0. Grundbegriffe

Proposition 0.2.1. *Die Anzahl der Ecken ungeraden Grades in G ist stets gerade.*

Proposition 0.2.2. *Jeder Graph G mit mindestens einer Kante hat einen Teilgraphen H mit $\delta(H) > \varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$.*

Proposition 0.3.1. *Jeder Graph G enthält einen Weg der Länge $\delta(G)$ und einen Kreis der Länge mindestens $\delta(G)+1$ (für $\delta(G) \geqslant 2$).*

Proposition 0.3.2. *Für jeden Graphen G, der einen Kreis enthält, gilt $g(G) \leqslant 2\operatorname{diam}(G)+1$.*

Proposition 0.3.3. *Ein Graph G mit Radius $\leqslant k$ und Maximalgrad höchstens $d \geqslant 3$ hat weniger als $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ Ecken.*

Beweis.

$$|G| \leqslant 1 + d\sum_{i=1}^{k}(d-1)^{i-1} = 1 + \frac{d}{d-2}\big((d-1)^k - 1\big) < \frac{d}{d-2}(d-1)^k.$$

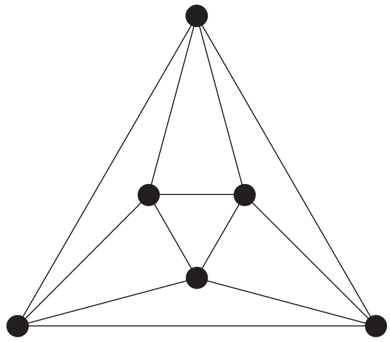
Satz 0.3.4. (Alon, Hoory & Linial 2002)
Für jeden Graphen G mit $d(G) \geqslant d \geqslant 2$ und $g(G) \geqslant g \in \mathbb{N}$ gilt $|G| \geqslant n_0(d,g)$.

$$n_0(d,g) := \begin{cases} 1 + d\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i & \text{wenn } g =: 2r+1 \text{ ungerade ist;} \\ 2\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i & \text{wenn } g =: 2r \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

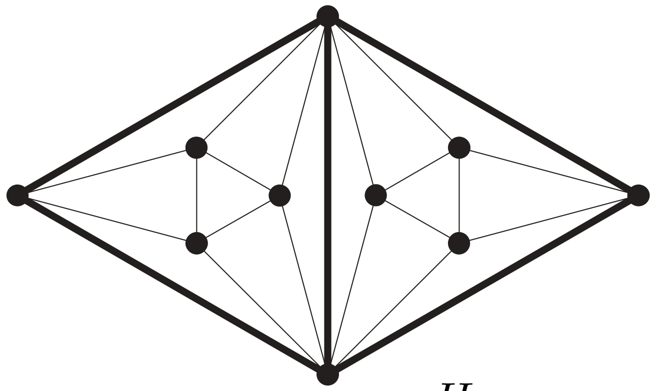
Korollar 0.3.5. *Aus $\delta(G) \geqslant 3$ folgt $g(G) < 2\log|G|$.*

Beweis. $n_0(3,g) > 2^{g/2}$.

Proposition 0.4.1. *Die Eckenmenge eines zusammenhängenden Graphen G besitzt stets eine Aufzählung $(v_1, \ldots, v_n)$ mit der Eigenschaft, daß $G_i := G[v_1, \ldots, v_i]$ für jedes i zusammenhängend ist.*



G



H

$$\kappa(G) = \lambda(G) = 4; \qquad \lambda(H) = 4;\ \ \kappa(H) = 2.$$

Proposition 0.4.2. *Ist $|G| \geqslant 2$, so gilt $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$.*

Beweis. Zum Beweis von $\kappa \leqslant \lambda$ sei F ein Trenner aus λ Kanten. Wir finden einen Eckentrenner $X \subseteq V$ mit $|X| \leqslant |F|$.

1. Fall: $\exists\, v \in V$: v ist mit keiner F-Kante inzident.
$C :=$ die v enthaltende Komponente von $G - F$
$X := \{$mit F-Kanten inzidente Ecken von $C\}$.

2. Fall: $\forall\, v \in V$: v ist mit einer F-Kante inzident, und
$\exists\, v \in V$: $\{v\} \cup N(v) \neq V$.
($C :=$ die v enthaltende Komponente von $G - F$)
$X := N(v)$.

3. Fall: $\forall\, v \in V$: $\{v\} \cup N(v) = V$.
G ist vollständig und $\kappa(G) = \lambda(G) = |G| - 1$.

Satz 0.4.3. (Mader 1972)
Jeder Graph G mit $d(G) \geqslant 4k$, wobei $0 \neq k \in \mathbb{N}$ sei, hat einen $(k+1)$-zusammenhängenden Teilgraphen H mit $\varepsilon(H) > \varepsilon(G) - k$.

Beweis. Es sei $\gamma := \varepsilon(G)$ $(\geqslant 2k)$. Wir betrachten die Teilgraphen $G' \subseteq G$ mit

$$|G'| \geqslant 2k \quad \text{und} \quad \|G'\| > \gamma\left(|G'| - k\right). \tag{$*$}$$

Solche Graphen G' existieren, da G selbst einer ist; wir wählen ein solches G' minimaler Ordnung und nennen es H.

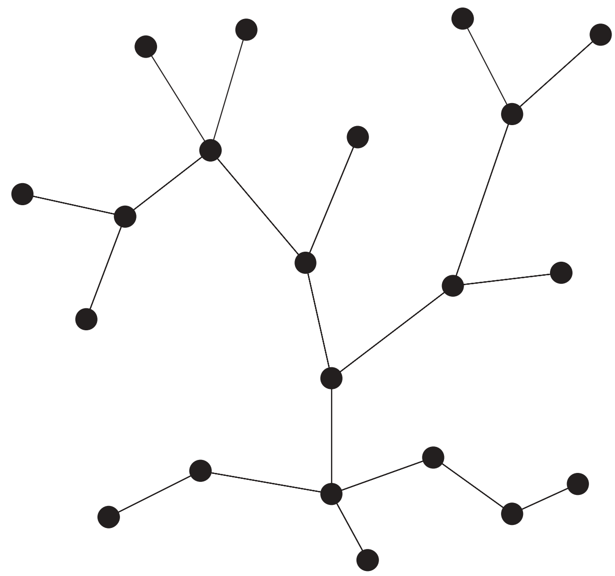
Kein Graph G', für den $(*)$ gilt, kann die Ordnung genau $2k$ haben, denn dies würde bedeuten, dass $\|G'\| > \gamma k \geqslant 2k^2 > \binom{|G'|}{2}$ gilt. Die Minimalität von H impliziert daher $\delta(H) > \gamma$: sonst könnten wir eine Ecke mit Grad höchstens γ löschen und erhielten einen Graphen $G' \subsetneq H$, der immer noch $(*)$ erfüllte. Insbesondere gilt $|H| \geqslant \gamma$. Teilen wir die Ungleichung $\|H\| > \gamma\,|H| - \gamma k$ aus $(*)$ durch $|H|$, so erhalten wir wie gewünscht $\varepsilon(H) > \gamma - k$.

Es bleibt noch $\kappa(H) \geqslant k+1$ zu zeigen. Anderenfalls hat H eine echte Teilung $\{U_1, U_2\}$ der Ordnung höchstens k; wir setzen $H[U_i] =: H_i$. Da jede Ecke $v \in U_1 \setminus U_2$ all ihre $d(v) \geqslant \delta(H) > \gamma$ Nachbarn aus H in H_1 hat, erhalten wir $|H_1| \geqslant \gamma \geqslant 2k$. Analog zeigt man, dass $|H_2| \geqslant 2k$ gilt. Da aufgrund der Minimalität von H weder H_1 noch H_2 die Bedingung $(*)$ erfüllt, ist überdies

$$\|H_i\| \leqslant \gamma\left(|H_i| - k\right)$$

für $i = 1, 2$. Aber dann widerspricht H der Bedingung $(*)$:

$$\begin{aligned}
\|H\| &\leqslant \|H_1\| + \|H_2\| \\
&\leqslant \gamma\left(|H_1| + |H_2| - 2k\right) \\
&\leqslant \gamma\left(|H| - k\right) \qquad (\text{da } |H_1 \cap H_2| \leqslant k). \quad \square
\end{aligned}$$



Satz 0.5.1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen Graphen T:*

(i) *T ist ein Baum;* *(dh. T ist zh und kreislos)*

(ii) *zwischen je zwei Ecken enthält T genau einen Weg;*

(iii) *T ist minimal zusammenhängend, d.h. T ist zusammenhängend aber für jede Kante e von T ist $T - e$ nicht zusammenhängend;*

(iv) *T ist maximal kreislos, d.h. T ist kreislos aber für je zwei nicht benachbarte Ecken x, y enthält $T + xy$ einen Kreis.*

Korollar 0.5.2. *Die Eckenmenge eines Baumes hat stets eine Aufzählung $(v_1, \ldots, v_n)$ mit der Eigenschaft, daß v_i für jedes $i \geqslant 2$ genau einen Nachbarn in $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ hat.*

Korollar 0.5.3. *Ein zusammenhängender Graph mit n Ecken ist genau dann ein Baum, wenn er $n - 1$ Kanten hat.*

Korollar 0.5.4. *Ist T ein Baum und G ein Graph mit $\delta(G) \geqslant |T| - 1$, so gilt $T \subseteq G$, d.h. G hat einen zu T isomorphen Teilgraphen.*

Ein Wurzelbaum $T \subseteq G$ ist *normal* in G, wenn die Endecken eines jeden T-Weges in G vergleichbar sind in der Baumordnung von T.

Lemma 0.5.5. *Sei T ein normaler Baum in G.*

(i) *Je zwei Ecken $x, y \in T$ werden in G durch die Menge $\lceil x \rceil \cap \lceil y \rceil$ getrennt.*

(ii) *Ist $S \subseteq V(T) = V(G)$ nach unten abgeschlossen, so werden die Komponenten von $G - S$ von den Mengen $\lfloor x \rfloor$ aufgespannt, für die x in $T - S$ minimal ist.*

Beweis. (i) Betrachte eine minimale Folge $t_1, \ldots, t_n$ in $V(P \cap T)$ mit der Eigenschaft, dass $t_1 = x$ und $t_n = y$ ist und t_i und t_{i+1} in der Baumordnung von T für alle i vergleichbar sind. Sie enthält kein Tripel $t_{i-1} < t_i > t_{i+1}$ und hat deshalb die Form

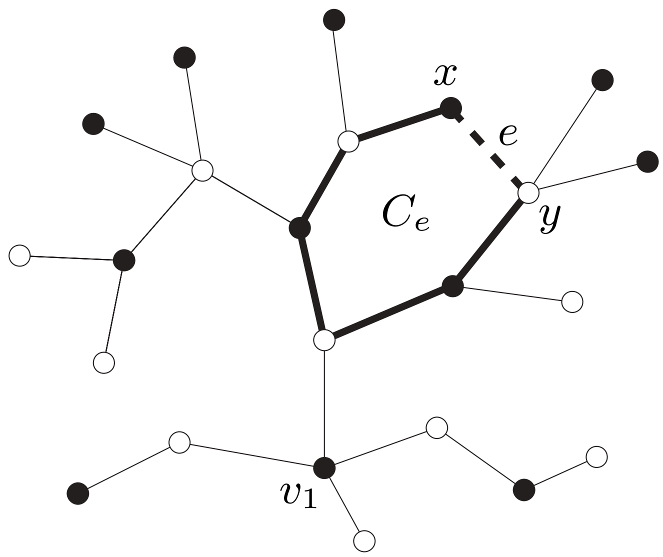
$$x = t_1 > \ldots > t_k < \ldots < t_n = y\,.$$

(ii) Jede Komponente C von $G - S$ hat genau eine minimale Ecke x, und es gilt $V(C) = \lfloor x \rfloor$. Dieses x ist sogar in $T - S$ minimal. Umgekehrt ist jedes in $T - S$ minimale x auch minimal in seiner Komponente C von $G - S$, und es folgt $V(C) = \lfloor x \rfloor$. □

Proposition 0.5.6. *Jeder zh'e Graph enthält einen normalen Spannbaum, mit beliebig vorgebbarer Ecke als Wurzel r.*

Beweis. Es sei T ein maximaler normaler Baum in G mit Wurzel r. Wir zeigen $V(T) = V(G)$. □

Proposition 0.6.1. *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.*



Satz 0.8.1. (Euler 1736)
Ein zusammenhängender Graph ist genau dann Eulersch, wenn jede seiner Ecken geraden Grad hat.

1. Paarungen

Satz 1.1.1. (König 1931)
Die größte Mächtigkeit einer Paarung in G ist gleich der geringsten Mächtigkeit einer Eckenüberdeckung.

Heiratsbedingung: $|N(S)| \geqslant |S|$ für alle $S \subseteq A$

Satz 1.1.2. (Hall 1935)
G enthält genau dann eine Paarung von A, wenn $|N(S)| \geqslant |S|$ gilt für alle Eckenmengen $S \subseteq A$.

Erster Beweis. Es sei M eine Paarung von G, in der nicht alle Ecken aus A gepaart sind; wir konstruieren zu M einen Verbesserungsweg. Es sei $a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots$ eine maximale Folge verschiedener Ecken $a_i \in A$ und $b_i \in B$ mit den folgenden Eigenschaften für alle $i \geqslant 1$ (Abb. 1.1.3):

(i) a_0 ist ungepaart;

(ii) b_i ist zu einer Ecke $a_{f(i)} \in \{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$ benachbart;

(iii) $a_i b_i \in M$.

Aufgrund der Heiratsbedingung kann unsere Folge nicht in einer Ecke aus A enden: die i Ecken $a_0, \ldots, a_{i-1}$ haben insgesamt mindestens i Nachbarn in B, also nicht nur die Ecken $b_1, \ldots, b_{i-1}$. Es sei $b_k \in B$ die letzte Ecke der Folge. Nach (i)–(iii) ist

$$P := b_k a_{f(k)} b_{f(k)} a_{f^2(k)} b_{f^2(k)} a_{f^3(k)} \ldots a_{f^r(k)}$$

mit $f^r(k) = 0$ ein alternierender Weg. Wie man leicht sieht, ist b_k ungepaart und P damit sogar ein Verbesserungsweg. $\square$

Zweiter Beweis. Tafel.

Für unseren dritten Beweis sei H ein aufspannender Teilgraph von G, der die Heiratsbedingung erfüllt und mit dieser Eigenschaft kantenminimal ist. Wegen der Heiratsbedingung für $S = \{a\}$ ist $d_H(a) \geqslant 1$ für alle $a \in A$.

Dritter Beweis. Wir werden zeigen, dass $d_H(a) = 1$ ist für alle $a \in A$. Da H der Heiratsbedingung genügt, bilden seine Kanten dann eine Paarung von A.

Nehmen wir an, eine Ecke $a \in A$ habe verschiedene Nachbarn b_1, b_2 in H. Wegen der Minimalität von H verletzen die Graphen $H - ab_1$ und $H - ab_2$ die Heiratsbedingung. Für $i = 1, 2$ gibt es also jeweils eine Menge $A_i \subseteq A$, die a enthält und $|A_i| > |B_i|$ erfüllt für $B_i := N_{H-ab_i}(A_i)$. Wegen $b_1 \in B_2$ und $b_2 \in B_1$ gilt

$$\begin{aligned}
|N_H(A_1 \cap A_2 \setminus \{a\})| &\leqslant |B_1 \cap B_2| \\
&= |B_1| + |B_2| - |B_1 \cup B_2| \\
&= |B_1| + |B_2| - \big|N_H(A_1 \cup A_2)\big| \\
&\leqslant |A_1| - 1 + |A_2| - 1 - |A_1 \cup A_2| \\
&= |A_1 \cap A_2 \setminus \{a\}| - 1\,.
\end{aligned}$$

Also verletzt H die Heiratsbedingung, entgegen unserer Annahme.

