, on a besoin d'introduire quelques notations.

Notation 2 Le symbole $(n_1,\ldots,n_d)$ designera le monôme $u^{n_1}\otimes\cdots\otimes u^{n_d}$ ou $x_1^{n_1}\cdots x_d^{n_d}$ dans $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\times d};\mathbb{Z}/2)$ qui s'identifie a $\mathbb{F}_2[u]^{\otimes d}$ ou $\mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_d]$, u et les x_i etant de degre 1. Un tel monôme sera dit *basique*.

Notation 3 Comme plus haut, Sq_0 designe l'operation definie dans un module instable par $Sq_0x = Sq^{|x|}x$. On a donc $Sq_0^s(n_1,\ldots,n_d) = (2^s n_1,\ldots,2^s n_d)$, et $\mathrm{Im}(Sq_0^s)$ est l'ensemble des elements $x = \sum_{i\in I}(2^s n(i)_1,\ldots,2^s n(i)_d)$ de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\times d};\mathbb{Z}/2)$. Ici, I est un ensemble d'indices i qui indexent des differents $d-$uplets $(n(i)_1,\ldots,n(i)_d)$, $n(i)$ peut être nul.

Lemme 1 *Soit M un module instable, on a pour tout $n \geq 1$,*

$$Sq^{2n}Sq_0x = Sq_0Sq^nx; \quad \forall x \in M. \qquad \square$$

De la definition de Q_t^s et de Sq_0, on deduit que:

Lemme 2 *Soit M un module instable, on a $\forall x \in M$,*

$$Q_t^{s+r}Sq_0^sx = Sq_0^sQ_t^rx; \quad \forall r, s, t.$$

En particulier,

$$Q_t^sSq_0^sx = Sq_0^sQ_tx; \quad \forall s, t.$$

Corollaire 2 *Soient M, N deux modules instables, et soient $l, r, s, t \geq 0$.*

(1) $\forall x \in M$, $Q_r^sQ_t^sSq_0^sx = Q_t^sQ_r^sSq_0^sx$ *et* $(Q_t^s)^2Sq_0^sx = 0$.

(2) $\forall x \in Sq_0^s(M)$ *et* $y \in Sq_0^s(N)$, $Q_t^s(x \otimes y) = Q_t^sx \otimes y + x \otimes Q_t^sy$.

(3) *Soit u le generateur de $H^*(B(\mathbb{Z}/2); \mathbb{Z}/2)$ en degre 1,*
$Q_t^sSq_0^su^{2l} = 0$ *et* $Q_t^sSq_0^su^{2l+1} = Sq_0^su^{2l+2^{t+1}} = u^{2^s(2l+2^{t+1})}$.

Le lemme 1 est une consequence directe de la definition de Sq_0, sa demonstration est laissee au lecteur. Pour le lemme 2 et le corollaire 2, leurs demonstrations se trouvent dans l'appendice.

3 Un resultat combinatoire

Dans cette section, on etablit d'abord un resultat combinatoire. Ensuite, on l'applique a un element quelconque de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\times d}; \mathbb{Z}/2)$ pour obtenir des contraintes imposees par certaines conditions d'annulation induites par l'existence de lacunes.

Soit un element $x \in H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\times d}; \mathbb{Z}/2)$, $x = \sum_{i \in I}(n(i)_1, \ldots, n(i)_d)$ est somme de monômes basiques deux a deux distincts $(n(i)_1, \ldots, n(i)_d)$, $i \in I$.

Pour commencer, on definit quelques notations combinatoires.

Definition 10 Soit $g \geq 0$, on dira qu'il y a un $g-$*echange* entre deux monômes basiques ω et ν s'il existe i et j tels que ces deux monômes constituent, a un ordre (entre i et j) pres, une paire de la forme

$$\omega = (u_1, \ldots, u_{i-1}, 2u_i + 1, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, 2u_j + 2^{g+1}, u_{j+1}, \ldots, u_d)$$

et $$\nu = (u_1, \ldots, u_{i-1}, 2u_i + 2^{g+1}, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, 2u_j + 1, u_{j+1}, \ldots, u_d).$$

On dira plus precisement, s'il y a lieu, qu'il y a un $g-$*echange en* $i-$*eme position* pour le monôme ω avec le monôme ν.

Remarque C'est l'annulation sous l'action de l'operation de Milnor Q_g sur un element x qui suggere cette definition, puisque Q_g est une derivation.

Definition 11 On dira qu'il y a une $(l,s)-$*chaîne*, $l \leq s$, entre deux monômes basiques α et β d'un sous-ensemble de l'ensemble des monômes basiques d'un element $x \in H^*(B(\mathbb{Z}/2)^d;\mathbb{Z}/2)$ s'il existe des monômes basiques:

$$\alpha = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_t = \beta$$

dans ce sous-ensemble tels qu'il y ait un $m-$echange, $l \leq m \leq s$, entre γ_i et γ_{i+1} pour tout $i = 0, \ldots, t-1$.

Definition 12 Soit $x \in H^*(B(\mathbb{Z}/2)^d;\mathbb{Z}/2)$. On dira qu'un sous-ensemble S de l'ensemble des monômes basiques de x admet $T \subset \{1, \ldots, d\}$ pour *support*, si pour tout monôme basique $x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ appartenant a S et pour tout $i \in T$, l'exposant α_i ne depend que de S et pas du mônome basique choisi et est de plus pair. On suppose de plus T maximal parmi les sous-ensembles de $\{1, \ldots, d\}$ ayant cette propriete.

On note $\tau = \#T$ que l'on appellera la *taille* de T, les monômes basiques de S ont donc τ exposants en commun et s'ecrivent tous sous la forme y^2z ou y depend de τ variables x_i et ne depend pas du monôme basique choisi; z depend lui de $d-\tau$ variables et du monôme basique choisi.

Definition 13 Un sous-ensemble de l'ensemble des monômes basiques d'un element $x \in H^*(B(\mathbb{Z}/2)^d;\mathbb{Z}/2)$ est appele une $(l,s)-$*classe*, $l \leq s$, de support $T \subset \{1, \ldots, d\}$, si la condition suivante a lieu: pour tout monôme basique α dans ce sous-ensemble, il existe au moins une position i dont l'exposant est impair; pour toutes ces positions i et tous les m, $l \leq m \leq s$, il existe un monôme β dans le sous-ensemble et un $m-$echange en $i-$eme position pour β avec α.

Remarque C'est l'annulation sous l'action des operations Q_m, $l \leq m \leq s$, sur un element x qui suggere cette definition, puisque les operations Q_m sont des derivations.

Voici la propriete fondamentale des $(l,s)-$classes de support T:

Proposition 2 *Pour toute $(l,s)-$classe de support T d'un element $x \in H^*(B(\mathbb{Z}/2)^d;\mathbb{Z}/2)$, on a $s - l + \#T \leq d - 2$.*

Demonstration Considerons une $(l;s)-$classe admettant $T = T_s$ pour support, soit $_s$ sa taille. Pour 1 t $s - l$, on va construire recursivement des $(l;s - t)-$classes de support T_{s-t} de taille $_{s-t}$ telles que

$$_{s-t} \quad _{s-t+1} + 1:$$

Pour $t = s - l$, on aura une $(l;l)-$classe de support T_l dont la taille $_l$ sera telle que $_l$ $_{l+1} + 1$ $_s + s - l = \#T + s - l$. Comme cette classe comporte des $l-$echanges, on a $_l$ $d - 2$. D'ou,

$$d - 2 \quad _l \quad \#T + s - l:$$

Supposons avoir construit une $(l;s - t + 1)-$classe de support T_{s-t+1} de taille $_{s-t+1}$. On va construire une sous$-(l;s - t)-$classe, de la $(l;s - t + 1)-$classe initiale, dont le support sera obtenu par adjonction a T_{s-t+1} d'une position ou l'exposant d'un certain monôme prend une valeur paire.

On considere parmi les exposants impairs qui apparaissent dans les monômes basiques de la $(l;s - t + 1)-$classe la valeur maximale, soit $2a + 1$. Notons qu'il apparait necessairement des exposants impairs car il y a des $m-$echanges, l m $s - t + 1$. On suppose que cet exposant appara^t en position p d'un monôme basique de la $(l;s - t + 1)-$classe. Soit alors un monôme dans la $(l;s - t + 1)-$classe tel qu'il existe un $(s - t + 1)-$echange en position p pour avec . Le monôme existe par hypothese.

Si on designe par $_p$, l'exposant en position p d'un monôme basique , on a alors $_p = 2a + 1$ et $_p = 2a + 2^{s-t+2}$.

Lemme 3 *Pour tout monôme basique y d'une $(l;s - t)-$cha^ne contenue dans la $(l;s - t + 1)-$classe et contenant la valeur y_p de l'exposant en position p est $2a + 2^{s-t+2}$.*

Demonstration Raisonnons par l'absurde et choisissons une $(l;s - t)-$cha^ne contenue dans la $(l;s - t + 1)-$classe qui ne satisfasse pas a cette condition et soit de longueur minimale. Soit $= {}_0, \quad , {}_u = y$ cette cha^ne. L'exposant y_p est impair. Il y a un $m-$echange, l m $s - t$, entre $_{u-1}$ et y en position p. Mais $({}_{u-1})_p = 2a + 2^{s-t+2}$, donc $y_p = 2a + 2^{s-t+2} - 2^{m+1} + 1 > 2a + 1$, en contradiction avec la maximalite de $2a + 1$. □

Considerons alors l'ensemble S des monômes basiques de la $(l;s - t + 1)-$classe tels qu'il existe une $(l;s - t)-$cha^ne entre ces monômes et .

Lemme 4 *L'ensemble S est une $(l;s-t)-$classe de support contenant T_{s-t+1} [fpg.*

Demonstration Comme chaque monôme basique de l'ensemble S est par de nition un monôme basique de la $(l;s-t+1)-$classe, il contient donc au moins un exposant impair. Pour montrer que S est une $(l;s-t)-$classe, il faut encore montrer qu'en toute position q ou un des monômes de cet ensemble a un exposant impair, il y a pour tout m, $l \quad m \quad s-t$, un $m-$echange en position q pour chacun de ces monômes avec un autre monôme dans S. Mais un tel monôme existe par hypothese dans la $(l;s-t+1)-$classe et ce monôme est alors par de nition dans S puisqu'il y a une $(l;s-t)-$cha^ne a . Clairement le suport T_{s-t} contient T_{s-t+1} [fpg. □

Il reste a observer pourquoi on peut mener le processus jusqu'a $t = s - l$, car dans cette construction comme il y a des $m-$echanges, $l \quad m \quad s-t$, il y a des exposants impairs.

Fin de la demonstration de la proposition □

Corollaire 3 *Soit x un element de H $(B(\mathbb{Z}=2)\ ^d; \mathbb{Z}=2)$ tel que x 2 $\mathrm{Im}(Sq_0^s) - \mathrm{Im}(Sq_0^{s+1})$ et que $Q_t^s x = 0$, 8 $p \quad t \quad q$. Alors on a $q - p \quad d - 2$.*

Demonstration Puisque $x = Sq_0^s x'$ 2 $\mathrm{Im}(Sq_0^s) - \mathrm{Im}(Sq_0^{s+1})$, il existe au moins un monôme basique de x' avec au moins un exposant impair. L'ensemble des monômes basiques de x' qui sont dans une $(p;q)-$cha^ne contenant est une $(p;q)-$classe dont on note le support par T. Precisons un peu. D'apres la de nition, chaque monôme basique de cet ensemble contient au moins un exposant impair (a cause de l'existence d'un echange avec un autre monôme basique de l'ensemble). On note par I l'ensemble non vide des positions des exposants impairs dans . Comme l'action de l'operation Q_t sur donne un monôme qui contient un exposant pair en la même position, l'annulation de Q_t^s sur x entra^ne l'existence d'un $m-$echange, $p \quad m \quad q$, en $i-$eme position, i 2 I , pour avec un monôme basique de l'ensemble.

Par consequent, la proposition 2 nous donne $q - p \quad q - p + \#T \quad d - 2$. □

Corollaire 4 *Soit x un element de H $(B(\mathbb{Z}=2)\ ^d; \mathbb{Z}=2)$. Si $A_2 x$ contient une lacune $(jxj; jxj + l]$, $l \quad 2^k$ pour un certain $k \quad d-2$, alors x 2 $\mathrm{Im}(Sq_0^{k-d+2})$.*

Demonstration Soit tel que $x = Sq_0 x' 2$ Im(Sq_0) − Im$(Sq_0{}^{+1})$. Si $> k$, on a $k - d + 2$. Si k, alors l'existence de la lacune dans $A_2 x$ implique que $8\ t = 0; \quad ; k -$,

$$Sq_0 Sq^{2^t} x' = Sq^{2^{t+}} Sq_0 x' = Sq^{2^{t+}} x = 0:$$

Donc $Sq^{2^t} x' = 0$, $8\ t = 0; \quad ; k -$. Donc $Q_t x' = 0$, $8\ t = 0; \quad ; k -$. D'apres le corollaire 3, on a $k - \quad d - 2$, d'ou $k - d + 2$. □

Remarques (1) Les enonces de cette section sont aussi vrais pour un element quelconque de $H\ (B(\mathbb{Z}=2)\ ^d; \mathbb{Z}=2)\ \ ^d$. Ci-dessus, on a traite le cas ou $_d = 1$. Pour tenir compte du fait que l'on peut se placer dans $H\ (B(\mathbb{Z}=2)\ ^d; \mathbb{Z}=2)\ \ ^d$, il faudrait compliquer un peu les notations en rajoutant un indice 1 a $_d$. On dit que les $(n(i)_{1;a}; \quad ; n(i)_{d;a})$ sont les monômes basiques de x.

(2) Comme la suspension commute avec les operations de Steenrod ($^q Sq^i = Sq^i\ ^q$), on peut aussi etablir les enonces similaires de ces corollaires pour une suspension quelconque de $H\ (B(\mathbb{Z}=2)\ ^d; \mathbb{Z}=2)\ \ ^d$.

4 Demonstration du theoreme 2

Cette section est consacree a la demonstration du theoreme 2. Soit donc M un module instable qui est la cohomologie reduite d'un espace ou d'un spectre. Supposons de plus que M est reduit. Alors:

Theoreme 4 (Lannes-Schwartz [5]) *Un module instable reduit (resp. reduit et connexe) M dont l'enveloppe injective est somme directe nie d'injectifs indecomposables est isomorphe a un sous-module de $H\ (B(\mathbb{Z}=2)\ ^d; \mathbb{Z}=2)\ \ ^d$ ($_d > 0$) (resp. $H\ (B(\mathbb{Z}=2)\ ^d; \mathbb{Z}=2)$) pour d assez grand.*

Demonstration du Theoreme 2 Dans la suite, on va demontrer l'enonce suivant: Soit M un sous-module de type T de $\tilde{H}\ (B(\mathbb{Z}=2)\ ^d; \mathbb{Z}=2)$. Alors M n'est pas realisable, i.e., il n'existe aucun espace ou spectre X tel que $M = \tilde{H}\ (X; \mathbb{Z}=2)$. On note que, une fois cet enonce est etabli, le theoreme 2 est aussi etabli.

On raisonne par l'absurde. Soit M un sous-module de type T de $\tilde{H}\ (B(\mathbb{Z}=2)\ ^d; \mathbb{Z}=2)$ qui est la cohomologie reduite d'un espace ou d'un spectre. Reprenons les notations introduites avant le theoreme 2: M est non-trivial dans les degres $n_1 < n_2 < \quad$. Supposons que pour $n \quad n_1$, $(n; n+l]$ soit la premiere lacune de longueur l telle que:

$$l \quad \max\{2^{d+4}; n_{j+1} - n_j \mid j = 1; \quad ; 1 + (d-1)2^{d-2}\}.$$

Soit k l'unique entier ($\quad d+4$) tel que $2^{k+1} > l \quad 2^k$.