$\square$

Korollar 1.1.3. *Ist G k-regulär mit $k \geqslant 1$, so hat G einen 1-Faktor.*

Korollar 1.1.5. (Petersen 1891)
Jeder reguläre Graph geraden Grades > 0 hat einen 2-Faktor.

Präferenzlisten $\forall\, v \in V$: lineare Ordnung auf $E(v)$
(„groß = bevorzugt")

Zu gegebener Paarung M definiere:

subversive Kante $e \in E \setminus M$; M (in-)*stabil*
Kante $e \in E \setminus M$ in M *einfügen*

Algorithmus 0: Beginne mit beliebigem M.
Iterationsschritt: füge subversive Kante ein, falls $\exists$

Kann nur in stabiler Paarung enden.
Aber endet er?

Algorithmus 1: Beginne mit $M = \emptyset$.
Schritt: Gibt es ein ungepaartes $a \in A$, mit $ab \in E \setminus M$ so dass b sich lieber mit a paart (als ggf in M), füge ab in M ein.

Endet, da die $b \in B$ immer glücklicher werden.
Aber ist die Endpaarung M^* stabil?

Ja: Ist $a \in A$ ungepaart, gibt es keine subversive Kante ab, da der Algorithmus sonst weiterginge.

Ist a gepaart, so ist a zufrieden mit M^* (Induktion).

Definition: a heißt *zufrieden* mit M, falls entweder a ungepaart ist, oder a gepaart ist (etwa $ab \in M$), aber kein b', welches er $(= a)$ gegenüber ab bevorzugt, seinerseits a bevorzugt.

Tutte-Bedingung:

$$q(G - S) \leqslant |S| \text{ für alle } S \subseteq V(G) \tag{T}$$

Satz 1.2.1. (Tutte 1947)
Ein Graph G hat genau dann einen 1-Faktor, wenn (T) *gilt.*

Beweis. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne 1-Faktor. Wir finden ein *schlechtes* S: eins, das (T) verletzt.

OBdA sei G kantenmaximal ohne 1-Faktor.

Falls G ein schlechtes S enthält, sieht G so aus:

> *Alle Komponenten von $G - S$ sind vollständig, und jede Ecke aus S ist zu allen Ecken außer sich selbst benachbart.* $(*)$

Umgekehrt: erfüllt $S \subseteq V$ Bedingung $(*)$, so ist S oder $\emptyset$ schlecht.

Es reicht also (und ist nicht zuviel verlangt!), ein S mit $(*)$ zu finden. Wir zeigen:

$$S := \{v \in G \mid \forall\, w \neq v : vw \in E(G)\}$$

tut's. □

Korollar 1.2.2. (Petersen 1891)
Jeder brückenlose kubische Graph hat einen 1-Faktor.

<u>$\mathcal{H}$ hat die *Erdős-Pósa-Eigenschaft*</u>: $\quad \exists\, f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}\colon \forall\, k, G\colon$

$$\big(\exists \text{ disj. } H_1, \dots, H_k \in \mathcal{H} \text{ in } G\big) \;\vee\; \left(\exists U \subseteq V(G)\colon \begin{cases} \nexists\, H \in \mathcal{H} \text{ in } G - U \\ |U| \leqslant f(k) \end{cases}\right)$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{H} := \{\text{Kreise}\}$ die Erdős-Pósa-Eigenschaft hat.

Lemma 1.3.1. $\exists\, k \mapsto s_k$: *jeder kubische Multigraph mit mindestens s_k Ecken enthält k disjunkte Kreise.*

Beweis. Induktion nach $|H|$.

$$C := \text{kürzester Kreis in } H \quad (\Rightarrow\; |C| \leqslant 2\log|H|)$$

Minimiere den Schnitt zwischen $H - C$ (links) und C (rechts) von $m \leqslant |C|$ Kanten auf $\leqslant m - n$ Kanten, durch Verschieben von $=: n$ Ecken von links nach rechts.

Danach ist links $\delta \geqslant 2$, mit $\leqslant m - n$ Ecken vom Grad 2. Unterdrücke diese. Der kubische Rest hat mindestens so viele Ecken:

$$|H| - |C| - n - (m - n) \geqslant |H| - 2|C| \geqslant |H| - 4\log|H| \geqslant s_k - 4\log s_k$$

Nach Ind.annahme enthält dieser Rest $k-1$ disjunkte Kreise, falls

$$s_k - 4\log s_k \;\geqslant\; s_{k-1}$$

gilt. Konstruiere $k \mapsto s_k$ so, dass dies gilt:

$$r_k := \log k + \log\log k + 4 \quad \text{und} \quad s_k := \begin{cases} 4kr_k & \text{falls } k \geqslant 2 \\ 1 & \text{falls } k \leqslant 1\,. \end{cases}$$

□

Satz 1.3.2. (Erdős & Pósa 1965)
Es existiert eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ jeder Graph G entweder k disjunkte Kreise enthält oder eine Menge von höchstens $f(k)$ Ecken, die alle seine Kreise trifft.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für $f(k) := s_k + k - 1$.

$H :=$ maximaler Teilgraph von G mit Eckengraden 2 und 3

$U :=$ Ecken vom Grad 3

$\mathcal{C} :=$ Menge der Kreise $C \subseteq G - U$ mit $|C \cap H| = 1$

$Z :=$ Menge all dieser Ecken $C \cap H$

$\mathcal{C}' := \{C_z \mid z \in Z\}$ ein Kreis aus $\mathcal{C}$ für jedes $z \in Z$

Die Kreise in $\mathcal{C}'$ sind disjunkt, da H maximal ist.

$\mathcal{D} :=$ 2-reguläre Komponenten von H, die Z vermeiden

Auch $\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}$ ist eine Menge diskunkter Kreise.

$|\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}| \geqslant k \;\Rightarrow$ fertig. Wir nehmen $|\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}| \leqslant k - 1$ an.

$X := Z +$ aus jedem Kreis in $\mathcal{D}$ eine Ecke. $\big(|X| \leqslant k - 1\big)$

X überdeckt alle Kreise in $\mathcal{C}$ und alle 2-regulären Komp.n von H.

Jeder X vermeidende Kreis trifft U.

Bleibt zu zeigen: $|U| \leqslant s_k$ oder H enthält k disjunkte Kreise.

Dies gilt nach dem Lemma: unterdrücke in H die Ecken $\notin U$.

□

Satz 1.5.1. (Gallai & Milgram 1960)
Jeder gerichtete Graph G enthält eine Wegüberdeckung $\mathcal{P}$ und eine Menge $\{v_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ unabhängiger Ecken mit $v_P \in P$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

$\alpha(G) :=$ größte Mächtigkeit einer Menge unabhängiger Ecken

Korollar. *Jeder gerichtete Graph G hat eine Wegüberdeckung durch höchstens $\alpha(G)$ Wege.*

(„Global“ optimal – dh. α kann nicht *für alle* G durch $\alpha - \epsilon$ ersetzt werden – aber nicht „lokal optimal“, dh. nicht für *jedes* G optimal). Beispiele?

Korollar 1.5.2. (Dilworth 1950)
In jeder endlichen Halbordnung $(P, \leqslant)$ ist die geringste Anzahl von Ketten, die ganz P überdecken, gleich der größten Mächtigkeit einer Antikette in P.

(„Lokal“ optimal, dh. für *jedes* P optimal.)

Satz 1.5.1. (Gallai & Milgram 1960)
Jeder gerichtete Graph G enthält eine Wegüberdeckung $\mathcal{P}$ und eine Menge $\{v_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ unabhängiger Ecken mit $v_P \in P$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

Beweis. Wir zeigen mit Induktion nach $|G|$, daß jede Wegüberdeckung $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_m\}$ von G, bei der $\mathrm{ter}(\mathcal{P})$ minimal ist, ein unabhängiges Repräsentantensystem $\{v_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ enthält. Für jedes i bezeichne v_i die letzte Ecke von P_i.

Ist $\mathrm{ter}(\mathcal{P}) = \{v_1, \dots, v_m\}$ unabhängig, so ist nichts weiter zu zeigen. Nehmen wir also an, daß G eine Kante von v_2 nach v_1 enthält. Dann ist auch $P_2 v_2 v_1$ ein Weg, und so folgt aus der Minimalität von $\mathrm{ter}(\mathcal{P})$, daß v_1 nicht die einzige Ecke von P_1 ist; es sei v die letzte Ecke von $P_1 \mathring{v}_1$. Damit ist $\mathcal{P}' := \{P_1 v, P_2, \dots, P_m\}$ eine Wegüberdeckung von $G' := G - v_1$. Da jedes unabhängige Repräsentantensystem von $\mathcal{P}'$ in G' auch eines von $\mathcal{P}$ in G ist, bleibt nur noch zu prüfen, daß wir auf $\mathcal{P}'$ die Induktionsannahme anwenden dürfen. Dazu müssen wir zeigen, daß $\mathrm{ter}(\mathcal{P}') = \{v, v_2, \dots, v_m\}$ minimal ist unter den Mengen letzter Ecken von Wegüberdeckungen von G'.

Nehmen wir also an, G' habe eine Wegüberdeckung $\mathcal{P}''$ mit $\mathrm{ter}(\mathcal{P}'') \subsetneqq \mathrm{ter}(\mathcal{P}')$. Endet ein Weg $P \in \mathcal{P}''$ in v, so ersetzen wir P in $\mathcal{P}''$ durch $P v v_1$ und erhalten so eine Wegüberdeckung von G, deren Menge letzter Ecken eine echte Teilmenge von $\mathrm{ter}(\mathcal{P})$ ist, im Widerspruch zur Wahl von $\mathcal{P}$. Endet ein Weg $P \in \mathcal{P}''$ in v_2 (aber keiner in v), so ersetzen wir P in $\mathcal{P}''$ durch $P v_2 v_1$ und erhalten erneut einen Widerspruch zur Minimalität von $\mathrm{ter}(\mathcal{P})$. Es gilt also $\mathrm{ter}(\mathcal{P}'') \subseteq \{v_3, \dots, v_m\}$. Damit bildet aber $\mathcal{P}''$ zusammen mit dem trivialen Weg $\{v_1\}$ eine Wegüberdeckung von G, die der Minimalität von $\mathrm{ter}(\mathcal{P})$ widerspricht. $\square$

2. Zusammenhang

Proposition 2.1.1. *Man erhält induktiv genau alle 2-zh'en Graphen, indem man von einem Kreis ausgehend jeweils zu einem bereits konstruierten Graphen G einen G-Weg hinzufügt.*

Wie kann man zh'e Graphen in 2-zh'e zerlegen?

<u>Def</u>: Blöcke

Proposition 2.1.4. *Der Block-Graph eines zusammenhängenden Graphen ist ein Baum.*

Lemma 2.2.1. *Ist G 3-zusammenhängend und $|G| > 4$, so hat G eine Kante e mit der Eigenschaft, daß G/e wiederum 3-zusammenhängend ist.*

Beweis. Angenommen, es gibt keine solche Kante e. Für jede Kante $xy \in G$ enthält dann G/xy eine trennende Menge S von höchstens 2 Ecken. Wegen $\kappa(G) \geqslant 3$ liegt die kontrahierte Ecke v_{xy} (siehe Kapitel 0.7) in S und es gilt $|S| = 2$, d.h. G hat eine Ecke $z \notin \{x, y\}$, so daß $\{v_{xy}, z\}$ den Graphen G/xy trennt. Je zwei durch $\{v_{xy}, z\}$ in G/xy getrennte Ecken sind dann in G durch $T := \{x, y, z\}$ getrennt. Da keine echte Teilmenge von T den Graphen G trennt, hat jede Ecke aus T in jeder Komponente C von $G - T$ einen Nachbarn.

Wir wählen nun die Kante xy, die Ecke z und die Komponente C so, daß $|C|$ minimal ist. Es sei v ein Nachbar von z in C (Abb. 2.2.1). Da nach Annahme auch G/zv nicht 3-zusammenhängend ist, gibt es wiederum eine Ecke w mit der Eigenschaft, daß $\{z, v, w\}$ den Graphen G trennt, und wie oben hat jede Ecke in $\{z, v, w\}$ einen Nachbarn in jeder Komponente von $G - \{z, v, w\}$.

Da x und y benachbart sind, hat $G - \{z, v, w\}$ eine Komponente D mit $D \cap \{x, y\} = \emptyset$. Jeder Nachbar von v in D ist dann in C (wegen $v \in C$), d.h. $D \cap C \neq \emptyset$ und somit $D \subsetneqq C$ nach Wahl von D. Dies widerspricht der Wahl von xy, z und C. $\square$

Satz 2.2.2. (Tutte 1961)
Ein Graph G ist genau dann 3-zusammenhängend, wenn eine Folge $G_0, \ldots, G_n$ von Graphen existiert mit den folgenden zwei Eigenschaften:

(i) $G_0 = K^4$ *und* $G_n = G$;

(ii) *Für jedes* $i < n$ *enthält* G_{i+1} *eine Kante* xy *mit* $d(x), d(y) \geqslant 3$ *und* $G_i = G_{i+1}/xy$.

Überdies sind solche Graphen $G_0, \ldots, G_n$ stets alle 3-zusammenhängend.

Satz 2.3.1. (Menger 1927)
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A, B \subseteq V$. Die kleinste Mächtigkeit einer A von B in G trennenden Eckenmenge ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge disjunkter A–B-Wege in G.

Es sei $k = k(G, A, B)$ die kleinste Mächtigkeit einer A von B in G trennenden Eckenmenge. Wir müssen k Wege finden.

Erster Beweis. Induktion nach $\|G\|$. Anfang $\|G\| = 0$ ist ok.

1. Kontrahiere $e = xy$ zu $v_e \quad \rightarrow \quad G/e$. (Definiere A, B in G/e !)

$\exists\, k$ Wege in $G/e \quad \rightarrow \quad \exists\, k$ Wege in $G \quad \rightarrow \quad$ fertig.

$\nexists\, k$ Wege in $G/e \underset{\text{Ind.annahme}}{\longrightarrow} \exists\ (< k)$-Trenner $Y \ni v_e$ in G/e.

$\Rightarrow \quad \exists\ k$-Trenner $X \supseteq \{x, y\}$ in G.

2. Lösche $e = xy \quad \rightarrow \quad G - e$.

Finde nach Ind.annahme je k Wege $A \rightarrow X$ und $X \rightarrow B$ in $G - e$. Diese liegen sogar in G.

Füge sie zu k Wegen $A \rightarrow B$ in G zusammen. Prüfe Disjunktheit.

□

$k = k\,(G, A, B)$ die kleinste Mächtigkeit eines A–B-Trenners.

Erweiterung $\mathcal{Q}$ einer Menge $\mathcal{P}$ disjunkter A–B-Wege:
$V\big(\bigcup\mathcal{Q}\big) \cap A \supsetneqq V\big(\bigcup\mathcal{P}\big) \cap A$ und $V\big(\bigcup\mathcal{Q}\big) \cap B \supsetneqq V\big(\bigcup\mathcal{P}\big) \cap B$.

Zweiter Beweis. Wir zeigen die folgende stärkere Aussage:

> *Zu jeder Menge $\mathcal{P}$ von $< k$ disjunkten A–B-Wegen gibt es in G eine Erweiterung aus $|\mathcal{P}| + 1$ Wegen.*

Wir beweisen dies für feste G und A mit Induktion nach $|\bigcup\mathcal{P}|$. Dazu betrachten wir einen A–B-Weg R, der die (weniger als k) Ecken aus B vermeidet, die auf einem Weg aus $\mathcal{P}$ liegen.

Vermeidet R alle Wege aus $\mathcal{P}$, so ist $\mathcal{P} \cup \{R\}$ eine Erweiterung von $\mathcal{P}$. (Dieser Fall tritt für $\mathcal{P} = \emptyset$ ein, d.h. der Induktionsanfang steht.) Anderenfalls sei x die letzte Ecke von R, die auf irgendeinem Weg $P \in \mathcal{P}$ liegt. Es sei

$$B' := B \cup V(xP \cup xR) \quad \text{und} \quad \mathcal{P}' := \big(\mathcal{P} \setminus \{P\}\big) \cup \{Px\}\,.$$

Dann ist $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$ und $k(G, A, B') \geqslant k(G, A, B)$, aber $|\bigcup\mathcal{P}'| < |\bigcup\mathcal{P}|$. Nach Induktionsannahme existiert eine Erweiterung $\mathcal{Q}'$ von $\mathcal{P}'$ aus $|\mathcal{P}'| + 1$ Wegen von A nach B'.