Soit donc $x \in M^n$, $x \neq 0$. Alors $A_2 x$ contient une lacune $(n; n+l]$ et le corollaire 4 entraîne $2^{k-d+2} | n$.

Lemme 5 *En degre strictement inferieur a n, il n'existe pas de degres m tels que $2^{k-d+2} \nmid m$ et $M^m \neq \{0\}$.*

Demonstration Supposons qu'en degre strictement inferieur a n, il existe des degres m tels que $2^{k-d+2} \nmid m$ et $M^m \neq \{0\}$. Soit m_0 le plus grand de ces degres, et soit $y \in M^{m_0}$, $y \neq 0$. On suppose que $y = Sq_0 z \in \mathrm{Im}(Sq_0) - \mathrm{Im}(Sq_0{}^{+1})$. Comme $2^{k-d+2} \nmid m_0$, on a $\quad k-d+1$.

Si $A_2 y$ contient une lacune $(|y|; n+l]$, le corollaire 4 implique que $\quad k-d+2$, ce qui est impossible. Donc le plus bas degre superieur ou egal a m_0+1, en lequel $A_2 y$ est non-trivial, est inferieur a $n+l$ et est donc de la forme $2^{k-d+2} q =: p$ d'apres l'hypothese de maximalite de m_0.

Comme les Sq^{2^h} engendrent multiplicativement A_2, on a $p - m_0 =: 2$ (rappelons l'hypothese de minimalite de p). En particulier, $Sq^2 y$ est non nul. Comme $y \in \mathrm{Im}(Sq_0)$, on a alors $\quad$ car $Sq^2 \, Sq_0 z = Sq_0 Sq^{2^{-}} z$ qui est nul si $>$. On va montrer que $\quad k-d$.

Supposons $\quad k-d$ et $t \quad 1$. Alors,

Lemme 6 *$Q_t y$ est nul, tant que son degre est inferieur ou egal a $n+l$.*

Demonstration Par l'hypothese de maximalite de m_0, on sait qu'il suffit de montrer que 2^{k-d+2} ne divise pas le degre de $Q_t y$. En effet on a:

$$\begin{aligned} |Q_t y| &= m_0 + 2 \; (2^{t+1} - 1) \\ &= 2^{k-d+2} q - 2 \; + 2^{\;+t+1} - 2 \\ &= 2^{k-d+2} q + (2^{\;+t} + \quad + 2^{\;+1} + 2\;) - 2\;. \end{aligned}$$

Comme $t \quad 1$ et $\quad$, on sait que ce degre est un multiple impair de 2 pour $>$ et que c'est un multiple impair de $2^{\;+1}$ pour $=$. Donc $2^{\;+2}$ ne divise pas ce degre. Puisque $\; + 2 \quad k-d+2$, 2^{k-d+2} ne divise pas ce degre non plus. □

Or pour $1 \quad t \quad k - \quad - 1$,

$$
\begin{aligned}
|Q_t y| &= m_0 + 2 \ (2^{t+1} - 1) \\
& \quad m_0 + 2 \ (2^{k-} \ - 1) \\
& \quad n + l.
\end{aligned}
$$

Donc d'apres le corollaire 3, $k - \ - 2 \quad d - 2$, alors $\quad k - d$ et par consequent, $\quad k - d$.

D'apres la de nition de $\ $, $p = m_0 + 2 \ $, et par hypothese, $2^{k-d+2} \nmid m_0$ et $2^{k-d+2} | p$, on a donc $\quad k - d + 1$, ce qui implique que M contient une lacune $(m_0; p)$. Car sinon, il existe $p' \in (m_0; p)$ tel que $M^{p'} \neq \{0\}$. Par l'hypothese de maximalite de m_0, $2^{k-d+2} | p'$. Donc $2 \ = p - m_0 > p - p' \quad 2^{k-d+2}$, ce qui est contradictoire au fait que $\quad k - d + 1$. L'existence de la lacune $(m_0; p)$ dans M et le theoreme d'Adams impliquent que $\quad 3$. Or comme $\quad k - d$ et $k \quad d + 4$, on a $\quad k - d \quad 4$, ceci implique qu'un tel m_0 n'existe pas.

Fin de la demonstration du Lemme 5 □

Notons donc les degres plus petits que n pour lesquels M est non-trivial comme suit

$$n = r_0 > r_1 > \quad \text{et} \quad \forall i, \ 2^{k-d+2} | r_i.$$

On a

Lemme 7 *Pour tout x_i de degre r_i, $A_2 x_i$ contient la lacune $(r_i; n + l]$.*

Demonstration On raisonne par l'absurde. Si l'enonce est faux, on choisit un element x_i de degre maximal tel que $A_2 x_i$ contienne des elements non nuls de degre superieur a r_i et inferieur a $n + l$. On choisit dans $(r_i; n + l]$ le plus bas degre en lequel $A_2 x_i$ est non-trivial. En utilisant la base multiplicative de A_2, il est de la forme $r_i + 2^y$, $y \quad 0$. Comme les degres dans l'intervalle $(r_i; n + l]$ ou il y a des elements non nuls sont divisibles par 2^{k-d+2}, on a $y \quad k - d + 2 \quad 6$. Par consequent, on a une lacune $(r_i; r_i + 2^y)$, $y \quad 6$, dans $A_2 x_i$ avec $Sq^{2^y} x_i \neq 0$ en degre $r_i + 2^y$. Par la maximalite de x_i, il n'y a aucun element y de degre superieur a r_i tel que $A_2 y$ contienne des elements non nuls en degre superieur a $|y|$ et inferieur a $n + l$. Donc l'element non nul $Sq^{2^y} x_i$ ne peut pas être dans $\sum_{j<y} \mathrm{Im}(Sq^{2^j})$. Alors l'existence de cette lacune $(r_i; r_i + 2^y)$ dans $A_2 x_i$ est impossible a cause du theoreme d'Adams. □

On montre alors par recurrence que:

$$\forall i \quad j 2^{d-2}; \qquad 2^{k-d+j+2} | r_i.$$

Le cas $j = 0$ est demontre ci-dessus. Supposons que c'est vrai pour j, alors

$$\begin{aligned} n + l - r_{(j+1)2^{d-2}} &= l + \sum_{i=0}^{(j+1)2^{d-2}-1}(r_i - r_{i+1}) \\ &= l + \sum_{h=0}^{j}\sum_{i=h2^{d-2}}^{(h+1)2^{d-2}-1}(r_i - r_{i+1}) \\ &\geq 2^k + \sum_{h=0}^{j} 2^{d-2}2^{k-d+h+2} \\ &= 2^k + \sum_{h=0}^{j} 2^{k+h} \\ &= 2^{k+j+1}. \end{aligned}$$

Puisque A_2x_i contient une lacune $(r_i; n + l]$ et d'apres le corollaire 4, on a donc $2^{k-d+j+3} | r_i$, $\forall\, i \leq (j + 1)2^{d-2}$.

Rappelons que par l'hypothese sur l, il y a bien (au moins) $(d - 1)2^{d-2} + 1$ valeurs pour l'indice i de r_i. On peut donc poser $w = (d - 1)2^{d-2}$, alors $2^{k+1}|r_w$ et $2^{k+1}|r_{w+1}$. L'intervalle $(r_{w+1}; r_w)$ est donc aussi une lacune de M, avec $r_{w+1} \geq n_1$ et $r_w \leq n$, d'une longueur h telle que

$$\begin{aligned} h &\geq 2^{k+1} - 1 \\ &\geq l \\ &\geq \max\{2^{d+4}; n_{j+1} - n_j \mid j = 1, \ldots, 1 + (d-1)2^{d-2}\}. \end{aligned}$$

Ceci est contradictoire au choix de $(n; n + l]$.