In $\mathcal{Q}'$ existiert dann ein Weg Q, der in x endet, und genau ein Weg Q', dessen letzte Ecke y nicht unter den Endecken der Wege aus $\mathcal{P}'$ ist. Gilt $y \notin xP$, so erhalten wir die gewünschte Erweiterung $\mathcal{Q}$ von $\mathcal{P}$ aus $\mathcal{Q}'$, indem wir Q durch xP verlängern und gegebenenfalls (wenn y nicht bereits in B liegt) Q' durch yR verlängern. Anderenfalls ist $y \in \mathring{x}P$, und wir erhalten $\mathcal{Q}$ aus $\mathcal{Q}'$, indem wir Q um xR und Q' um yP verlängern. $\square$

Korollar 2.3.4. *Ist $B \subseteq V$ und $a \in V \setminus B$, so ist die kleinste Mächtigkeit einer a von B in G trennenden Eckenmenge $X \subseteq V \setminus \{a\}$ gleich der größten Mächtigkeit eines a–B-Fächers in G.*

Beweis. Wende Menger auf $G - a$ an mit $A := N_G(a)$. $\square$

Korollar 2.3.5. *Es seien a, b zwei verschiedene Ecken von G.*

(i) *Sind a und b nicht benachbart, so ist die kleinste Mächtigkeit einer a von b in G trennenden Eckenmenge $X \subseteq V \setminus \{a, b\}$ gleich der größten Mächtigkeit einer Menge kreuzungsfreier a–b-Wege in G.*

(ii) *Die kleinste Mächtigkeit einer a von b in G trennenden Kantenmenge $X \subseteq E$ ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge kantendisjunkter a–b-Wege in G.*

Beweis. (i) Wende Menger auf $G - \{a, b\}$ an mit $A := N_G(a)$ und $B := N_G(b)$.

(ii) Wende Menger auf den Kantengraphen von G an, mit $A := E(a)$ und $B := E(b)$. $\square$

Satz 2.3.6. (Globale Version des Satzes von Menger)

(i) *G ist genau dann k-zusammenhängend, wenn G zwischen je zwei Ecken k kreuzungsfreie Wege enthält.*

(ii) *G ist genau dann k-kantenzusammenhängend, wenn G zwischen je zwei Ecken k kantendisjunkte Wege enthält.*

Beweis. (i) $\Leftarrow$ ist klar. $\Rightarrow$: Tafel $\square$

Satz 2.5.2. (Jung 1970; Larman & Mani 1970)
Es existiert eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ jeder $f(k)$-zusammenhängende Graph k-verbunden ist.

Satz 2.5.1. (Mader 1967)
Es existiert eine Funktion $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens $h(r)$ einen TK^r als Teilgraphen enthält.

Beweis. Für $r \leqslant 2$ leistet $h(r) = 1$ das Gewünschte; im folgenden sei $r \geqslant 3$. Wir zeigen mit Induktion nach $m = r, \dots, \binom{r}{2}$, daß jeder Graph G mit Durchschnittsgrad $d(G) \geqslant 2^m$ einen TX mit $|X| = r$ und $\|X\| = m$ enthält; für $m = \binom{r}{2}$ impliziert dies unsere Behauptung mit $h(r) = 2^{\binom{r}{2}}$.

Ist $m = r$, so enthält G nach den Propositionen 0.2.2 und 0.3.1 einen Kreis der Länge mindestens $\varepsilon(G) + 1 \geqslant 2^{r-1} + 1 \geqslant r + 1$. Die Behauptung gilt dann mit $X = C^r$.

Es sei nun $r < m \leqslant \binom{r}{2}$, und die Behauptung sei wahr für kleinere m. Es sei G mit $d(G) \geqslant 2^m$ gegeben, also $\varepsilon(G) \geqslant 2^{m-1}$. Da G eine Komponente C mit $\varepsilon(C) \geqslant \varepsilon(G)$ enthält, dürfen wir G als zusammenhängend annehmen. Wir betrachten eine in G zusammenhängende Eckenmenge $U \subseteq V(G)$; dieses U sei maximal gewählt mit $\varepsilon(G/U) \geqslant 2^{m-1}$. (Solch eine Menge U existiert, da G selbst die Form G/U hat mit $|U| = 1$.) Da G nach Annahme zusammenhängend ist, gilt $N(U) \neq \emptyset$.

Es sei $H := G[N(U)]$. Hätte H eine Ecke v vom Grad $d_H(v) < 2^{m-1}$, so wäre für $U' := U \cup \{v\}$ auch $\varepsilon(G/U') \geqslant 2^{m-1}$ (im Widerspruch zur Maximalität von U): beachte, daß bei der Kontraktion der Kante vv_U in G/U außer ihr selbst nur $d_H(v)$ Kanten von H verlorengehen, insgesamt also höchstens 2^{m-1} Kanten und genau eine Ecke. Also gilt $d(H) \geqslant \delta(H) \geqslant 2^{m-1}$. Nach Induktionsannahme enthält H einen TY mit $|Y| = r$ und $\|Y\| = m - 1$. Es seien x, y zwei in Y nicht benachbarte Verzweigungsecken dieses TY. Wegen $x, y \in V(H) = N(U)$ enthält G einen x–y-Weg, dessen Inneres ganz in U liegt. Zusammen mit dem TY aus H bildet dieser Weg einen TX mit $|X| = |Y| = r$ und $\|X\| = m$. $\square$

3. Graphen in der Ebene

Ebener Graph: (i) $V \subseteq \mathbb{R}^2$;

(ii) jede Kante ist ein Polygonzug zwischen zwei Ecken;

(iii) verschiedene Kanten haben verschiedene Mengen von Endpunkten;

(iv) das Innere einer jeden Kante enthält weder eine Ecke noch einen Punkt einer anderen Kante.

Lemma 3.2.1. *Ist G ein ebener Graph, $f \in F(G)$ und $H \subseteq G$, so gilt:*

(i) *f ist in einem Gebiet f' von H enthalten.*

(ii) *Ist $G[f] \subseteq H$, so gilt $f' = f$.*

Lemma 3.2.2. *Es sei G ein ebener Graph und $e \in G$ eine Kante.*

(i) *Für jedes Gebiet f von G gilt entweder $e \subseteq G[f]$ oder $\mathring{e} \cap G[f] = \emptyset$.*

(ii) *Die Kante e liegt auf dem Rand mindestens eines und höchstens zweier Gebiete von G.*

(iii) *Liegt e auf einem Kreis $C \subseteq G$, so liegt e auf dem Rand genau zweier Gebiete von G, und diese sind in verschiedenen Gebieten von C enthalten. Liegt e auf keinem Kreis, so liegt e auf dem Rand nur eines Gebietes.*

Beweis. Wir beweisen alle drei Aussagen zusammen. Dazu zeigen wir zunächst, daß ein spezieller Punkt x_0 aus $\mathring{e}$ auf dem Rand genau eines oder genau zweier Gebiete von G liegt, und zwar genau dann auf dem Rand zweier Gebiete, wenn e auf einem Kreis liegt (der dann die beiden Gebiete trennt). Wir zeigen dann weiter, daß auch jeder andere Punkt aus $\mathring{e}$ auf dem Rand genau dieser ein oder zwei Gebiete liegt. Da jede Umgebung eines Endpunktes von e auch Umgebung eines inneren Punktes von e ist, liegen die Endpunkte von e dann auch auf dem Rand dieser Gebiete.

Korollar 3.2.3. *Für jedes Gebiet f von G ist $G[f]$ die Punktmenge eines Teilgraphen von G.*

Lemma 3.2.4. *Ein ebener Wald hat genau ein Gebiet.*

Lemma 3.2.5. *Hat ein ebener Graph verschiedene Gebiete mit dem gleichen Rand, so ist der Graph ein Kreis.*

Beweis. Es sei G ein ebener Graph, und $H \subseteq G$ der Rand zwei verschiedener Gebiete f_1, f_2 von G. Da f_1 und f_2 auch Gebiete von H sind, folgt aus Lemma 3.2.4, daß H einen Kreis C enthält: sonst wäre $f_1 = f_2$. Nach Lemma 3.2.2 (iii) sind f_1 und f_2 in verschiedenen Gebieten von C enthalten. Da f_1 und f_2 beide ganz H zum Rand haben, folgt hieraus $H = C$: jede weitere Ecke oder Kante von H läge in einem der Gebiete von C und damit nicht auf dem Rand des anderen. Damit sind f_1 und f_2 verschiedene Gebiete von C. Da C nach Satz 3.1.1 nur zwei Gebiete hat, folgt $f_1 \cup C \cup f_2 = \mathbb{R}^2$ und somit $G = C$. □

Proposition 3.2.6. *In einem 2-zusammenhängenden ebenen Graphen ist jedes Gebiet durch einen Kreis berandet.*

Proposition 3.2.7. *Die Gebietsränder eines 3-zusammenhängenden ebenen Graphen sind genau seine nicht trennenden induzierten Kreise.*

Proposition 3.2.8. *Ein ebener Graph der Ordnung $\geqslant 3$ ist genau dann maximal eben, wenn er ein ebener Dreiecksgraph ist.*

Satz 3.2.9. (Eulersche Polyederformel für die Ebene)
Ist G ein zusammenhängender ebener Graph mit $n \geqslant 1$ Ecken, m Kanten und ℓ Gebieten, so gilt

$$n - m + \ell = 2\,.$$

Beweis. Zu gegebenem n wenden wir Induktion nach m an. Für $m \leqslant n-1$ ist G ein Baum und $m = n-1$ (warum?); die Behauptung folgt dann aus Lemma 3.2.4.

Es sei also $m \geqslant n$. Dann hat G eine Kante e, die auf einem Kreis in G liegt; es sei $G' := G - e$. Nach Lemma 3.2.2 (iii) liegt e auf dem Rand genau zweier Gebiete f_1, f_2 von G, und da je zwei Punkte von $\mathring{e}$ in $\mathbb{R}^2 \smallsetminus G'$ äquivalent sind, liegt $\mathring{e}$ in einem Gebiet f_e von G'. Wir zeigen

$$F(G) \smallsetminus \{f_1, f_2\} = F(G') \smallsetminus \{f_e\}\,; \qquad (*)$$

damit hat G' dann zahlenmäßig sowohl genau ein Gebiet als auch eine Kante weniger als G, und die Behauptung des Satzes folgt aus der Induktionsannahme für G'.

Zum Beweis von $(*)$ sei zunächst $f \in F(G) \smallsetminus \{f_1, f_2\}$ gegeben. Nach Lemma 3.2.2 (i) gilt $G[f] \subseteq G \smallsetminus \mathring{e} = G'$, und daher $f \in F(G')$ nach Lemma 3.2.1 (ii). Da offenbar $f \neq f_e$ ist, folgt die erste Inklusion in $(*)$.

Umgekehrt sei nun ein Gebiet $f' \in F(G') \smallsetminus \{f_e\}$ gegeben. Offenbar gilt $f' \neq f_1, f_2$ und $f' \cap \mathring{e} = \emptyset$. Je zwei Punkte aus f' liegen somit in $\mathbb{R}^2 \smallsetminus G$ und sind dort äquivalent. Dann hat G ein Gebiet $f \supseteq f'$, welches nach Lemma 3.2.1 (i) seinerseits in einem Gebiet f'' von G' enthalten ist. Es folgt $f' \subseteq f \subseteq f''$, und damit $f' = f = f''$. $\square$

Korollar 3.2.10. *Ein ebener Graph mit $n \geqslant 3$ Ecken hat höchstens $3n-6$ Kanten. Jeder ebene Dreiecksgraph mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.*

Beweis. Jeder ebene Dreiecksgraph erfüllt außer der Eulerformel $n-m+\ell=2$ noch die Gleichung $2m=3\ell$. Zusammen ergeben die beiden Gleichungen $m=3n-6$. Die erste Aussage folgt. □

Korollar 3.2.11. *Kein ebener Graph enthält einen K^5 oder $K_{3,3}$ als topologischen Minor.*

Proposition 3.4.1.

(i) *Jeder maximal ebene Graph ist maximal plättbar.*

(ii) *Ein plättbarer Graph mit $n \geqslant 3$ Ecken ist genau dann maximal plättbar, wenn er $3n-6$ Kanten hat.*

Beweis. G maximal eben $\Rightarrow$ G ebener Dreiecksgraph. □

Satz 3.4.6. (Kuratowski 1930; Wagner 1937)
Die folgenden Aussagen sind äquivalent für Graphen G:

(i) *G ist plättbar;*

(ii) *G enthält weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als Minor;*

(iii) *G enthält weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als topologischen Minor.*

Lemma 3.4.2. *Ein Graph enthält genau dann einen K^5 oder $K_{3,3}$ als Minor, wenn er einen K^5 oder $K_{3,3}$ als topologischen Minor enthält.*

Beweis. $G \supseteq MK^5 \Rightarrow (G \supseteq MK_{3,3} \vee G \supseteq TK^5)$. □

Lemma 3.4.3. (Kuratowski für 3-zusammenhängende G)
$\kappa(G) \geqslant 3,\ G \not\succcurlyeq K^5, K_{3,3} \ \Rightarrow\ G$ *plättbar.*

Kuratowski für $\kappa \leqslant 2$

Beweisidee: Wir zeigen für $|G| \geqslant 4$

$$G \text{ kantenmaximal ohne } TK^5, TK_{3,3} \;\Rightarrow\; \kappa(G) \geqslant 3 \qquad (*)$$

($\Rightarrow$ G plättbar nach Lemma 3.4.3) mit Induktion nach $|G|$.

Beim Induktionsschritt hilft (für $\mathcal{X} := \{K^5, K_{3,3}\}$):

Lemma 3.4.4. *Es sei $\mathcal{X}$ eine Menge 3-zusammenhängender Graphen, G ein Graph mit $\kappa(G) \leqslant 2$, sowie G_1, G_2 zwei echte Untergraphen von G mit $G = G_1 \cup G_2$ und $|G_1 \cap G_2| = \kappa(G)$. Ist G kantenmaximal ohne topologischen Minor in $\mathcal{X}$, dann sind es auch G_1 und G_2, und es gilt $G_1 \cap G_2 = K^2$.*

Beweis von $(*)$: Ist $\kappa(G) \leqslant 2$, wähle G_1, G_2 wie in Lemma 3.4.4. Nach Induktionsannahme sind G_1 und G_2 plättbar. Für $i = 1, 2$ wähle jeweils eine Zeichnung von G_i, sowie darin ein Gebiet f_i mit $xy \in G_i[f_i]$ und eine Ecke $z_i \in G_i[f_i] - \{x, y\}$. Dann enthält $G + z_1z_2$ einen TK mit $K \in \{K^5, K_{3,3}\}$; wo liegen seine Verzweigungsecken?

Liegen sie im gleichen G_i, so gilt auch $G_i + xz_i \supseteq TK$ oder $G_i + yz_i \supseteq TK$ (Wid., da plättbar nach Wahl von z_i).

Liegen sie verteilt, so ist $K = K_{3,3}$ und alle bis auf eine Verzweigungsecke (=: v) liegen oBdA in G_1: sonst müßte es vier kreuzungsfreie $(G_1 - G_2)$–$(G_2 - G_1)$-Wege in $G + z_1z_2$ geben (was es nicht gibt).

Bettet man v in f_1 ein, so erhält man einen $TK_{3,3}$ im erweiterten aber immer noch ebenen G_1 (Wid). $\square$

Korollar 3.4.7. *Jeder maximal plättbare Graph mit mindestens vier Ecken ist 3-zusammenhängend.*

4. Färbungen

Satz 4.1.1. (Vierfarbensatz)
Jeder ebene Graph hat eine Eckenfärbung mit höchstens 4 Farben.