Fin de la demonstration du Theoreme 2 □

5 Demonstration du theoreme 3

Dans cette section, on va etudier des modules instables dont la filtration nilpotente est de longueur finie. Un exemple trivial d'un tel module instable est un module instable quelconque de dimension finie. Un autre exemple est la suspension d'un module instable reduit. La cohomologie d'un groupe fini ou du classifiant d'un groupe compact verifie aussi cette hypothese [3].

Ci-dessous, on demontre un resultat sur la non-existence de grandes lacunes dans les modules instables connexes realisables dont la filtration nilpotente est de longueur finie qui verifie la condition 1.

Demonstration du Theoreme 3 Comme dans la demonstration du theoreme 2, il suffit de prouver l'enonce pour les modules instables connexes dont la filtration nilpotente est de longueur finie, qui est de type T et verifie la condition 1.

On raisonne par l'absurde. Soit donc M un module instable connexe qui est la cohomologie reduite d'un espace ou d'un spectre. Reprenons les notations introduites avant le theoreme 3: les quotients $nil_s M / nil_{s+1} M$ non-triviaux s'ecrivent sous la forme $\ {}^{m_i} R_{m_i}$, R_{m_i} reduits, $i = 1, \ , t$, $m_1 < \ < m_t$. Tous les R_{m_i}, $i \in I$, soient non-triviaux dans les degres $n_{1,i} < n_{2,i} < \ $. Soit $\ $ tel que $2 \ \ t > 2^{\ -1}$. Supposons que pour $n \ \min\{m_i + n_{1,i} \mid i \in I\}$, $(n, n + l]$ soit la premiere lacune dans M de longueur

$$l \quad \max\{(m_t + 1)2^{d+4}, n_{j+1,i} - n_{j,i} \mid i \in I, j = 1, \ , 1 + (d + \ - 1)2^{d-2}\}.$$

Soit k l'unique entier ($\ d + 4$) tel que $2^{k+1} > l \ 2^k.$

Lemme 8 *Pour tout x tel que $|x| \ n$, le module $A_2 x$ contient la lacune $(|x|, n + l]$.*

Demonstration Pour montrer cela, on raisonne par l'absurde. A tout element $x \in M$, on associe son degre de nilpotence, c'est-a-dire, l'entier m_x tel que $x \in nil_{m_x} M - nil_{m_x+1} M$.

Soit x non nul de degre maximal tel que $A_2 x$ n'est pas reduit a $\{0\}$ dans l'intervalle $(|x|, n]$. ($A_2 x$ contient la lacune $(n, n + l]$ par hypothese.)

Soit donc $y \in A_2 x$ de degre minimal tel que $y \neq 0$, $|x| < |y| \ n$, $y \in \ {}^{m_y} R_{m_y}$ sa reduction que l'on note $\ {}^{m_y} v$, $v \in R_{m_y}$. Alors comme $A_2 y$ contient une lacune $(|y|, n + l]$ (rappelons l'hypothese de maximalite de x), le corollaire 4 implique que $v \in \mathrm{Im}(Sq_0^{k-d+2})$. On sait donc que $|y| - m_y$ est divisible par 2^{k-d+2} et on ecrit $|y| - m_y =: 2^{k-d+2} l_y$.

Soit de même la reduction $x \in \ {}^{m_x} R_{m_x}$. Notons $x = \ {}^{m_x} u$, $u \in \mathrm{Im}(Sq_0^s) - \mathrm{Im}(Sq_0^{s+1})$.

Lemme 9 *Pour $s \ k - d$, $t \ 1$, 2^{k-d+2} ne divise pas le degre de $Q_t^s u$.*

Demonstration En e et on a $|Q_t^s u| = |u| + 2^s(2^{t+1} - 1)$. Considerons le A_2−module engendre par u dans R_{m_x}. Si $A_2 u$ contient la lacune $(|u|, n + l - m_x]$, le degre de u est divisible par 2^{k-d+2}, et dans ce cas 2^{k-d+2} ne divise pas $|Q_t^s u|$ pour $s \ k - d$.

Supposons que $A_2 u$ ne contienne pas la lacune $(|u|, n + l - m_x]$ et soit $t = Sq^{2} \ u$ l'element non nul du plus bas degre avec $|t| \ n - m_x$. Comme $A_2 t$ contient la lacune $(|t|, n + l - m_x]$, $2^{k-d+2} \mid |t|$. Pour la même raison que dans la demonstration du lemme 5, on a $\ s$. Alors

$$\begin{aligned} |Q_t^s u| &= |t| - 2 \ + 2^s(2^{t+1} - 1) \\ &= 2^{k-d+2} q - 2 \ + 2^{s+t+1} - 2^s \end{aligned}$$

et 2^{k-d+2} ne divise pas $|Q_t^s u|$. □

Supposons d'abord que $s \geq k-d$. Tant que $|Q_t^s x| \leq n+l$, on a donc necessairement $Q_t^s u = 0$ pour des raisons de degre. En effet si $Q_t^s u \neq 0$, ${}^{m_x}Q_t^s u = Q_t^s x = \overline{Q_t^s x}$ la reduction de $Q_t^s x$ dans ${}^{m_x}R_{m_x}$ dont le degre de nilpotence est m_x (qui est *a priori* plus grand que ou egal a celui de x, voir [8],[10]), et dont le degre est de la forme (en appliquant le corollaire 4 a la lacune $(|Q_t^s u|; n+l-m_x]$ dans $A_2(Q_t^s u)$)

$$m_x + 2^{k-d+2} f; \quad f \geq 0.$$

Donc pour que $Q_t^s u$ soit non nul, il faudrait que son degre soit multiple de 2^{k-d+2}.

Pour tout t tel que $1 \leq t \leq k-s-1$,

$$\begin{aligned} |Q_t^s x| &= |x| + 2^s(2^{t+1}-1) \\ &\leq |x| + 2^s(2^{k-s}-1) \\ &\leq n+l. \end{aligned}$$

Donc d'apres le corollaire 3,

$$k-s-2 \leq d-2; \quad \text{soit } s \geq k-d$$

et donc $|x| - m_x =: 2^{k-d} l_x$.

Revenons alors a l'element y non nul du plus bas degre, superieur ou egal a $|x|+1$ dans $A_2 x$. Il est de la forme $Sq^{2^\alpha} x$, le theoreme d'Adams implique que $\alpha \leq 3$. En effet l'hypothese de maximalite de x implique que pour tout element z non nul dont le degre est entre $|x|+1$ et n, $A_2 z$ est reduit a $\{0\}$ dans l'intervalle $(|z|; n]$. Donc $Sq^{2^\alpha} x \notin \sum_{i<\alpha} \mathrm{Im}(Sq^{2^i})$.

On a alors $|x| + 2^\alpha = |y|$, $y \in nil_{m_y} M$ et $m_y \geq m_x$. D'ou, $m_x + 2^{k-d} l_x + 2^\alpha = m_y + 2^{k-d+2} l_y$. Donc $m_x + 2^\alpha \equiv m_y \mod 2^{k-d}$. D'autre part, $2^{k+1} > l \geq (m_t+1)2^{d+4}$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} 2^{k-d} &> 8(m_t+1) \\ &= (m_x+m_y+2^\alpha) + (m_t-m_x) + (m_t-m_y) + (8-2^\alpha) + 6m_t \\ &\geq m_x+m_y+2^\alpha. \end{aligned}$$

$$|m_x + 2^\alpha - m_y| \leq m_x + m_y + 2^\alpha < 2^{k-d};$$

donc $m_x + 2^\alpha = m_y$. Or cette egalite n'a pas de solution a cause de la condition 1, l'existence d'un tel x est donc contradictoire. Donc pour tout element x de M de degre inferieur a n, $A_2 x$ contient une lacune $(|x|; n+l]$.

Fin de la demonstration du Lemme 8 □

On acheve la demonstration en appliquant la demonstration du theoreme 2 a chaque R_{m_i}, $i \in I$. Plus precisement, on applique la (derniere) partie de la demonstration du theoreme 2 - concernant une recurrence sur la divisibilite par une puissance de 2 des degres inferieurs a $n + l$ pour lesquels le module est non-trivial - a R_{m_i} $(i \in I)$. On veut donc obtenir des informations sur la divisibilite par une puissance de 2 de ses degres inferieurs a $n + l$ auxquels on a soustrait m_i, pour lesquels R_{m_i} est non-trivial, a n de montrer qu'on aboutit a une contradiction.

En e et, si on note $\forall\ i \in I$,

$$(n - m_i \quad)\ r_{0;i} > r_{1;i} >$$

les degres inferieurs a $n + l - m_i$, pour lesquels R_{m_i} est non-trivial, on a

$$\forall\ w \quad (d + \quad - 1)2^{d-2}; \qquad 2^{k+\ \ +1} | r_{w;i}.$$

Donc en degre inferieur ou egal a $r_{w;i}$, R_{m_i} $(i \in I)$ ne contient que des lacunes de longueur plus grande que ou egale a $2^{k+\ \ +1} - 1$. Donc il existe un $d_0 \quad n$ tel qu'en degre inferieur ou egal a d_0, les $\ ^{m_i}R_{m_i}$ $(i \in I)$ ne contiennent que des lacunes de longueur plus grande que ou egale a $2^{k+\ \ +1} - 1$, et on suppose de plus qu'il en existe au moins une en degre inferieur ou egal a d_0.

Maintenant on choisit une lacune de la plus petite longueur parmi toutes celles en degre inferieur ou egal a d_0 contenues dans l'un des $\ ^{m_i}R_{m_i}$, $i \in I$. Par le choix de cette lacune, disons $\ ^{m_{i_0}}R_{m_{i_0}}$ $(i_0 \in I)$, on sait qu'elle ne contient aucun degre en lequel $\ ^{m_{i_0}}R_{m_{i_0}}$ est non-trivial, et qu'elle contient au plus un degre en lequel $\ ^{m_i}R_{m_i}$, $1 \quad i \quad t$, $i \neq i_0$, est non-trivial. Car sinon, elle contiendrait une lacune d'un des $\ ^{m_i}R_{m_i}$, $i \neq i_0$, en contradiction avec l'hypothese de minimalite sur la longueur de la lacune choisie. Comme cette lacune contient au plus $t - 1$ degres en lesquels M est non-trivial, il existe donc une lacune $(n'; n' + l']$, avec $n' \quad \min\{m_i + n_{1;i} \mid i \in I\}$ et $n' + l' \quad d_0 \ (\quad n)$, de longueur

$$\begin{aligned} l' \quad & \tfrac{1}{t}\ 2^{k+\ \ +1} - 1 \\ & 2^{k+1} - 1 \\ & l \\ & \max\{(m_t + 1)2^{d+4}; n_{j+1;i} - n_{j;i} \mid i \in I; \\ & \qquad\qquad j = 1; \quad ; 1 + (d + \quad - 1)2^{d-2}\}. \end{aligned}$$

Ceci est contradictoire au choix de $(n; n + l]$.

Fin de la demonstration du Theoreme 3 $\square$

6 Le cas p premier impair

On indique brievement les resultats pour le cas p premier impair. On donne d'abord les ingredients essentiels, i.e., les operations Q_t^s, $s,t \geq 0$, et P_0^s, $s \geq 0$. En tenant compte des signes, les formules et les resultats combinatoires sont etablis de la même maniere.

Definition 14 Les operations Q_t^s, $s,t \geq 0$ sont definies recursivement comme suit:

(1) $Q_0^0 = \beta$ et $Q_{t+1}^0 = [P^{p^t}, Q_t^0]$, ce sont des Q_t definis par Milnor [7];

(2) $Q_0^s = P^{p^{s-1}}$ et $Q_{t+1}^s = [P^{p^{s+t}}, Q_t^s]$, $s \geq 1$.

Notation 4 Le symbole $(n_1, \ldots, n_d) = (2m_1 + \epsilon_1, \ldots, 2m_d + \epsilon_d)$, $\epsilon_i = 0$ ou 1 ($1 \leq i \leq d$), designe l'element $t^{\epsilon_1}u^{m_1} \otimes \cdots \otimes t^{\epsilon_d}u^{m_d} \in H^*(B(\mathbb{Z}/p)^{\times d}; \mathbb{Z}/p)$, t etant de degre 1 et u etant de degre 2. Un tel element est dit *basique*.

Notation 5 Comme d'habitude, P_0 designe l'operation definie dans un module instable par

$$P_0 x = \begin{cases} P^{|x|/2}x, & \text{si } |x| = 0 \bmod 2; \\ \beta P^{(|x|-1)/2}x, & \text{si } |x| = 1 \bmod 2. \end{cases}$$

On a donc

$$P_0^s(2m_1 + \epsilon_1, \ldots, 2m_d + \epsilon_d) = (2p^s m_1 + 2p^{s-1}\epsilon_1, \ldots, 2p^s m_d + 2p^{s-1}\epsilon_d);$$

et $\mathrm{Im}(P_0^s)$ ($s \geq 1$) est l'ensemble des elements $x = \sum_{j \in J}(2p^{s-1}l(j)_1, \ldots, 2p^{s-1}l(j)_d)$ de $H^*(B(\mathbb{Z}/p)^{\times d}; \mathbb{Z}/p)$. Par convention, $P_0^0 = id$. Ici, J est un ensemble d'indices j qui indexent des differents $d-$uplets $(l(j)_1, \ldots, l(j)_d)$, $l(j)_1, \ldots, l(j)_d = 0, 1 \bmod p$, $l(j)$ peut être nul.

Remarque Dans toute cette section, le symbole P_0^s designe l'operation $(P_0)^s$, qui est evidemment distincte de l'operation de Milnor (utilisee dans l'appendice).

Puisqu'on a pour tout element x d'un module instable et pour tout $n \geq 1$,

$$P^{pn}P_0 x = P_0 P^n x \qquad \text{et} \qquad P^1 P_0 x = P_0 \beta x;$$

on peut donc etablir les proprietes de Q_t^s, $s,t \geq 0$, sur $\mathrm{Im}(P_0^s)$ a partir de celles de $Q_t = Q_t^0$. Une autre facon d'etablir les proprietes de Q_t^s est d'utiliser le fait que

$$\Delta(P^{p^s}) = P^{p^s} \otimes 1 + P^{p^s - 1} \otimes P^1 + \cdots + 1 \otimes P^{p^s}$$

devient $P^{p^s} \otimes 1 + 1 \otimes P^{p^s}$, une derivation sur $\mathrm{Im}(P_0^{s+1})$.

Lemme 10 *Soit x un element de $H^*(B(\mathbb{Z}/p)^d;\mathbb{Z}/p)$ tel que $x \in \mathrm{Im}(P_0^s) - \mathrm{Im}(P_0^{s+1})$ et que $Q_t^s x = 0$, $\forall\, t = q, \ldots, r$. Alors $r - q \le d - 2$.* □

On laisse la demonstration de ce lemme au lecteur. Voici quelques indications. D'abord, comme dans la section 3, on de nit un $g-$echange ($g \ge 0$) entre deux monômes basiques et de la maniere suivante: un tel $g-$echange existe entre et s'il existe i et j tels que ces deux monômes constituent, a un ordre (entre i et j) pres, une paire de la forme

$$= (u_1, \ldots, u_{i-1}, 2u_i + 1, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, 2u_j + 2p^g, u_{j+1}, \ldots, u_d)$$

et $$= (u_1, \ldots, u_{i-1}, 2u_i + 2p^g, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, 2u_j + 1, u_{j+1}, \ldots, u_d).$$

On dit aussi que c'est un $g-$echange en $i-$eme position pour avec . En utilisant cette nouvelle de nition de $g-$echange, et les autres de nitions restant inchangees, on aura la même proposition que la proposition 2 pour le cas p premier impair. Ensuite on acheve la demonstration en construisant une $(q, r)-$classe comme dans la demonstration du corollaire 3.