Proposition 4.1.2. (Fünffarbensatz)
Jeder ebene Graph ist 5-färbbar.

Satz 4.1.3. (Grötzsch 1959)
Jeder ebene Graph, der kein Dreieck enthält, ist 3-färbbar.

Proposition 4.2.1. *Für jeden Graphen G mit m Kanten gilt*

$$\chi(G) \leqslant \tfrac{1}{2} + \sqrt{2m + \tfrac{1}{4}}\,.$$

Proposition 4.2.2. *Für jeden Graphen G gilt*

$$\chi(G) \leqslant 1 + \max\{\delta(H) \mid H \subseteq G\}\,.$$

Korollar 4.2.3. *Jeder Graph G hat einen Untergraphen vom Minimalgrad $\geqslant \chi(G) - 1$.* □

Satz 4.2.4. (Brooks 1941)
Es sei G ein zusammenhängender Graph. Ist G weder vollständig noch ein Kreis ungerader Länge, so gilt $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

Beweis. Induktion nach $|G|$. OBdA $\Delta := \Delta(G) \geqslant 3$.

Lösche eine Ecke v; nach Induktionsannahme hat $H := G - v$ eine Δ-Färbungen $c\colon V(H) \to \{1, \dots, \Delta\}$. Ist $\chi(G) > \Delta$, so folgt:

$$\forall\, c\colon\ c(N(v)) = \{1, \dots, \Delta\}\,, \tag{1}$$

$\forall\, c$: *Die Ecken v_i und v_j gehören stets zur gleichen Komponente $C_{i,j}$ von $H_{i,j}$.* (2)

$$\forall\, c\colon\ C_{i,j} \text{ ist stets ein } v_i\text{–}v_j\text{-Weg.} \tag{3}$$

$\forall\, c$: *Für verschiedene i, j, k gilt stets $C_{i,j} \cap C_{i,k} = v_i$.* (4)

Geeignetes Umfärben ergibt jetzt einen Widerspruch. □

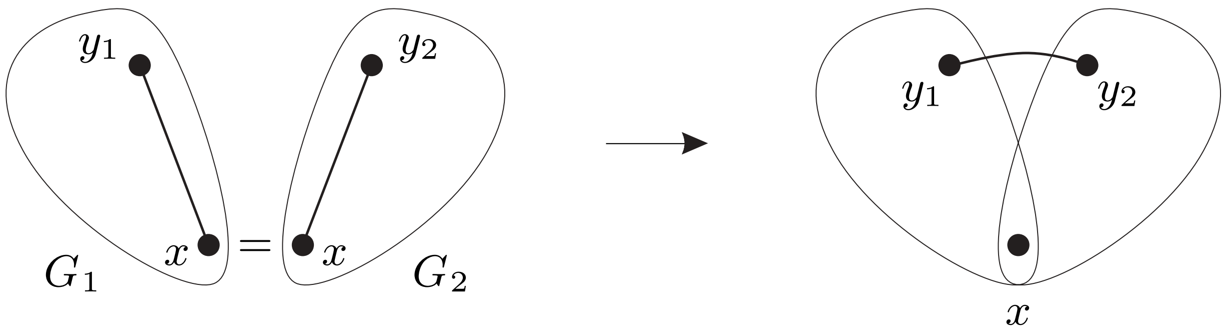
Satz 4.2.5. (Erdős 1959)
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein Graph G mit Taillenweite $g(G) > k$ und chromatischer Zahl $\chi(G) > k$.

Hajós-Konstruktion:

(i) Jeder K^k ist k-konstruierbar.

(ii) Ist G k-konstruierbar, und sind $x, y \in V(G)$ nicht benachbart, so ist $(G + xy)/xy$ ebenfalls k-konstruierbar.

(iii) Sind G_1 und G_2 zwei k-konstruierbare Graphen mit $G_1 \cap G_2 = \{x\}$, $xy_1 \in E(G_1)$ und $xy_2 \in E(G_2)$ für drei Ecken x, y_1, y_2, so ist $(G_1 \cup G_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2$ ebenfalls k-konstruierbar (Abb. 4.2.2).



Satz 4.2.6. (Hajós 1961)
Für $k \in \mathbb{N}$ und einen Graphen G gilt genau dann $\chi(G) \geqslant k$, wenn G einen k-konstruierbaren Teilgraphen hat.

Beweis. Es sei G ein Graph mit $\chi(G) \geqslant k$; wir zeigen, daß G einen k-konstruierbaren Teilgraphen hat. Angenommen nicht; mache G kantenmaximal ohne k-konstruierbaren Teilgraphen.

$\Rightarrow$ G ist nicht vollständig multipartit.

$\Rightarrow$ Nichtbenachbartheit ist keine Äquivalenzrelation auf $V(G)$.

$\Rightarrow$ $\exists$ Ecken y_1, x, y_2 mit $y_1x, xy_2 \notin E(G)$ aber $y_1y_2 \in E(G)$.

Nach Induktion enthält $G + xy_i$ ein k-konstruierbares H_i $(i = 1, 2)$.

Verdopple $V(H_1 \cap H_2 - x)$ $\rightarrow$ auf H_1, H_2' ist (iii) anwendbar.

Identifiziere Paare $H_1 \ni v, v' \in H_2'$ nach (ii) zu $H \subseteq G$. $\square$

Proposition 4.3.1. (König 1916)
Für jeden bipartiten Graphen G gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Satz 4.3.2. (Vizing 1964)
Für jeden Graphen G gilt

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1\,.$$

Beweis. Wir nehmen an, G habe keine Färbung. Dann gilt:

$$\begin{array}{l}\textit{Ist } xy \in E \textit{ und eine Färbung von } G - xy \textit{ gegeben,}\\ \textit{in der die Farbe } \alpha \textit{ an } x \textit{ und die Farbe } \beta \textit{ an } y \textit{ fehlt,}\\ \textit{so endet der } \alpha/\beta\textit{-Weg aus } y \textit{ in } x.\end{array} \qquad (1)$$

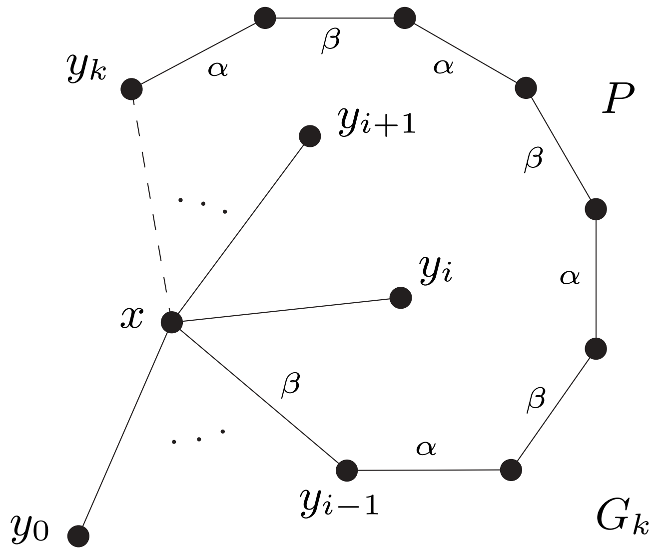
Es sei $xy_0 \in G$ eine Kante; nach Induktionsannahme hat $G_0 := G - xy_0$ eine Färbung c_0. Es sei α eine darin an x fehlende Farbe. Weiter sei $y_0, y_1, \ldots, y_k$ eine maximale mit y_0 beginnende Folge verschiedener Nachbarn von x in G, so daß jeweils $c_0(xy_i)$ an y_{i-1} fehlt ($i = 1, \ldots, k$). Auf jedem der Graphen $G_i := G - xy_i$ definieren wir eine Färbung c_i durch

$$c_i(e) := \begin{cases} c_0(xy_{j+1}) & \text{für } e = xy_j \text{ mit } j \in \{0, \ldots, i-1\} \\ c_0(e) & \text{sonst;} \end{cases}$$

beachte, daß in jeder dieser Färbungen die gleichen Farben an x fehlen wie in c_0.

Es sei nun β eine in c_0 an y_k fehlende Farbe. Natürlich fehlt β dann auch in c_k an y_k. Fehlte β auch an x, so könnten wir c_k zu einer Färbung von ganz G ergänzen, indem wir xy_k mit β färbten. Die Ecke x ist also stets mit einer β-Kante inzident. Wegen der Maximalität von k gibt es daher ein $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ mit

$$c_0(xy_i) = \beta\,. \qquad (2)$$



Es sei P der α/β-Weg aus y_k in G_k (bezüglich c_k; Abb. 4.3.1). Nach (1) endet P in x – und zwar mit einer β-Kante, da α an x fehlt. Wegen $\beta = c_0(xy_i) = c_k(xy_{i-1})$ ist dies die Kante xy_{i-1}. Nun fehlt aber β nach (2) und Wahl von y_i an y_{i-1}, in c_0 und somit auch in c_{i-1}; es sei P' der α/β-Weg aus y_{i-1} in G_{i-1} (bezüglich c_{i-1}). Da P' eindeutig bestimmt ist, durchläuft P' zuerst $y_{i-1}Py_k$; beachte, daß die Kanten von $P\mathring{x}$ in c_{i-1} genauso gefärbt sind wie in c_k. In c_0, und daher auch in c_{i-1}, ist y_k jedoch mit keiner β-Kante inzident (nach Wahl von β). Somit endet P' in y_k, im Widerspruch zu (1). $\square$

5. Flüsse

$\vec{E} := \big\{(x,y) \mid \{x,y\} \in E\big\}$ *Richtungen* der Kanten in $E = E(G)$

$c\colon \vec{E} \to \mathbb{N}$ (ganzzahlige) „Kapazitätsfunktion“

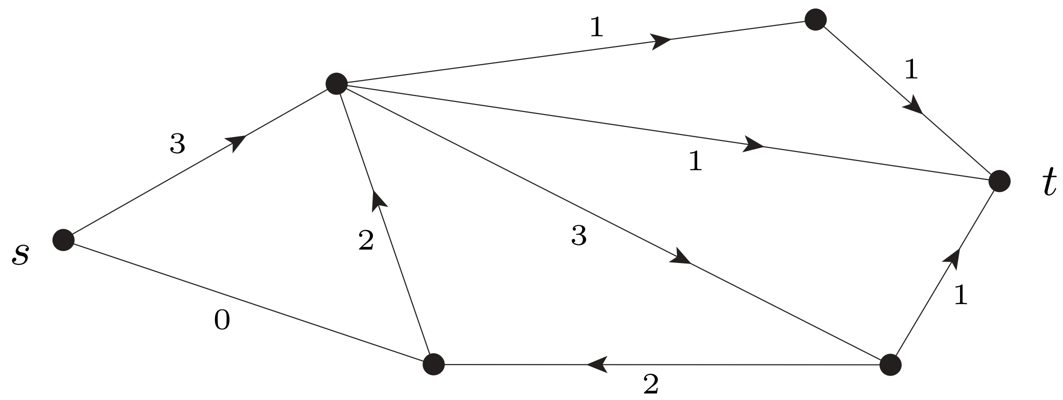
$$f(X,Y) := \sum \{f(\vec{e}) \mid x \in X;\ y \in Y;\ \vec{e} = (x,y) \in \vec{E}\}$$

Definition. $f\colon \vec{E} \to \mathbb{R}$ heißt *Fluß in* N, wenn

(F1) $f(x,y) = -f(y,x)$ für alle $(x,y) \in \vec{E}$ mit $x \neq y$;

(F2′) $f(v,V) = 0$ für alle $v \in V \setminus \{s,t\}$;

(F3) $f(\vec{e}) \leqslant c(\vec{e})$ für alle $\vec{e} \in \vec{E}$.



Proposition 5.2.1.
Für jeden Schnitt $(S, \overline{S})$ *in* N *gilt* $f(S,\overline{S}) = f(s,V)$.

Beweis.

$$\begin{aligned} f(S,\overline{S}) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &\underset{(F1)}{=} f(s,V) + \sum_{v \in S \setminus \{s\}} f(v,V) \ - \ 0 \\ &\underset{(F2')}{=} f(s,V)\,. \end{aligned}$$

$\square$

$f(S,\overline{S}) =: |f|$ heißt *Stärke* von f.

Satz 5.2.2. (Ford & Fulkerson 1956)
In jedem Netzwerk ist die größte Stärke eines Flusses gleich der kleinsten Kapazität eines Schnittes.

Beweis. Es reicht, einen Fluß f und einen Schnitt $(S, \overline{S})$ zu finden mit $|f| = c(S, \overline{S})$.

Beginnend mit $f_0 = 0$, definiere ganzzahlige Flüsse mit

$$|f_0| < |f_1| < |f_2| < \dots$$

Für den letzten Fluß $f := f_n$ betrachte die Menge S der von s durch „nicht ausgelastete“ Kanten erreichbaren Ecken. Dann ist $(S, \overline{S})$ ein Schnitt mit

$$f(\vec{e}) = c(\vec{e})$$

für alle $\vec{e} = (x, y)$ mit $x \in S$ und $y \in \overline{S}$, nach Prop. 5.2.1 also

$$|f| = f(S, \overline{S}) = c(S, \overline{S})$$

wie gewünscht.

Korollar 5.2.3. *In jedem Netzwerk (mit ganzzahliger Kapazitätsfunktion) gibt es einen Fluß maximaler Stärke, der ganzzahlig ist.*

Korollar.

(i) *a–b Kantenversion von Menger;*

(ii) *a–b Eckenversion von Menger.*

Die Hadwiger-Vermutung

1. Wagners Versuch (1937), die Vierfarbenvermutung zu beweisen:

$$G \not\succcurlyeq K^5 \;\;\Rightarrow\;\; \text{Struktur} \;\;\Rightarrow\;\; \chi(G) \leqslant 4$$

2. Hadwigers Vermutung (1943), allgemeiner:

$$\boldsymbol{\forall\, r\; \forall\, G\colon \quad \chi(G) \geqslant r \;\;\Rightarrow\;\; G \succcurlyeq K^r.}$$

Einfach für $r \leqslant 3$.

Beweis für $r = 4$ durch Struktursatz für die Graphen ohne TK^4:

Satz 6.3.1. (Wagner 1960)
Ein Graph mit mindestens drei Ecken ist genau dann kantenmaximal ohne K^4-Minor, wenn er rekursiv aus Dreiecken durch Zusammenkleben entlang von K^2s konstruiert werden kann.

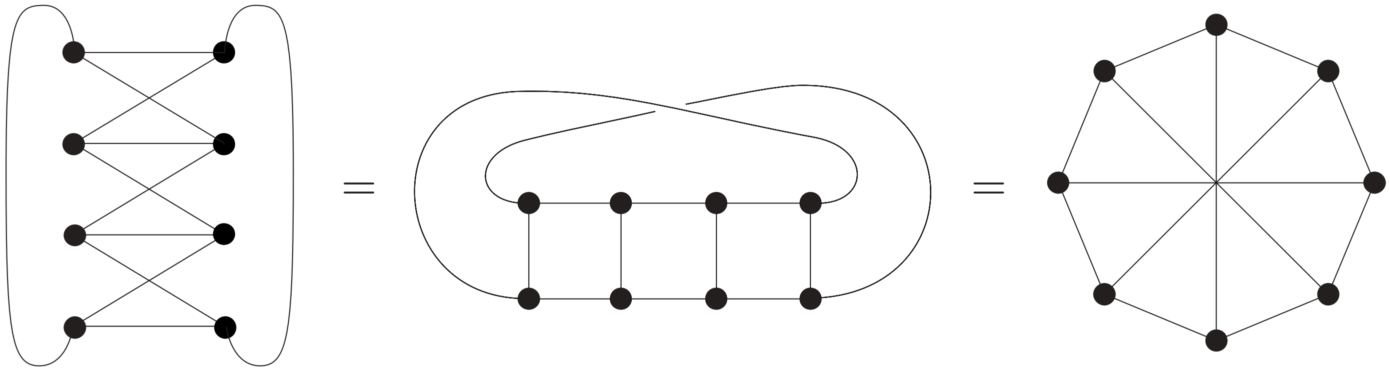
Beweis. ($\Rightarrow$) Wegen $\kappa(G) \geqslant 3 \Rightarrow G \succcurlyeq K^4$ gilt $\kappa \leqslant 2$.
Setze $\mathcal{X} := \{K^4\}$ und verwende Induktion mit

> **Lemma 3.4.4.** *Es sei $\mathcal{X}$ eine Menge 3-zusammenhängender Graphen, G ein Graph mit $\kappa(G) \leqslant 2$, sowie G_1, G_2 zwei echte Untergraphen von G mit $G = G_1 \cup G_2$ und $|G_1 \cap G_2| = \kappa(G)$. Ist G kantenmaximal ohne topologischen Minor in $\mathcal{X}$, dann sind es auch G_1 und G_2, und es gilt $G_1 \cap G_2 = K^2$.*

Korollar 6.3.3. *Die Hadwiger-Vermutung ist wahr für $r = 4$.*

„Analog" für die Graphen ohne K^5-Minor:

Satz 6.3.4. (Wagner 1937)
Jeder mindestens 4-eckige kantenmaximale Graph ohne K^5-Minor ist rekursiv durch Zusammenkleben entlang von Dreiecken und K^2s konstruierbar aus ebenen Dreiecksgraphen und Exemplaren des Graphen W (Abb. 6.3.1).