Lemme 11 *Soit x un element de $H^*(B(\mathbb{Z}/p)^d; \mathbb{Z}/p)$. Si $A_p x$ contient une lacune $(|x|, |x| + l]$, $l \ge 2(p-1)p^k$ pour un certain $k \ge d-3$, alors $x \in \mathrm{Im}(P_0^{k-d+3})$.*

Demonstration Soit tel que $x = P_0 x' \in \mathrm{Im}(P_0) - \mathrm{Im}(P_0^{+1})$. Si $> k+1$, on a $\ge k-d+3$. Si $\le k+1$, alors l'existence de la lacune dans $A_p x$ implique que $\forall\, t = 0, \ldots, k -$,

$$P_0 P^{p^t} x' = P^{p^{t+}} P_0 x' = P^{p^{t+}} x = 0,$$

et que

$$P_0 x' = P^{p^{-1}} P_0 x' = P^{p^{-1}} x = 0.$$

Donc $x' = 0$ et $P^{p^t} x' = 0$, $\forall\, t = 0, \ldots, k -$. D'ou, $Q_{t'} x' = 0$, $\forall\, t' = 0, \ldots, k - + 1$. D'apres le lemme 10, on a $k - + 1 \le d - 2$, d'ou $\ge k - d + 3$. □

Theoreme 5 ([6], [11]) *Soit X un espace ou un spectre, $k \ge 1$, soit $x \in H^n(X;\mathbb{Z}/p)$ tel que $x = 0$ et $P^{p^i} x = 0$, $\forall\, i < k$, alors $P^{p^k} x \in \sum_{i<k} \mathrm{Im}(P^{p^i}) + \mathrm{Im}(\ )$.*

Definition 15 Soit M un module instable infini connexe dont la filtration nilpotente est de longueur finie. Les quotients $nil_s M / nil_{s+1} M$ non-triviaux s'ecrivent sous la forme $\Sigma^{m_i} R_{m_i}$, R_{m_i} reduits, $i = 1, \cdots, t$, $m_1 < \cdots < m_t$. Notons que l'un au moins des R_{m_i} est infini. Supposons qu'il existe des entiers d et α_d tels que tous les R_{m_i} se plongent dans $H^*(B(\mathbb{Z}/p)^d; \mathbb{Z}/p)^{\oplus \alpha_d}$. Notons $I \subset \{1, \cdots, t\}$ le sous-ensemble des i tels que R_{m_i} soit infini, et soit $n_{1,i} < n_{2,i} < \cdots$ les degres en lesquels ce module est non-trivial.

Soit λ tel que $p^{\lambda} \geq t > p^{\lambda-1}$. Le module instable M sera dit *de type* T s'il contient une lacune $(s, s+l]$ avec $s \geq \min\{m_i + n_{1,i} \mid i \in I\}$ et

$$l \geq \max\{2(m_t + 1)(p-1)p^{d+2}, n_{j+1,i} - n_{j,i} \mid i \in I, \\ j = 1, \cdots, 1 + (d + \lambda)(p-1)^2 p^{d-2}\}.$$

Condition 2 Soit M un module instable connexe dont la filtration nilpotente est de longueur finie. En utilisant les notations introduites dans la definition precedente, on dira que M verifie la condition 2 si

$$m_j - m_i \notin \{1, 2(p-1)\}, \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq t.$$

Theoreme 6 *Soit M un module qui est une suspension iteree (positive ou negative) d'un module instable connexe dont la filtration nilpotente est de longueur finie, qui est de type T et verifie la condition 2. Alors M n'est pas realisable, i.e., il n'existe aucun espace ou spectre X tel que $M \cong \tilde{H}^*(X; \mathbb{Z}/p)$.*

Demonstration L'idee essentielle de la demonstration de ce theoreme est la même que celle de la demonstration du theoreme 3. Neanmoins, certains aspects du cas d'un nombre premier impair apparaissent, non seulement on utilise le theoreme 5 au lieu du theoreme d'Adams, mais aussi on a besoin de reconstituer les calculs pour le cas d'un nombre premier impair. On donne dans la suite une esquisse de la demonstration de ce theoreme, afin d'illustrer certains changements necessaires par rapport a celle du theoreme 3.

On note, comme dans la demonstration du theoreme 3, qu'il suffit de prouver l'enonce pour les modules instables connexes dont la filtration nilpotente est de longueur finie, qui est de type T et verifie la condition 2.

Ensuite, on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un tel module instable connexe M qui est la cohomologie reduite d'un espace ou d'un spectre, et que la lacune $(n, n+l]$ soit la premiere dans M, avec $n \geq \min\{m_i + n_{1,i} \mid i \in I\}$, de longueur

$$l \geq \max\{2(m_t + 1)(p-1)p^{d+2}, n_{j+1,i} - n_{j,i} \mid i \in I, \\ j = 1, \cdots, 1 + (d + \lambda)(p-1)^2 p^{d-2}\},$$

ou est l'unique entier tel que $p \quad t > p^{\ -1}$. Soit k l'unique entier ($d+2$) tel que $2(p-1)p^{k+1} > l \quad 2(p-1)p^{k}$.

Si on note $\forall\ i \in I$,

$$(n - m_i \quad)\ r_{0;i} > r_{1;i} >$$

les degres inferieurs a $n + l - m_i$, pour lesquels R_{m_i} est non-trivial. Alors si on peut montrer que pour tout element x de M de degre inferieur ou egal a n, $A_p x$ contient une lacune $(|x|; n + l]$, on peut montrer par recurrence que

$$\forall\ w \quad j(p-1)^2 p^{d-2}; \qquad 2p^{k-d+j+2} | r_{w;i}.$$

Puisque pour tout element x de M, et donc pour sa reduction $\ ^{m_i}x'$ dans $\ ^{m_i}R_{m_i}$, de degre inferieur ou egal a n, $A_p x$ contient une lacune $(|x|; n + l]$ et $A_p x'$ contient une lacune $(|x'|; n + l - m_i]$, le lemme 11 montre que le cas $j = 0$ est vrai.

Supposons que c'est vrai pour j, alors

$$\begin{aligned}
& (n + l - m_i) - r_{(j+1)(p-1)^2p^{d-2};i} \\
& l + r_{0;i} - r_{(j+1)(p-1)^2p^{d-2};i} \\
= \ & l + \sum_{w=0}^{(j+1)(p-1)^2p^{d-2}-1} (r_{w;i} - r_{w+1;i}) \\
= \ & l + \sum_{h=0}^{j} \sum_{w \ h(p-1)^2p^{d-2}}^{(h+1)(p-1)^2p^{d-2}-1} (r_{w;i} - r_{w+1;i}) \\
& 2(p-1)p^k + \sum_{h=0}^{j} (p-1)^2 p^{d-2} \quad 2p^{k-d+h+2} \\
= \ & 2(p-1)p^k + 2(p-1)^2 \sum_{h=0}^{j} p^{k+h} \\
= \ & 2(p-1)p^k + 2(p-1)(p^{k+j+1} - p^k) \\
= \ & 2(p-1)p^{k+j+1}.
\end{aligned}$$

Puisque pour les elements x' en degre $r_{w;i}$, $A_p x'$ contient une lacune $(r_{w;i}; n + l - m_i]$, le lemme 11 montre que $2p^{k-d+j+3} | r_{w;i}$, $\forall\ w \quad (j+1)(p-1)^2 p^{d-2}$.