Korollar. (Wagner 1937 + Vierfarbensatz)
Die Hadwiger-Vermutung ist wahr für $r = 5$.

Satz. (Robertson, Seymour, Thomas 1993 + Vierfarbensatz)
Die Hadwiger-Vermutung ist wahr für $r = 6$.

Korollar 6.3.2. *Jeder kantenmaximale Graph G ohne K^4-Minor hat $2\,|G| - 3$ Kanten. Insbesondere ist jeder kantenmaximale Graph auch extremal.*

Beweis.

$$\begin{aligned}\|G\| &= (2|G_1| - 3) + (2|G_2| - 3) - 1 \\ &= 2(|G_1| + |G_2|) - 7 \\ &= 2(|G| + 2) - 7 \\ &= 2|G| - 3\,.\end{aligned}$$

Erzwingung von Teilstrukturen

Erste Näherung an Hadwiger:

Satz. (Wagner 1964) $\forall\, r, G$: $\chi(G) \geqslant 2^r \;\Rightarrow\; G \succcurlyeq K^r$

Beweis. Wähle $v_0 \in V(G)$ fest; für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$G_n := G[\{\, v \mid d(v_0, v) = n \,\}]\,.$$

Alle Nachbarn von G_n liegen in $G_{n-1} \cup G_{n+1}$.

Wäre $\chi(G_n) < 2^{r-1}$ für alle n, so könnten wir

$$\bigcup_{n \text{ gerade}} G_n \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{n \text{ ungerade}} G_n$$

jeweils mit $2^{r-1} - 1$ Farben färben $\Rightarrow$ $\chi(G) \leqslant 2^n - 2$ (Wid).

Also $\exists\, n$: $\chi(G_n) \geqslant 2^{r-1}$. Nach Ind.annahme ist $G_n \succcurlyeq K^{r-1}$. Kontrahiere $G_0 \cup \ldots \cup G_{n-1}$ zu einer Ecke $\longrightarrow$ $G \succcurlyeq K^r$. □

Umweg: χ groß $\Rightarrow$ δ groß in Teilgraph $\Rightarrow$ K^r-Minor

Satz 6.2.2. (Kostochka 1982)
Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Graph G mit Durchschnittsgrad $d(G) \geqslant c\, r \sqrt{\log r}$ einen K^r als Minor enthält. Diese Schranke ist größenordnungsmäßig als Funktion von r bestmöglich.

Satz (Thomason 2001). Satz 6.2.2 gilt auch mit $c \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0.53131\ldots$

Erzwingung dichter Minoren durch hohe Taillenweite

Ist $\delta(G) \geqslant 3$, so kann man einen K^r-Minor allein durch hohe Taillenweite erzwingen, mit folgendem Lemma für $d = 3$ und $k = k(r)$:

Lemma 6.2.3. *Es seien $d, k \in \mathbb{N}$ gegeben, $d \geqslant 3$, sowie ein Graph $G = (V, E)$ mit Minimalgrad $\delta(G) \geqslant d$ und Taillenweite $g(G) \geqslant 8k + 3$. Dann hat G einen Minor H mit Minimalgrad $\delta(H) \geqslant d(d-1)^k$.*

Beweis.

Wähle $X \subseteq V$ maximal mit $d(x, y) > 2k$ für alle $x, y \in X$.

Partitioniere V in Bäume $T_x = T_x^{2k}$ $(x \in X)$; kontrahiere diese zu H.

Wir zeigen $\delta(H) \geqslant d(d-1)^k$:

- Die T_x sind induziert (wegen $g > 4k + 1$).
- Zu $x, y \in X$ gibt es höchstens eine T_x–T_y - Kante $(g > 8k + 2)$.
- Jedes $v \in T_x^{k-1}$ all seine $d_G(v) \geqslant d$ Nachbarn aus G in T_x (nach Wahl von X).
- T_x^k (und damit auch T_x) hat daher $\geqslant d(d-1)^{k-1}$ Blätter.
- T_x schickt von jedem Blatt $\geqslant d - 1$ Kanten zu anderen T_y.

Insgesamt schickt jedes T_x mindestens $d(d-1)^k$ Kanten zu anderen T_y, dh. $\delta(H) \geqslant d(d-1)^k$. □

Satz 6.2.4. (Thomassen 1983)
Es gibt eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, für die jeder Graph mit Minimalgrad mindestens 3 und Taillenweite mindestens $f(r)$ einen K^r-Minor enthält (für alle $r \in \mathbb{N}$). □

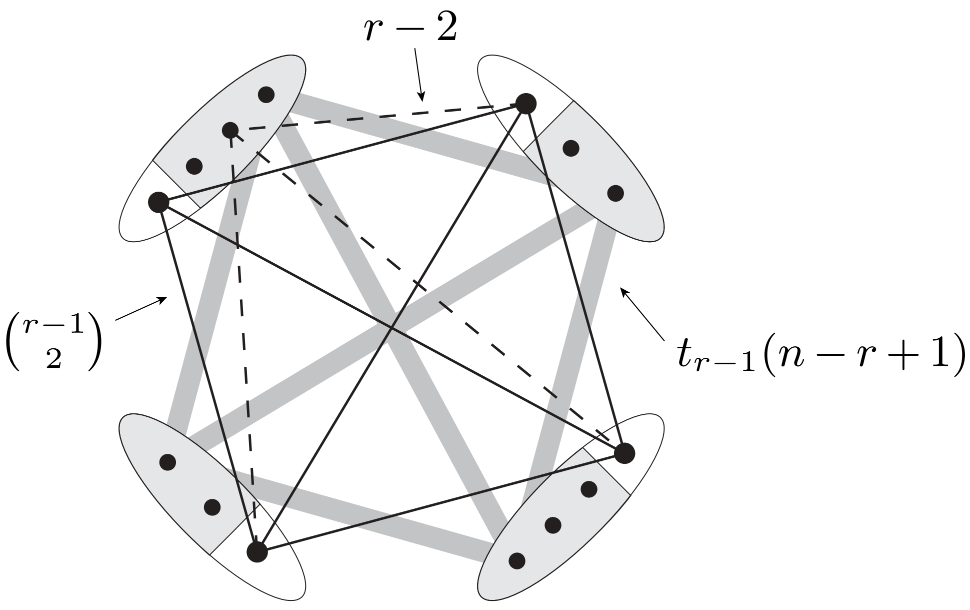
Satz 6.1.1. (Turán 1941)
Für alle $r, n \in \mathbb{N}$ mit $r > 1$ ist jeder Graph $G \not\supseteq K^r$ mit n Ecken und $\mathrm{ex}(n, K^r)$ *Kanten ein $T^{r-1}(n)$.*

Erster Beweis. Wir verwenden Induktion nach n. Für $n \leqslant r-1$ gilt $G = K^n = T^{r-1}(n)$ wie behauptet. Zum Induktionsschritt sei jetzt $n \geqslant r$.

Da G kantenmaximal ohne K^r-Teilgraph ist, hat G einen Teilgraphen $K = K^{r-1}$, etwa mit Ecken $x_1, \dots, x_{r-1}$. Nach Induktionsannahme hat $G - K$ höchstens $t_{r-1}(n-r+1)$ Kanten, und jede Ecke von $G - K$ hat höchstens $r-2$ Nachbarn in K. Somit gilt

$$\|G\| \leqslant t_{r-1}(n-r+1) + (n-r+1)(r-2) + \binom{r-1}{2} = t_{r-1}(n)\,; \tag{1}$$

die Gleichheit rechts folgt sofort aus einer Betrachtung des Turangraphen $T^{r-1}(n)$:



Da G extremal ohne K^r ist und auch $T^{r-1}(n)$ keinen K^r enthält, gilt Gleichheit in (1). Jede Ecke von $G - K$ hat daher *genau* $r-2$ Nachbarn in K – wie die Ecken aus K selbst. Für $i = 1, \dots, r-1$ sei

$$V_i := \{v \in V(G) \mid vx_j \in E(G) \Leftrightarrow i \neq j\}$$

die Menge aller Ecken von G, deren $r-2$ Nachbarn in K genau die Ecken außer x_i sind. Wegen $K^r \not\subseteq G$ ist jede der Eckenmengen V_i unabhängig, und sie partitionieren $V(G)$. G ist also $(r-1)$-partit. Da $T^{r-1}(n)$ unter den $(r-1)$-partiten Graphen mit n Ecken die meisten Kanten hat, folgt $G = T^{r-1}(n)$ aus der angenommenen Extremalität von G. $\square$

Zweiter Beweis.

Idee: Eckenverdopplung schafft keinen K^r.
Verdopplung einer Ecke hohen Grades bei gleichzeitiger Löschung einer Ecke niedrigen Grades kann $\|G\|$ erhöhen.

$T^{r-1}(n)$ hat mehr Kanten als jeder andere...

... vollständig $(r-1)$-partite Graph der Ordnung n;

... vollständig k-partite Graph der Ordnung n mit $k \leqslant r-1$.

Daher reicht zu zeigen: G ist vollständig multipartit.

Falls nicht, $\exists\, y_1, x, y_2$: $\quad y_1x, xy_2 \notin E(G); \quad y_1y_2 \in E(G)$.

Ist $d(y_i) > d(x)$, lösche x und verdopple y_i.

Ist $d(y_1), d(y_2) \leqslant d(x)$, lösche y_1, y_2 und verdreifache x. $\square$

Satz 6.1.2. (Erdős & Stone 1946)
Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geqslant 2$, jedem $s \in \mathbb{N}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß jeder Graph mit $n \geqslant n_0$ Ecken und mindestens

$$t_{r-1}(n) + \epsilon n^2$$

Kanten einen K^r_s als Teilgraphen enthält.

Korollar 6.1.3. *Für jeden Graphen H ist*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{ex}(n,H) \binom{n}{2}^{-1} = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1} .$$

Beweis. Nach Erdős-Stone gilt

$$t_{r-1}(n) \leqslant \operatorname{ex}(n,H) \leqslant \operatorname{ex}(n,K^r_s) < t_{r-1}(n) + \epsilon n^2 \qquad (*)$$

für $r := \chi(H)$ und $s := |H|$, ϵ beliebig, $n \geqslant n_0(s,\epsilon)$. Teile $(*)$ durch $\binom{n}{2}$, und betrachte $n \to \infty$. □

Überblick

Welcher Durchschnittsgrad erzwingt welche Teilstrukturen?

Minoren: $d(G) \geqslant c\, r\sqrt{\log r} \;\Rightarrow\; G \succcurlyeq K^r$ (c unabh. von r)

Top. Minoren: $d(G) \geqslant c'\, r^2 \;\Rightarrow\; G \supseteq TK^r$ (c' unabh. von r)

K^r-Teilgraphen: $d(G) \geqslant c_r n \;\Rightarrow\; G \supseteq K^r$ ($c_r = \frac{r-2}{r-1}$)

H-Teilgraphen: $d(G) \geqslant c_H n \;\Rightarrow\; G \supseteq H$ ($c_H = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$)

∞. Unendliche Graphen

Definition: $|A| = |B| \;:\Leftrightarrow\; \exists\, f\colon A \to B$ bijektiv.
$|A| \leqslant |B| \;:\Leftrightarrow\; \exists\, f\colon A \to B$ injektiv.

Satz. (Cantor-Schröder-Bernstein):
$\leqslant$ ist eine Ordnungsrelation auf den Äquivalenzklassen bzgl. „$=$“.

Beweis. Wohldefiniertheit, Reflexivität & Transitivität sind klar.
Antisymmetrie: Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ injektiv. Im Graphen

$$G = \Big(A \cup B \;,\; \big\{ \{a, f(a)\} : a \in A \big\} \cup \big\{ \{b, g(b)\} : b \in B \big\} \Big)$$

ist jede Komponente ein gerader Kreis oder ein unendlicher Weg.
Definiere 1-Faktor induktiv $\to$ Bijektion. $\square$

Lemma von Zorn. *Hat in einer teilweise geordneten Menge $M \neq \emptyset$ jede Kette eine obere Schranke, so hat M (mindestens) ein maximales Element.*

Beispiele:

- Jeder VR hat eine Basis.
  maximale l.u. Menge: definiere $\leqslant$ als $\subseteq$ $\to \bigcup$
  ? minimale erzeugende Menge: definiere $\leqslant$ als $\supseteq$ $\to \bigcap$
- Jeder zusammenhängende Graph hat einen Spannbaum.
  max. kreisfreier Teilgraph: definiere $\leqslant$ als $\subseteq$ $\to \bigcup$
  ? min. zh. Teilgraph: definiere $\leqslant$ als $\supseteq$ $\to \bigcap$

Wohlordnung: vollständige Ordnung, in der jede
nicht-leere Teilmenge ein kleinstes Element hat.

$\Rightarrow$ Jedes Element hat einen Nachfolger.
Es kann Elemente geben, die kein Nachfolger sind: *Limites*

Wohlordnungssatz. *Auf jeder Menge existiert eine WO.*

Transfinite Induktion mit wohlgeordneter Indexmenge A:

Zu beweisen ist eine Aussage $P(a)$ für alle $a \in A$.
Zu beliebigem $a \in A$ zeigt man $\big(\forall\, b < a\colon P(b)\big) \;\Rightarrow\; P(a)$.

Rechtfertigung: die Teilmenge $\{a \mid \neg P(a)\}$ von A
hat kein kleinstes Element, ist also leer.

Rekursive Definition mit wohlgeordneter Indexmenge A:

Zu jedem $a \in A$ wollen wir ein Objekt $x(a)$ definieren.
In der Def von $x(a)$ dürfen $x(b)$ mit $b < a$ benutzt werden.

Beispiel: Jeder zusammenhängende Graph hat einen Spannbaum.

Bew: 1. Ordne die Eckenmenge V wohl.
2. Definiere rekursiv Bäume T_v mit $\forall\, u \leqslant v$: $u \in T_v$.
(v Nachfolger: füge Weg an; v Limes: $T_v := \bigcup_{u<v} T_u$)
3. Bew. mit transf. Induktion, dass jedes T_v ein Baum ist.
(getrennt für „v Nachfolger“und „v Limes“)
4. Schließe, dass $\bigcup T_v$ ein Baum ist.

NB. Das LZ und der WOsatz sind äquivalent zum Auswahlaxiom.

Kompaktheitsschlüsse

Königs Unendlichkeitslemma.
Es sei G ein Graph auf $V_0 \cup V_1 \cup \ldots$ (endliche disjunkte Mengen). Jede Ecke in V_n habe einen Nachbarn in V_{n-1}. Dann enthält G einen unendlichen Weg $v_0 v_1 \ldots$ mit $v_n \in V_n$ für alle n.

<u>Anwendungsbeispiel 1</u>: Jeder unendliche zh.e Graph enthält einen Strahl oder eine Ecke unendlichen Grades.

Beweis: Wähle $v_0 \in V$. Setze $V_n := \{v \in V \mid d(v_0, v) = n\}$. □

<u>Anwendungsbeispiel 2</u> (de Bruijn & Erdős):

Ist $\chi(H) \leqslant k \in \mathbb{N}$ für jedes endliche $H \subseteq G$, so auch $\chi(G) \leqslant k$.

Beweis (für G abzählbar):

Zähle Ecken ab: $v_0, v_1, \ldots$; setze $G_n := G[v_0, \ldots, v_n]$.

Im ∞-Lemma sei $V_n := \{k\text{-Färbungen von } G_n\}$.
$\forall\, c \in V_{n+1}$ ziehe Kante zu $c|_{G_n} \in V_n$. □

Eine Eckenpartition von G in zwei Mengen heißt *unfreundlich*, wenn jede Ecke in der anderen Partitionsklasse mindestens so viele Nachbarn hat wie in ihrer eigenen.

<u>Anwendungsbeispiel 3</u>:

Jeder lokal endliche Graph hat eine unfreundliche Eckenpartition.

Beweis: Partitioniere jedes G_n so, dass diejenigen Ecken richtig liegen, die all ihre G-Nachbarn bereits in G_n haben. □

Universelle Graphen

Ein Graph G ist $\leqslant$-*universell* für eine Eigenschaft $\mathcal{P}$ abzählbarer Graphen, wenn $G \in \mathcal{P}$ ist und $\forall H \in \mathcal{P}: \; H \leqslant G$.

<u>Beispiel</u>. Jedes abzählbare G mit $(*)$ ist Untergraphen-universell:

$\forall U, W \subseteq V(G)$ (endlich, disjunkt) $\exists v \in G - U - W$:
G hat alle v–U - Kanten aber keine v–W - Kante. $(*)$

<u>Konstruktion</u>: $\exists$ ein Graph R mit $(*)$, der *Rado-Graph*.

Satz. (Erdős and Rényi 1963)
Je zwei abzählbare Graphen mit $(*)$ sind isomorph.

Beweis mit der Technik des ewigen Hin- und Her. $\square$

7. Ramseytheorie für Graphen

Satz von Ramsey. (einfachste Fassung, unendlich)
Jeder Graph auf $\mathbb{N}$ *enthält einen unendlichen vollständigen Graphen* K^ω *oder dessen Komplement* $\overline{K^\omega}$ *als Untergraphen.*

Satz von Ramsey. (einfachste Fassung, unendlich)
Für jede 2-Kantenfärbung enthält K^ω *einen einfarbigen* K^ω.

Satz von Ramsey. (einfachste Fassung, endlich)
Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft, daß jeder Graph mit mindestens* n *Ecken einen* K^r *oder einen* $\overline{K^r}$ *als Untergraphen enthält.*

Satz von Ramsey. (einfachste Fassung, endlich)
Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft, daß* K^n *bei jeder 2-Kantenfärbung einen einfarbigen* K^r *enthält.*

Satz 7.1.1. (einfachste Fassung, endlich)
Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß jeder Graph mit mindestens n Ecken einen K^r oder einen $\overline{K^r}$ als Untergraphen enthält.

Beweis. Die Behauptung ist trivial für $r = 0, 1$; im folgenden sei $r \geqslant 2$. Es sei $n := 2^{2r-3}$, und G ein Graph mit mindestens n Ecken. Wir definieren rekursiv Eckenmengen $V_1, \ldots, V_{2r-2}$ und Ecken $v_i \in V_i$ in G mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ $(i = 1, \ldots, 2r-2)$;

(ii) $V_i \subseteq V_{i-1} \smallsetminus \{v_{i-1}\}$ $(i = 2, \ldots, 2r-2)$;

(iii) v_{i-1} ist entweder zu jeder oder zu keiner Ecke in V_i benachbart $(i = 2, \ldots, 2r-2)$.

Es sei $V_1 \subseteq V(G)$ irgendeine Menge von 2^{2r-3} Ecken, und $v_1 \in V_1$ beliebig. Damit ist (i) für $i = 1$ erfüllt; (ii) und (iii) sind trivialerweise wahr. Zu gegebenem i mit $1 < i \leqslant 2r-2$ seien nun V_{i-1} und $v_{i-1} \in V_{i-1}$ bereits so gewählt, daß (i)–(iii) für $i-1$ gelten. Da

$$|V_{i-1} \smallsetminus \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-1-i} - 1$$

ungerade ist, hat V_{i-1} eine Teilmenge V_i, die (i)–(iii) erfüllt; wir wählen $v_i \in V_i$ beliebig.

Unter den $2r-3$ Ecken $v_1, \ldots, v_{2r-3}$ gibt es $r-1$ Ecken v_{i-1}, die in (iii) vom gleichen Typ sind: entweder jeweils zu allen Ecken in V_i benachbart oder zu keiner. Da V_i die Ecken $v_i, \ldots, v_{2r-2}$ enthält, induzieren diese $r-1$ Ecken zusammen mit v_{2r-2} entsprechend einen K^r oder einen $\overline{K^r}$ in G. $\square$

Die kleinste solche n heißt *Ramseyzahl von r*.

Satz 7.1.2. (allgemeine Fassung, unendlich)
Sind $k, c \geqslant 1$ natürliche Zahlen, ist X eine unendliche Menge, und ist $[X]^k$ mit c Farben gefärbt, so hat X eine unendliche einfarbige Teilmenge.

Satz 7.1.4. (allgemeine Fassung, endlich)
Zu $k, c, r \geqslant 1$ existiert stets ein $n \geqslant k$ mit der Eigenschaft, daß jede n-elementige Menge X bei jeder c-Färbung von $[X]^k$ eine einfarbige r-elementige Teilmenge hat.

Das kleinste solche n ist die (allgemeine) *Ramseyzahl* $R(k, c, r)$.

$R(H_1, H_2) :=$ das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so daß für jeden Graphen G auf n Ecken entweder $H_1 \subseteq G$ oder $H_2 \subseteq \overline{G}$ gilt.

(= das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so daß K^n zu jeder grün-rot-Kantenfärbung einen grünen H_1 oder einen roten H_2 enthält.)

Proposition 7.2.1. *Es seien $s, t \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$, und T ein beliebiger Baum mit t Ecken. Dann ist $R(T, K^s) = (s-1)(t-1)+1$.*

G heißt *Ramsey-minimal* für H, wenn G bei jeder 2-Kantenfärbung ein einfarbiges H enthält und minimal ist mit dieser Eigenschaft.

Proposition 7.2.3. *Ist T ein Baum aber kein Stern, so gibt es unendlich viele für T Ramsey-minimale Graphen.*

Beweis. Es sei $|T| =: r$. Wir finden zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen für T Ramsey-minimalen Graphen G mit $|G| \geqslant n$.

Satz von Erdős $\Rightarrow \quad \exists\ G\colon\ \chi(G) > r^2$ und $g(G) > n$

G hat die Ramsey-Eigenschaft für H:

Färben wir die Kanten von G mit grün und rot, so kann nicht sowohl der grüne als auch der rote Teilgraph eine Eckenfärbung mit höchstens r Farben haben (im Sinne von Kapitel 4): sonst färbten wir die Ecken von G mit dem kartesischen Produkt aus diesen Färbungen und hätten einen Widerspruch zu $\chi(G) > r^2$. Es sei also $G' \subseteq G$ einfarbig mit $\chi(G') > r$. Nach Korollar 4.2.3 hat G' einen Teilgraphen vom Minimalgrad $\geqslant r$, und dieser enthält T nach Korollar 0.5.4.

Wähle $G^* \subseteq G$ minimal mit der Ramsey-Eigenschaft für H:

Dann ist G^* kein Wald (da jeder Wald eine Kantenzweifärbung ohne einfarbiges T hat), enthält also einen Kreis. Es folgt $|G^*| \geqslant g(G) > n$. $\square$

Proposition 7.4.1. *Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß jeder zusammenhängende Graph G mit mindestens n Ecken einen K^r, $K_{1,r}$ oder P^r als Untergraphen enthält.*

Proposition 7.4.2. *Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß jeder 2-zusammenhängende Graph mit mindestens n Ecken einen C^r oder $K_{2,r}$ als topologischen Minor enthält.*

Satz 7.4.3. (Oporowski, Oxley & Thomas 1993)
Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß jeder 3-zusammenhängende Graph mit mindestens n Ecken ein Rad der Ordnung r oder einen $K_{3,r}$ als Minor enthält.

Satz 7.4.4. (Oporowski, Oxley & Thomas 1993)
Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß jeder 4-zusammenhängende Graph mit mindestens n Ecken ein Doppelrad, eine Krone, eine Möbiuskrone, oder einen $K_{4,s}$ mit jeweils mindestens r Ecken als Minor enthält.

$\mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}' \;:\Leftrightarrow\; (\forall\, G \in \mathcal{P})\ (\exists\, G' \in \mathcal{P}')\ G \leqslant G'$
$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}' \;:\Leftrightarrow\; \mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}'$ und $\mathcal{P} \geqslant \mathcal{P}'$
$\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k\}$ heißt *Kuratowskimenge* für Klasse $\mathcal{C}$ von $\mathcal{P}$‘s, wenn

- $\mathcal{P}_i \nleqslant \mathcal{P}_j \ \forall\, i \neq j$
- $(\forall\, \mathcal{P} \in \mathcal{C})\ (\exists\, i)\ \mathcal{P}_i \leqslant \mathcal{P}$.

Kuratowskimengen sind eindeutig bis auf Äquivalenz.

Satz 7.4.5. *Für $k = 1, \dots, 4$ haben die Eigenschaften k-zusammenhängender Graphen die folgenden Kuratowskimengen:*

(i) $k = 1$: {Sterne, Wege} *(bzgl. Teilgraph)*
(ii) $k = 2$: {Kreise, $K_{2,r}$‘s} *(bzgl. top. Minoren)*
(iii) $k = 3$: {Räder, $K_{3,r}$‘s} *(bzgl. Minoren)*
(iv) $k = 4$: {Doppelräder, Kronen, M‘kronen, $K_{4,r}$‘s} *(bzgl. $\preccurlyeq$)*

8. Hamiltonkreise

Satz 8.1.1. (Dirac 1952)
Ist G ein Graph mit $n \geqslant 3$ Ecken und Minimalgrad $\delta(G) \geqslant n/2$, so hat G einen Hamiltonkreis.

Proposition 8.1.2. *Ein k-zusammenhängender Graph G, in dem jede Menge unabhängiger Ecken die Mächtigkeit $\leqslant k$ hat, enthält einen Hamiltonkreis.*

Def: $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n < n$ heißt *hamiltonsch*, wenn jeder Graph mit Graden $d_i \geqslant a_i$ einen Hamiltonkreis enthält.

Satz 8.2.1. (Chvátal 1972)
$(a_1, \ldots, a_n)$ *wie oben ist hamiltonsch* $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\forall\, i < n/2$ *gilt*

$$a_i \leqslant i \;\Rightarrow\; a_{n-i} \geqslant n - i\,.$$

Beweis. ‚$\Leftarrow$': Das Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ erfülle die Bedingung des Satzes. Ist es nicht hamiltonsch, so existiert ein Graph $G = (V, E)$ mit Graden

$$d_i \geqslant a_i \qquad \text{für alle } i \tag{1}$$

aber ohne Hamiltonkreis. Wir wählen G mit möglichst vielen Kanten.

Wegen (1) erfüllt mit $(a_1, \ldots, a_n)$ auch die Gradsequenz $(d_1, \ldots, d_n)$ von G die Bedingung des Satzes, d.h. es gilt

$$d_i \leqslant i \;\Rightarrow\; d_{n-i} \geqslant n - i \tag{2}$$

für alle $i < n/2$.

Wähle nicht-benachbarte Ecken $x, y \in G$ mit $d(x) + d(y)$ größtmöglich und $d(x) \leqslant d(y)$.

Die Gradsequenz von $G + xy$ ist punktweise größer als $(d_1, \ldots, d_n)$, und damit als $(a_1, \ldots, a_n)$. Nach Maximalität von G hat $G + xy$ daher einen Hamiltonkreis $H \ni xy$. Dann ist $H - xy$ ein Hamiltonweg $x_1, \ldots, x_n$ in G mit $x_1 = x$ und $x_n = y$.

Wie im Beweis des Satzes von Dirac betrachten wir die Indexmengen

$$I := \{i \mid xx_{i+1} \in E\} \quad \text{und} \quad J := \{j \mid x_j y \in E\}\,.$$

Da G keinen Hamiltonkreis enthält, ist $I \cap J = \emptyset$. Nach Definition von I und J ist $I \cup J \subseteq \{1, \ldots, n-1\}$. Damit gilt

$$d(x) + d(y) = |I| + |J| < n\,; \tag{3}$$

insbesondere ist also $d(x) < n/2$.

Jedes Paar $\{x_i, y\}$ mit $i \in I$ war wegen $x_i y \notin E$ ein Kandidat bei der Wahl von $\{x, y\}$. Da $\{x, y\}$ mit maximalem $d(x) + d(y)$ gewählt wurde, folgt daher $d(x_i) \leqslant d(x)$ für alle $i \in I$. Für $h := d(x)$ hat G somit mindestens $|I| = h$ Ecken vom Grad $\leqslant h$; es gilt also

$$d_1, \ldots, d_h \leqslant h\,.$$

Mit (2) folgt $d_{n-h} \geqslant n - h$, d.h. die $h + 1$ Ecken $v_{n-h}, \ldots, v_n$ haben alle einen Grad $\geqslant n - h$. Wegen $d(x) = h$ ist eine dieser Ecken, sagen wir z, nicht zu x benachbart. Wegen

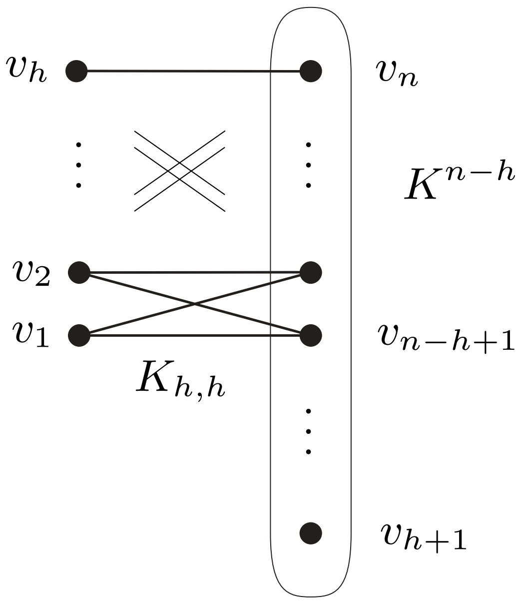
$$d(x) + d(z) \geqslant h + (n - h) = n$$

ist dies mit (3) ein Widerspruch zur Wahl von x und y.