Rappelons que par hypothese, il y a bien (au moins) $(d + \quad)(p-1)^2 p^{d-2} + 1$ valeurs pour l'indice i de r_i. On peut donc poser $w_0 = (d + \quad)(p-1)^2 p^{d-2}$, alors $2p^{k+ \ +2} | r_{w;i}, \forall\ w \quad w_0$. Donc en degre plus petit que $r_{w_0;i}$, R_{m_i} $(i \in I)$ ne contient que des lacunes de longueur plus grande que ou egale a $2p^{k+ \ +2} - 1$. Donc on peut choisir un $d_0 \quad n$ tel qu'en degre inferieur ou egal a d_0, les $\ ^{m_i}R_{m_i}$ $(i \in I)$ ne contiennent que des lacunes de longueur plus grande que ou egale a $2p^{k+ \ +2} - 1$, et on suppose de plus qu'il en existe au moins une en degre inferieur ou egal a d_0.

On peut donc choisir, comme a la n de la demonstration du theoreme 3, une lacune en degre inferieur ou egal a d_0, dans l'un des $\ ^{m_i}R_{m_i}$ $(i \in I)$, telle qu'elle contient au plus $t - 1$ degres en lesquels M est non-trivial. Donc il existe une lacune $(n'; n'+l']$, avec $n' \geq \min\{m_i + n_{1;i} \mid i \in I\}$ et $n'+l' \leq d_0$ ($\leq n$), de longueur

$$\begin{aligned} l' &\geq \tfrac{1}{t}\left(2p^{k+\ +2} - 1\right) \\ &\geq 2p^{k+2} - 1 \\ &> 2(p-1)p^{k+1} \\ &> l \\ &\geq \max\{2(m_t+1)(p-1)p^{d+2}; n_{j+1;i} - n_{j;i} \mid i \in I; \\ &\qquad\qquad j = 1; \ldots; 1+(d+\ )(p-1)^2p^{d-2}\}. \end{aligned}$$

Ceci est contradictoire au choix de $(n; n+l]$.

Pour finir la demonstration du theoreme, il reste donc a montrer le

Lemme 12 *Pour tout x tel que $|x| \leq n$, le module A_px contient la lacune $(|x|; n+l]$.*

Demonstration Comme dans la demonstration du lemme 8, on raisonne par l'absurde. A tout element $x \in M$, on associe son degre de nilpotence, c'est-a-dire, l'entier m_x tel que $x \in nil_{m_x}M - nil_{m_x+1}M$.

Soit x un element non nul de degre maximal tel que A_px n'est pas reduit a $\{0\}$ dans l'intervalle $(|x|; n]$. Soit donc $y \in A_px$ de degre minimal tel que $y \neq 0$, $|x| < |y| \leq n$, $y \in \Sigma^{m_y}R_{m_y}$ sa reduction que l'on note $\Sigma^{m_y}v$, $v \in R_{m_y}$. On a, a l'aide du lemme 11, $v \in \mathrm{Im}(P_0^{k-d+3})$. On sait donc que $|y| - m_y$ est divisible par $2p^{k-d+2}$ et on ecrit $|y| - m_y =: 2p^{k-d+2}l_y$.

Soit de même la reduction $x \in \Sigma^{m_x}R_{m_x}$. Notons $x = \Sigma^{m_x}u$, $u \in \mathrm{Im}(P_0^s) - \mathrm{Im}(P_0^{s+1})$.

Lemme 13 *Pour $s \geq k-d+1$, $t \geq 1$, $2p^{k-d+2}$ ne divise pas le degre de $Q_t^s u$.*

Demonstration En effet on a

$$|Q_t^s u| = \begin{cases} |u| + 2(p^{t+s} - p^{s-1}) & s \geq 1 \\ |u| + (2p^t - 1) & s = 0 \end{cases}$$

Considerons le module engendre par u dans R_{m_x}. Si A_pu contient la lacune $(|u|; n+l-m_x]$, le degre de u est divisible par $2p^{k-d+2}$, et dans ce cas $2p^{k-d+2}$ ne divise pas $|Q_t^s u|$ pour $s \geq k-d+1$.

Supposons que A_pu ne contienne pas la lacune $(|u|; n+l-m_x]$ et soit $t = Pu$ l'element non nul du plus bas degre avec $|t| \leq n - m_x$. On sait que le degre de l'operation P est $2(p-1)p^y$ ou 1. Pour la même raison que dans la demonstration du lemme 5, on a $y \quad s$. Comme $A_p t$ contient la lacune $(|t|; n + l - m_x]$, $|t|$ est divisible par $2p^{k-d+2}$ et peut donc être ecrit de la forme $|t| = 2p^{k-d+2}q$. Alors

$$|Q_t^s u| = \begin{cases} 2p^{k-d+2}q - 2(p-1)p^y + 2(p^{t+s} - p^{s-1}) & s \quad 1 \\ 2p^{k-d+2}q - 2(p-1)p^y + (2p^t - 1) \text{ ou} & \\ 2p^{k-d+2}q - 1 + (2p^t - 1) & s = 0 \end{cases}$$

et $2p^{k-d+2}$ ne divise pas $|Q_t^s u|$. □

Supposons d'abord que $s \quad k - d + 1$ et que $t \quad 1$. Tant que $|Q_t^s x| \quad n + l$, on a necessairement $Q_t^s u = 0$ pour des raisons de degre. Or pour $1 \quad t \quad k - s$,

$$\begin{aligned} |Q_t^s x| \quad = \quad & |x| + 2(p^{t+s} - p^{s-1}) \quad s \quad 1 \\ & |x| + (2p^t - 1) \quad s = 0 \\ & n + 2(p^k - p^{s-1}) \quad s \quad 1 \\ & n + (2p^k - 1) \quad s = 0 \\ < \quad & n + 2p^k \\ < \quad & n + 2(p-1)p^k \\ & n + l. \end{aligned}$$

Donc, d'apres le lemme 10,

$$k - s - 1 \quad d - 2; \quad \text{soit } s \quad k - d + 1$$

et donc $|x| - m_x =: 2p^{k-d} l_x$.

Maintenant on peut trouver une contradiction comme dans la demonstration du lemme 8. A l'aide du theoreme 5 et de la base multiplicative de A_p, on sait qu'en degre superieur ou egal a $|x| + 1$, l'element non nul du plus bas degre dans $A_p x$ ne peut être que $y = \quad x$ ou $y = P^1 x$. On a alors $|x| + 1 = |y|$ ou $|x| + 2(p-1) = |y|$. Donc

$$\begin{aligned} m_x + 2p^{k-d} l_x + 1 &= m_y + 2p^{k-d+2} l_y; \\ \text{ou} \quad m_x + 2p^{k-d} l_x + 2(p-1) &= m_y + 2p^{k-d+2} l_y. \end{aligned}$$

Donc, $m_y - m_x = 1$ ou $2(p-1) \bmod 2p^{k-d}$.

Puisque $2(p-1)p^{k+1} > l \quad 2(m_t + 1)(p-1)p^{d+2}$, donc

$$\begin{aligned} 2p^{k-d} \quad > \quad & 2p(m_t + 1) \\ & 6m_t + 2p \\ > \quad & m_y + m_x + 2(p-1) \\ & m_y + m_x + 1 \\ & |m_y - m_x - 2(p-1)| \\ & |m_y - m_x - 1| \end{aligned}$$

Donc $m_y - m_x = 1$ ou $2(p-1)$. Or cette egalite n'a pas de solution a cause de la condition 2, l'existence d'un tel x est donc contradictoire. Donc pour tout element x de M de degre inferieur a n, $A_p x$ contient une lacune $(|x|, n+l]$.

Fin de la demonstration du Lemme 12 □

Fin de la demonstration du Theoreme 6 □

Appendice: Notes sur les operations Q_t^s

Dans la base de Milnor de l'algebre de Steenrod A_2, on a des operations Q_t, $t \geq 0$, definies recursivement par les relations suivantes:

(1) $Q_0 = Sq^1$;

(2) $Q_{t+1} = [Sq^{2^{t+1}}, Q_t]$.

Ces operations ont des bonnes proprietes, plus precisement (Milnor, [7], §6),

Proposition 3 *Soient M, N deux modules instables, et soient $l, r, t \geq 0$.*

(1) $\forall x \in M$, $Q_r Q_t x = Q_t Q_r x$ et $Q_t^2 x = 0$.