‚⇒': Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ ein die Chvátal-Bedingung für ein $h < n/2$ verletzendes Tupel. Wir müssen einen Graphen ohne Hamiltonkreis finden, dessen Gradsequenz punktweise größer ist als $(a_1, \ldots, a_n)$. Die Gradsequenz

$$(\underbrace{h, \ldots, h}_{h \text{ mal}}, \underbrace{n-h-1, \ldots, n-h-1}_{n-2h \text{ mal}} \,.\, \underbrace{n-1, \ldots, n-1}_{h \text{ mal}})$$

ist punktweise größer als $(a_1, \ldots, a_n)$, und der folgende Graph hat diese Gradsequenz aber keinen Hamiltonkreis:



9. Zufallsgraphen

Zu gegebenem $e \in [V]^2$ sei A_e das Ereignis, daß e eine Kante von $G \in \mathcal{G}(n,p)$ ist, also

$$A_e := \{\omega \in \Omega \mid \omega(e) = 1_e\}\,.$$

Proposition 9.1.1. *Die Ereignisse A_e sind unabhängig, und ihre Wahrscheinlichkeit ist jeweils p.*

Beweis. Nach Definition von A_e gilt

$$A_e = \{1_e\} \times \prod_{e' \neq e} \Omega_{e'}\,.$$

Nach Definition von P als Produktmaß der Maße P_e gilt damit

$$P(A_e) = p \cdot \prod_{e' \neq e} 1 = p\,.$$

Ist $\{e_1, \ldots, e_k\}$ eine beliebige Teilmenge von $[V]^2$, so folgt entsprechend

$$\begin{aligned} P\left(A_{e_1} \cap \ldots \cap A_{e_k}\right) &= P\Big(\{1_{e_1}\} \times \ldots \times \{1_{e_k}\} \times \prod_{e \notin \{e_1,\ldots,e_k\}} \Omega_e\Big) \\ &= p^k \\ &= P(A_{e_1}) \cdots P(A_{e_k})\,. \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 9.1.2. *Für jedes $k \geqslant 2$ gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß $G \in \mathcal{G}(n,p)$ eine unabhängige Eckenmenge der Mächtigkeit k enthält,*

$$P[\alpha(G) \geqslant k] \leqslant \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}.$$

Analog:

$$P[\omega(G) \geqslant k] \leqslant \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}.$$

Satz 9.1.3. *Ist $r \geqslant 3$ und R die Ramseyzahl von r, so gilt*

$$R > 2^{r/2}.$$

Beweis. Für $r = 3$ ist $R \geqslant 3 > 2^{3/2}$; im folgenden sei $r \geqslant 4$. Wir zeigen, daß für jedes $n \leqslant 2^{r/2}$ die Wahrscheinlichkeiten $P[\alpha(G) \geqslant r]$ und $P[\omega(G) \geqslant r]$ für $G \in \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ beide kleiner als $\frac{1}{2}$ sind.

Nach Proposition 9.1.2 und der analogen Aussage für $\omega(G)$ gilt wegen $p = q = \frac{1}{2}$ (und $r! > 2^r$ für $r \geqslant 4$) für $n \leqslant 2^{r/2}$ in der Tat

$$\begin{aligned} P[\alpha(G) \geqslant r],\ P[\omega(G) \geqslant r] &\leqslant \binom{n}{r} (\tfrac{1}{2})^{\binom{r}{2}} \\ &< (n^r/2^r)\, 2^{-\frac{1}{2}r(r-1)} \\ &\leqslant (2^{r^2/2}/2^r)\, 2^{-\frac{1}{2}r(r-1)} \\ &= 2^{-r/2} \\ &< \tfrac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

□

Zufallsgröße:

$$X\colon \mathcal{G}(n,p) \to [0,\infty)\,.$$

Erwartungswert (X ganzzahlig):

$$E(X) := \sum_{G\in\mathcal{G}(n,p)} P(\{G\})\cdot X(G) = \sum_{k\geqslant 1} P[X \geqslant k] = \sum_{k\geqslant 1} k\cdot P[X = k]$$

Lemma 9.1.4. (Markov-Ungleichung)
Es sei $X \geqslant 0$ eine Zufallsgröße auf $\mathcal{G}(n,p)$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann gilt

$$P[X \geqslant a] \leqslant E(X)/a\,.$$

Anzahl von Folgen k verschiedener Ecken:

$$(n)_k := n\,(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\,;$$

Lemma 9.1.5. *Die mittlere Anzahl X von Kreisen der Länge k in $G \in \mathcal{G}(n,p)$ beträgt*

$$E(X) = \frac{(n)_k}{2k}\,p^k.$$

Beweis. *Charakteristische Zufallsgröße*:

$$X_C\colon\ G \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } C \subseteq G \text{ ist;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$E(X_C) = P[C \subseteq G] = p^k$$

$$E(X) = E\Big(\sum_C X_C\Big) = \sum_C E(X_C) = \frac{(n)_k}{2k}\,p^k$$

□

Lemma 9.2.1. *Es seien $k > 0$ und $p = p(n)$ gegeben. Ist $p \geqslant (6k \ln n)/n$ für große n, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} P[\alpha \geqslant \tfrac{1}{2}n/k] = 0\,.$$

Beweis. Für alle $n, r \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant r \geqslant 2$ und $G \in \mathcal{G}(n,p)$ gilt nach Proposition 9.1.2

$$\begin{aligned} P[\alpha \geqslant r] &\leqslant \binom{n}{r} q^{\binom{r}{2}} \\ &\leqslant n^r q^{\binom{r}{2}} \\ &= \left(nq^{(r-1)/2}\right)^r \\ &\leqslant \left(ne^{-p(r-1)/2}\right)^r, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Tatsache folgt, daß $1 - p \leqslant e^{-p}$ ist für alle p. (Vergleiche die Funktionen $x \mapsto e^x$ und $x \mapsto x + 1$ für $x = -p$.) Ist nun $p \geqslant (6k \ln n)/n$ und $r \geqslant \frac{1}{2}n/k$, so gilt für den Ausdruck unter dem Exponenten:

$$\begin{aligned} ne^{-p(r-1)/2} &= ne^{-pr/2 + p/2} \\ &\leqslant ne^{-(3/2)\ln n + p/2} \\ &\leqslant n\, n^{-3/2}\, e^{1/2} \\ &= \sqrt{e}/\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \end{aligned}$$

Gilt $p \geqslant (6k \ln n)/n$ für große n, so folgt mit $r := \lceil \frac{1}{2}n/k \rceil$

$$\lim_{n\to\infty} P[\alpha \geqslant \tfrac{1}{2}n/k] = \lim_{n\to\infty} P[\alpha \geqslant r] = 0\,,$$

wie behauptet. □

Satz 9.2.2. (Erdős 1959)
Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Graphen H mit Taillenweite $g(H) > k$ und chromatischer Zahl $\chi(H) > k$.

Beweis. Es sei ϵ mit $0 < \epsilon < 1/k$ fest gewählt, und $p := n^{\epsilon-1}$. $X(G) :=$ die Anzahl der kurzen Kreise (Länge $\leqslant k$) in $G \in \mathcal{G}(n,p)$. Nach Lemma 9.1.5 gilt

$$E(X) = \sum_{i=3}^{k} \frac{(n)_i}{2i} p^i \leqslant \tfrac{1}{2} \sum_{i=3}^{k} n^i p^i \leqslant \tfrac{1}{2}(k-2)\, n^k p^k \,;$$

beachte, daß $(np)^i \leqslant (np)^k$ ist wegen $np = n^\epsilon \geqslant 1$. Mit Lemma 9.1.4 folgt

$$\begin{aligned} P[X \geqslant n/2] &\leqslant E(X)/(n/2) \\ &\leqslant (k-2)\, n^{k-1} p^k \\ &= (k-2)\, n^{k-1} n^{(\epsilon-1)k} \\ &= (k-2)\, n^{k\epsilon-1}. \end{aligned}$$

Da $k\epsilon - 1 < 0$ ist nach Wahl von ϵ, folgt hieraus

$$\lim_{n\to\infty} P[X \geqslant n/2] = 0\,.$$

Es sei nun n so groß, daß $P[X \geqslant n/2] < \frac{1}{2}$ und $P[\alpha \geqslant \frac{1}{2} n/k] < \frac{1}{2}$ gilt; letzteres ist möglich nach Wahl von p und Lemma 9.2.1. Dann gibt es einen Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$ mit $\alpha(G) < \frac{1}{2} n/k$ und mit weniger als $n/2$ kurzen Kreisen. Aus jedem kurzen Kreis von G entfernen wir eine Ecke. Der entstehende Graph H hat noch mindestens $n/2$ Ecken und enthält keine kurzen Kreise mehr, d.h. es gilt $g(H) > k$. Nach Wahl von G gilt weiter

$$\chi(H) \geqslant \frac{|H|}{\alpha(H)} \geqslant \frac{n/2}{\alpha(G)} > k\,.$$

□

Def: *Fast alle* $G \in \mathcal{G}(n,p)$ haben die Eigenschaft $\mathcal{P}$

$$:\Leftrightarrow \ P[\,G \in \mathcal{P}\,] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Proposition 9.3.1. *Für konstantes $p \notin \{0,1\}$ ist jeder Graph H ein Untergraph fast aller Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$.*

Beweis. $P[H \not\subseteq G \text{ induziert}] \leqslant (1-r)^{\lfloor n/k \rfloor} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$ □

$$G \in \mathcal{P}_{i,j} \ :\Leftrightarrow \ \begin{cases} |G| \geqslant i+j \text{ und} \\ \\ \forall\, U, W \text{ disjunkt } \exists\, v : \end{cases}$$

Lemma 9.3.2. *Für konstantes $p \notin \{0,1\}$ und $i,j \in \mathbb{N}$ hat stets fast jeder Graph $G \in \mathcal{G}(n,p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P}_{i,j}$.*

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit, daß für gegebene U,W eine feste Ecke $v \in G - (U \cup W)$ zu allen Ecken aus U aber zu keiner Ecke aus W benachbart ist, beträgt wegen der Disjunktheit der beiden Mengen

$$p^{|U|}q^{|W|} \geqslant p^i q^j .$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß für diese U,W keine geeignete Ecke v existiert, beträgt also (für $n \geqslant i+j$)

$$(1-p^{|U|}q^{|W|})^{n-|U|-|W|} \leqslant (1-p^i q^j)^{n-i-j},$$

da die entsprechenden Ereignisse für verschiedene v unabhängig sind. Nun gibt es nicht mehr als n^{i+j} Paare solcher Mengen U und W in $V(G)$. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich darunter ein Paar ohne geeignetes v befindet, beträgt höchstens

$$n^{i+j}(1-p^i q^j)^{n-i-j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$ □

Korollar 9.3.3. *Für konstantes $p \notin \{0,1\}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist fast jeder Graph in $\mathcal{G}(n,p)$ k-zusammenhängend.*

Mit der Abschätzung $P[\alpha \geqslant k] \leqslant \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}$ kann man noch zeigen:

Proposition 9.3.4. *Für konstantes $p \notin \{0,1\}$ und jedes $\epsilon > 0$ hat fast jeder Graph $G \in \mathcal{G}(n,p)$ eine chromatische Zahl*

$$\chi(G) > \frac{\log(1/q)}{2+\epsilon} \cdot \frac{n}{\log n}\,.$$

<u>Definition</u>: $\mathcal{G}(\aleph_0, p) =$ Produktraum, wie $\mathcal{G}(n,p)$.

Satz 9.3.5. (Erdős & Rényi 1963)
Für jedes $p \in (0,1)$ ist ein Zufallsgraph $G \in \mathcal{G}(\aleph_0,p)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 isomorph zum Radographen R.

Beweis. Wir zeigen, dass $G \in \mathcal{G}(\aleph_0,p)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 die Eigenschaft $(*) = \bigcap_{i,j} \mathcal{P}_{i,j}$ hat.

Für feste U, W, v hängt die Wahrscheinlichkeit, dass v <u>nicht</u> korrekt zu $U \cup W$ benachbart ist, nicht von v ab:

$$r = r(|U|,|W|) < 1$$

Es folgt $P\,[\,\nexists\,\text{korrekt zu } U,W \text{ benachbartes } v\,] = 0.$

Da es nur abzb viele Paare (U,W) gibt, folgt $P\,[\,(*)\,] = 0.$ □

Schwellenfunktion $t \mapsto t(n) \neq 0$ für $\mathcal{G}$:

$$\lim_{n\to\infty} P[G \in \mathcal{G}] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p/t \to 0 \text{ für } n \to \infty \\ 1 & \text{falls } p/t \to \infty \text{ für } n \to \infty. \end{cases}$$

Schwellenfunktionen

Schwellenfunktion $t \mapsto t(n) \neq 0$ für $\mathcal{G}$:

$$\lim_{n\to\infty} P[G \in \mathcal{G}] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p/t \to 0 \text{ für } n \to \infty \\ 1 & \text{falls } p/t \to \infty \text{ für } n \to \infty. \end{cases}$$

Varianz von X (mit $\mu := E(X)$):

$$\sigma^2 := E\big((X-\mu)^2\big) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - \mu^2$$

Lemma 9.4.1. (Tschebyschev-Ungleichung)
Für jedes reelle $\lambda > 0$ gilt nach Markov:

$$P\big[\,|X-\mu| \geqslant \lambda\,\big] = P[(X-\mu)^2 \geqslant \lambda^2] \leqslant \sigma^2/\lambda^2. \qquad \square$$

Anwendung:

Lemma 9.4.2. *Gilt $\mu > 0$ für alle hinreichend großen n, und $\sigma^2/\mu^2 \to 0$ für $n \to \infty$, so gilt $X(G) > 0$ für fast alle $G \in \mathcal{G}(n,p)$.*

Beweis. Für Graphen G mit $X(G) = 0$ ist $|X(G) - \mu| = \mu$. Mit $\lambda := \mu$ folgt daher aus Lemma 9.4.1

$$P[X=0] \leqslant P\big[\,|X-\mu| \geqslant \mu\,\big] \leqslant \sigma^2/\mu^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Wegen $X \geqslant 0$ bedeutet dies, daß $X(G) > 0$ gilt für fast alle $G \in \mathcal{G}(n,p)$. $\square$

H heißt *ausgewogen*, wenn $\varepsilon(H') \leqslant \varepsilon(H)$ gilt für alle $H' \subseteq H$.

Satz 9.4.5. (Erdős & Rényi 1960)
Ist H ein ausgewogener Graph mit k Ecken und $\ell \geqslant 1$ Kanten, so ist $t(n) := n^{-k/\ell}$ eine Schwellenfunktion für $\mathcal{P}_H := \{G \mid H \subseteq G\}$.

Beweis. (Übersicht)
Zu zeigen ist (mit $X(G) :=$ # Kopien von H in G und $\gamma := p/t$):

$$\lim_{n\to\infty} P[X \geqslant 1] = \begin{cases} 0 & \text{falls } \gamma \to 0 \text{ für } n \to \infty \\ 1 & \text{falls } \gamma \to \infty \text{ für } n \to \infty. \end{cases}$$

Es sei $\mathcal{H}$ die Menge aller zu H isomorphen Graphen auf Teilmengen von $\{0, \dots, n-1\}$, der Eckenmenge der Graphen aus $\mathcal{G}(n,p)$:

$$\mathcal{H} := \big\{H' \mid H' \simeq H,\ V(H') \subseteq \{0,\dots,n-1\}\big\}.$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ mögliche Eckenmengen für die $H' \in \mathcal{H}$, und $\leqslant k!$ Kopien von H auf einer festen Eckenmenge. Damit gilt

$$|\mathcal{H}| \leqslant \binom{n}{k} k! \leqslant n^k. \tag{1}$$

<u>Teil 1</u>:
Es gelte $\gamma \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; zu zeigen ist $P[X \geqslant 1] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Mit Markov gilt

$$P[X \geqslant 1] \;\leqslant\; E(X);$$

wir zeigen $E(X) \to 0$. Doppeltes Zählen und $\|H\| = \ell$ ergibt

$$E(X) = \sum_{H' \in \mathcal{H}} P[H' \subseteq G] = \sum_{H' \in \mathcal{H}} p^\ell \underset{(1)}{\leqslant} n^k p^\ell = \gamma^\ell \to 0.$$

Teil 2: Es gelte $\gamma \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$; zu zeigen ist $P[X \geqslant 1] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Nach Lemma 9.4.2 reicht es $\sigma^2/\mu^2 \to 0$ zu zeigen, dh. für jedes $\epsilon > 0$ und alle hinreichend großen n sollte

$$E(X^2)/\mu^2 \leqslant 1 + \epsilon \tag{2}$$

sein. (Es war $\sigma^2 = \big(E(X^2) - \mu^2\big)$.) Analog zu eben gilt:

$$E(X^2) = \sum_{(H',H'')\in\mathcal{H}^2} P[H' \cup H'' \subseteq G]\,. \tag{3}$$