(2) $\forall x \in M$ et $y \in N$, $Q_t(x \otimes y) = Q_t x \otimes y + x \otimes Q_t y$.

(3) Soit u le generateur de $H^*(B(\mathbb{Z}/2); \mathbb{Z}/2)$ en degre 1,

$Q_t u^{2l} = 0$ *et* $Q_t u^{2l+1} = u^{2l+2^{t+1}}$.

Inspire par ces proprietes, on a construit dans la section 2 les operations Q_t^s, $s, t \geq 0$, qui possedent aussi ces proprietes sur $\mathrm{Im}(Sq_0^s)$. Dans le reste de cet appendice, on decrit quelques proprietes elementaires de ces operations. Puis, on donne a la fin les demonstrations du lemme 2 et du corollaire 2.

D'abord, on compare ces operations avec les operations connues, P_{t+1}^s, $s, t \geq 0$. Voici deux proprietes elementaires:

(1) $Q_t^0 = Q_t = P_{t+1}^0$, $Q_0^s = Sq^{2^s} = P_1^s$.

(2) Q_t^s est une operation de degre $2^s(2^{t+1}-1)$.

D'apres ces deux proprietes, plus le fait que P_{t+1}^s est aussi une operation de degre $2^s(2^{t+1}-1)$, une question curieuse est de savoir quand les deux operations Q_t^s et P_{t+1}^s coincident. En fait, quand $st \neq 0$, il semble que le seul cas ou ces deux operations coincident est $Q_1^1 = P_2^1$.

Pour effectuer le calcul des Q_t^s, on note que l'on a une autre facon de definir les operations Q_t^s, $s, t \geq 0$:

(1) $Q_0^s = P_1^s$;

(2) $Q^s_{t+1} = [P_1^{t+s+1}, Q^s_t]$.

Avec cette definition, on peut exprimer Q^s_t en terme de la base de Milnor, a l'aide de la formule multiplicative de cette base. Voici quelques calculs qui comparent les Q^s_t et P^s_{t+1}:

(1) $Q^1_1 = P^1_2$, $Q^2_1 = P^2_2 + Sq(3,3)$, $Q^3_1 = P^3_2 + Sq(6,6) + Sq(3,7)$.

(2) $Q^1_2 = P^1_3 + Sq(7,0,1) + Sq(4,1,1)$.

Pour finir cet appendice, on donne ici les demonstrations du lemme 2 et du corollaire 2.

Demonstration du Lemme 2 Soient M un module instable et x un element de M.

Quand $t = 0$,

$$Q_0^{s+r} Sq_0^s x = Sq^{2^{s+r}} Sq_0^s x = Sq_0^s Sq^{2^r} x = Sq_0^s Q_0^r x.$$

Si on suppose que $Q_t^{s+r} Sq_0^s x = Sq_0^s Q_t^r x$ pour $t \le t_0$, alors quand $t = t_0 + 1$, on a

$$\begin{aligned}
Q^{s+r}_{t_0+1} Sq_0^s x &= (Sq^{2^{t_0+s+r+1}} Q^{s+r}_{t_0} - Q^{s+r}_{t_0} Sq^{2^{t_0+s+r+1}}) Sq_0^s x \\
&= Sq^{2^{t_0+s+r+1}} Q^{s+r}_{t_0} Sq_0^s x - Q^{s+r}_{t_0} Sq^{2^{t_0+s+r+1}} Sq_0^s x \\
&= Sq^{2^{t_0+s+r+1}} Sq_0^s Q^r_{t_0} x - Q^{s+r}_{t_0} Sq_0^s Sq^{2^{t_0+r+1}} x \\
&= Sq_0^s Sq^{2^{t_0+r+1}} Q^r_{t_0} x - Sq_0^s Q^r_{t_0} Sq^{2^{t_0+r+1}} x \\
&= Sq_0^s (Sq^{2^{t_0+r+1}} Q^r_{t_0} - Q^r_{t_0} Sq^{2^{t_0+r+1}}) x \\
&= Sq_0^s Q^r_{t_0+1} x.
\end{aligned}$$

Donc, par recurrence (sur t), on a $Q_t^{s+r} Sq_0^s x = Sq_0^s Q_t^r x$, $\forall\, r, s, t$. □

Demonstration du Corollaire 2 Les proprietes de Q_t utilisees ci-dessous sont dans la proposition 3.

(1) Soit M un module instable. Par le lemme 2, on a $\forall\, x \in M$,

$$\begin{aligned}
Q^s_r Q^s_t Sq^s_0 x &= Q^s_r Sq^s_0 Q_t x &&= Sq^s_0 Q_r Q_t x \\
&= Sq^s_0 Q_t Q_r x &&= Q^s_t Sq^s_0 Q_r x \\
&= Q^s_t Q^s_r Sq^s_0 x;
\end{aligned}$$

$$\text{et} \quad (Q^s_t)^2 Sq^s_0 x = Q^s_t Sq^s_0 Q_t x = Sq^s_0 (Q_t)^2 x = 0.$$

(2) Supposons qu'il existe $x' \in M$, $y' \in N$ tels que $x = Sq^s_0(x')$, $y = Sq^s_0(y')$, alors

$$\begin{aligned}
Q^s_t(x \otimes y) &= Q^s_t(Sq^s_0(x') \otimes Sq^s_0(y')) \\
&= Q^s_t Sq^s_0(x' \otimes y') \\
&= Sq^s_0 Q_t(x' \otimes y') \\
&= Sq^s_0(Q_t x' \otimes y' + x' \otimes Q_t y') \\
&= Sq^s_0 Q_t x' \otimes Sq^s_0 y' + Sq^s_0 x' \otimes Sq^s_0 Q_t y' \\
&= Q^s_t x \otimes y + x \otimes Q^s_t y.
\end{aligned}$$

(3) On a

$$\begin{aligned}
Q^s_t Sq^s_0 u^{2l} &= Sq^s_0 Q_t u^{2l} &&= 0; \\
Q^s_t Sq^s_0 u^{2l+1} &= Sq^s_0 Q_t u^{2l+1} &&= Sq^s_0 u^{2l+2^{t+1}} = u^{2^s(2l+2^{t+1})}.
\end{aligned}$$

□

Bibliographie

[1] J.F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Annals of Mathematics, 72 (1960), pp. 20-104.

[2] P. Gabriel, *Des categories abeliennes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), pp. 323-448.

[3] H.W. Henn, J. Lannes et L. Schwartz, *Localizations of unstable A-modules and equivariant mod p cohomology*, Math. Ann. 301 (1995), No.1, pp. 23-68.

[4] N.J. Kuhn, *On topologically realizing modules over the Steenrod algebra*, Annals of Mathematics, 141 (1995), pp. 321-347.

[5] J. Lannes et L. Schwartz, *Sur la structure des $A-$modules instables injectifs*, Topology (1989), Vol.28, No.2, pp. 153-169.

[6] A. Liulevicius, *The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations*, Mem. A.M.S. 42 (1962).

[7] J. Milnor, *The Steenrod algebra and its dual*, Annals of Mathematics, 67 (1958), pp. 150-171.

[8] L. Schwartz, *La ltration nilpotente de la categorie U et la cohomologie des espaces de lacets*, Algebraic topology | rational homotopy (Louvain-la-Neuve, 1986), pp. 208{218, Lecture Notes in Math., 1318, Springer, Berlin (1988).

[9] L. Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's xed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics Series (1994).

[10] L. Schwartz, *La ltration de Krull de la categorie U et la cohomologie des espaces*, Algebr. Geom. Topol. 1 (2001), pp. 519-548 (electronic).

[11] N. Shimada et T. Yamanoshita, *On triviality of the mod p Hopf invariant*, Japan J.Math. 31 (1961), pp. 1-25.

LAGA, Institut Galilee, Universite Paris Nord
93430 Villetaneuse, France

Email: `donghua.jiang@polytechnique.org`

Received: 23 September 2002 Revised: 5 September 2003