Berechnen wir also diese Wahrscheinlichkeiten $P[H' \cup H'' \subseteq G]$. Für beliebige $H', H'' \in \mathcal{H}$ gilt

$$P[H' \cup H'' \subseteq G] \ = \ p^{2\ell - \|H' \cap H''\|}.$$

Da H nach Annahme ausgewogen ist, gilt $\varepsilon(H' \cap H'') \leqslant \varepsilon(H) = \ell/k$. Für $|H' \cap H''| =: i$ folgt $\|H' \cap H''\| \leqslant i\ell/k$, und somit wegen $p < 1$

$$P[H' \cup H'' \subseteq G] \ \leqslant \ p^{2\ell - i\ell/k}.$$

Da dies von i abhängt, zerlegen wir die Summe aus (3) in die Summen

$$A_i := \sum_{|H' \cap H''| = i} P[H' \cup H'' \subseteq G]\,.$$

Da für $i = 0$ die Ereignisse $H' \subseteq G$ und $H'' \subseteq G$ unabhängig sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sum\nolimits_0 P[H' \cup H'' \subseteq G] \\
&= \sum\nolimits_0 P[H' \subseteq G] \cdot P[H'' \subseteq G] \\
&\leqslant \sum_{(H',H'') \in \mathcal{H}^2} P[H' \subseteq G] \cdot P[H'' \subseteq G] \\
&= \Big(\sum_{H' \in \mathcal{H}} P[H' \subseteq G] \Big) \cdot \Big(\sum_{H'' \in \mathcal{H}} P[H'' \subseteq G] \Big) \\
&= \mu^2.
\end{aligned}$$

Für $i \geqslant 1$ andererseits ist die Anzahl der Paare (H', H'') mit $|H' \cap H''| = i$ bereits so viel geringer, daß für hinreichend große n mit viel Rechnen folgt:

$$A_i \leqslant c(k,i)\, \gamma^{-\ell/k} \mu^2 \leqslant (\epsilon/k)\, \mu^2.$$

Insgesamt ist

$$E(X^2) \underset{(3)}{\leqslant} A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i \leqslant \mu^2 + \epsilon\mu^2,$$

und (2) folgt. $\square$

Korollar 9.4.6. *Ist $k \geqslant 3$ und $\mathcal{P}$ die Eigenschaft, einen Kreis der Länge k als Teilgraph zu enthalten, so ist $t(n) = 1/n$ eine Schwellenfunktion für $\mathcal{P}$.*

Korollar 9.4.7. *Ist T ein Baum der Ordnung $k \geqslant 2$ und $\mathcal{P}$ die Eigenschaft, eine Kopie von T als Teilgraph zu enthalten, so ist $t(n) = n^{-k/(k-1)}$ eine Schwellenfunktion für $\mathcal{P}$.*

10. Minoren, Bäume und WQO

1. Charakterisierungssätze durch verbotene Minoren

Welche Grapheneigenschaften $\mathcal{G}$ lassen sich darstellen als

$$\mathcal{G} = \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{X}) := \{G \mid G \not\succcurlyeq X \text{ für alle } X \in \mathcal{X}\}$$

(Beispiel Kuratowski: $\mathcal{G}$ = Plättbarkeit; $\mathcal{X} = \{K^5, K_{3,3}\}$)?

Genau die Eigenschaften $\mathcal{G}$, die unter Minorenbildung abgeschlossen sind. Denn für diese $\mathcal{G}$ gilt:

$$\mathcal{G} = \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\overline{\mathcal{G}}) = \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}})$$

mit

$$\mathcal{X}_{\mathcal{G}} := \{X \mid X \text{ ist } \preccurlyeq\text{-minimal in } \overline{\mathcal{G}}\}\,.$$

Dieses $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$ ist die *kanonische* Menge der $\mathcal{G}$ charakterisierenden verbotenen Minoren: für jedes $\mathcal{X}$ mit $\mathcal{G} = \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{X})$ gilt $\mathcal{X}_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{X}$.

All diese Mengen $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$ sind offenbar $\preccurlyeq$-Antiketten.

Satz 10.5.1. (Minorensatz; Robertson & Seymour)
Jede $\preccurlyeq$-Antikette endlicher Graphen ist endlich.

Korollar 10.5.2. *Jede unter Minorenbildung abgeschlossene Grapheneigenschaft ist durch endlich viele verbotene Minoren darstellbar.* □

Korollar 10.5.3. *Zu jeder Fläche S gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und Graphen $X_1, \dots, X_n$, so daß* $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(X_1, \dots, X_n)$ *genau die in S einbettbaren Graphen enthält.* □

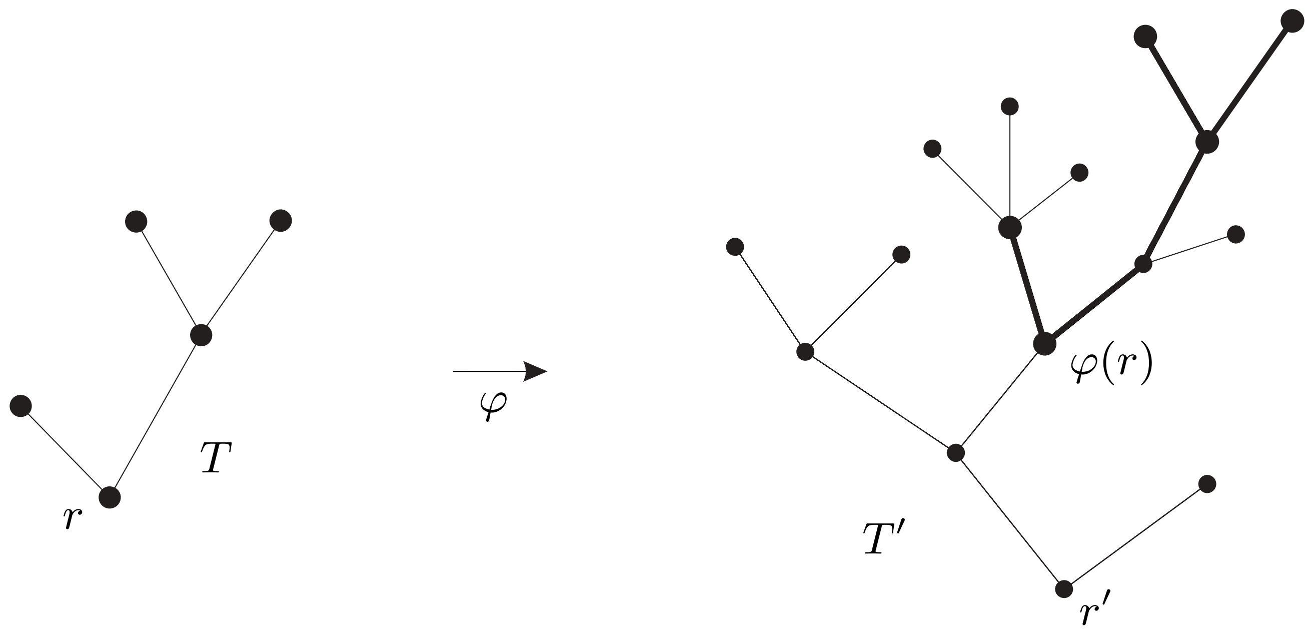
2. Wohlquasiordnung

Proposition 10.1.1. *Eine Quasiordnung $\leqslant$ auf einer Menge X ist genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn es in X bezüglich $\leqslant$ weder eine unendliche Antikette noch eine unendliche absteigende Folge $x_0 > x_1 > \ldots$ gibt.*

Korollar 10.1.2. *Ist X wohlquasigeordnet, so enthält jede unendliche Folge in X eine unendliche aufsteigende Teilfolge.*

Lemma 10.1.3. *Mit X ist auch $[X]^{<\omega}$ durch $\leqslant$ wohlquasigeordnet.*

Satz 10.2.1. (Kruskal 1960)
Die endlichen Bäume sind durch die topologische Minorenrelation wohlquasigeordnet.



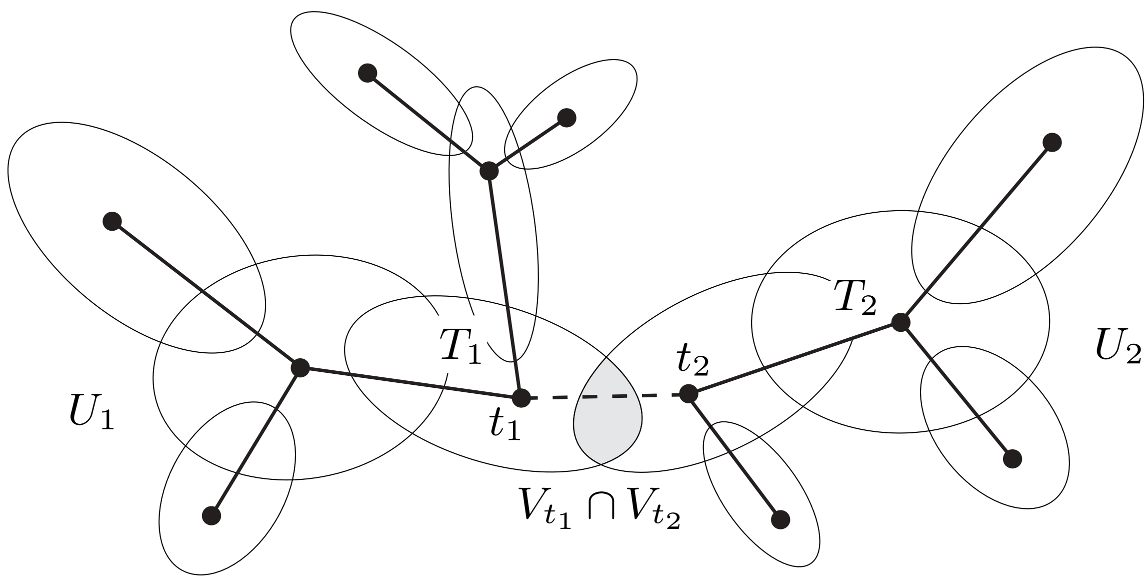
2. Baumzerlegungen:

(T1) $V(G) = \bigcup_{t \in T} V_t$;

(T2) zu jeder Kante e von G gibt es ein $t \in T$, so daß V_t beide Endecken von e enthält;

(T3) für $t_1, t_2, t_3 \in T$ mit $t_2 \in t_1 T t_3$ gilt stets $V_{t_1} \cap V_{t_3} \subseteq V_{t_2}$.

Lemma 10.3.1. *Es seien $t_1 t_2$ eine Kante von T und T_1, T_2 die Komponenten von $T - t_1 t_2$, mit $t_1 \in T_1$ und $t_2 \in T_2$. Dann trennt $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ die Eckenmengen $U_1 := \bigcup_{t \in T_1} V_t$ und $U_2 := \bigcup_{t \in T_2} V_t$ in G (Abb. 10.3.2).*



Lemma 10.3.2. *Für jedes $H \subseteq G$ ist $\big(T, (V_t \cap V(H))_{t \in T}\big)$ eine Baumzerlegung von H.* □

Lemma 10.3.3. *Angenommen, G sei ein MH mit Verzweigungsmengen U_h, $h \in V(H)$. Durch $f\colon V(G) \to V(H)$ sei jeder Ecke von G der Index der sie enthaltenden Verzweigungsmenge zugeordnet. Für alle $t \in T$ sei $W_t := \{f(v) \mid v \in V_t\}$, sowie $\mathcal{W} := (W_t)_{t \in T}$. Dann ist $(T, \mathcal{W})$ eine Baumzerlegung von H.*

3. Baumweite

$$tw(G) := \min_{(V_t)_{t\in T}} \max\{|V_t| - 1 : t \in T\}$$

Korollar aus Lemmas 10.3.2 und 10.3.3:

$$H \preccurlyeq G \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tw}(H) \leqslant \mathrm{tw}(G)\,.$$

Satz 10.3.6. (Robertson & Seymour 1990)
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sind die Graphen mit Baumweite $< k$ durch die Minorenrelation wohlquasigeordnet.

Satz 10.4.3. (Robertson & Seymour 1986)
Die Baumweite der Graphen in $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(X)$ ist genau dann beschränkt, wenn X plättbar ist.

Lemma 10.3.4. *Ist $K \subseteq G$ vollständig, so gibt es ein $t \in T$ mit $V(K) \subseteq V_t$.*

G heißt *chordal*, wenn jeder Kreis der Länge > 3 eine Sehne hat.

Proposition 10.3.10. *G ist genau dann chordal, wenn G eine Baumzerlegung in vollständige Teile hat.*

Korollar 10.3.11.

$$\mathrm{tw}(G) = \min\big\{\omega(H) - 1 \mid G \subseteq H;\ H \text{ chordal}\big\}.$$

Zu gegebenem k ist $\{G \mid \mathrm{tw}(G) < k\}$ unter Minorenbildung abgeschlossen und daher durch verbotene Minoren charakterisierbar.

Proposition 10.4.2. $\quad \mathrm{tw}(G) < 3 \Leftrightarrow G \not\succcurlyeq K^4.$

4. Beweisskizze des Minorensatzes

Wir zeigen, daß jede Folge

$$G_0, G_1, G_2, G_3, \ldots$$

endlicher Graphen ein gutes Paar bezüglich $\preccurlyeq$ enthält.

OBdA sind $G_1, G_2, \ldots \in \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(G_0) \subseteq \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$ für $n := |G_0|$, d.h. es reicht zu zeigen, daß $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$ wqo ist.

Struktursatz für $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$. (R & S)
Zu jedem n gibt es endlich viele Flächen $S_1, \ldots, S_k$, so daß jeder Graph aus $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$ eine Baumzerlegung hat in Teile, die jeweils „fast“ in ein S_i einbettbar sind.

(„Fast“ bedeutet: nach Löschen von höchstens $k = k(n)$ Ecken ist der Teil in S_i einbettbar bis auf $\leqslant k$ „Wirbel der Tiefe $\leqslant k$“.)

Verallgemeinerung des Satzes von Kruskal. (R & S)
Zum Beweis, daß $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$ wqo ist, reicht es zu zeigen, daß die Menge aller in den Baumzerlegungen der $G \in \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$ auftretenden Teile wqo ist.
(„Baumartige Gebäude aus wqo Teilen sind wieder wqo“.)

Zu zeigen ist also: jede Folge

$$H_0, H_1, H_2, H_3, \ldots$$

von fast in $S_1, \ldots, S_k$ eingebetteten Graphen ist gut.

Unendlich viele H_i liegen fast in der gleichen Fläche S_i, und wir ersetzen $H_0, H_1, H_2, \ldots$ durch diese Teilfolge. Weiter gilt wieder oBdA $H_0 \not\preccurlyeq H_1, H_2, \ldots$.

Zu zeigen ist also, daß für jede feste Fläche S und jedes feste $H_0 \underset{\text{fast}}{\hookrightarrow} S$ jede Folge

$$H_1, H_2, H_3, \ldots$$

von Graphen $H_i \underset{\text{fast}}{\hookrightarrow} S$ mit $H_0 \not\preccurlyeq H_i$ gut ist.

Struktursatz für Forb$_{\preccurlyeq}(\boldsymbol{H_0})$. (R & S)
Zu jeder Fläche S (außer der Kugeloberfläche S^2) und jedem $H_0 \underset{\text{fast}}{\hookrightarrow} S$ existiert ein k, so daß zu jedem $H \underset{\text{fast}}{\hookrightarrow} S$ eine geschlossene Kurve auf S existiert, die H in höchstens k Ecken trifft und S in ein oder zwei Flächen S', S'' niedrigeren Geschlechts zerschneidet.

Anwendung:

Die Einbettungen $H_i \underset{\text{fast}}{\hookrightarrow} S$ induzieren Einbettungen $H'_i \underset{\text{fast}}{\hookrightarrow} S'$ und $H''_i \underset{\text{fast}}{\hookrightarrow} S''$ mit $H'_i \cup H''_i = H$ und $|H'_i \cap H''_i| \leqslant k$, wobei die Flächen S', S'' für unendlich viele i gleich sind (und damit oBdA für alle i; $\to$ Teilfolge).

Mit Induktion nach dem Geschlecht von S dürfen wir annehmen, daß die Graphen $H'_i \underset{\text{fast}}{\hookrightarrow} S'$ und die Graphen $H''_i \underset{\text{fast}}{\hookrightarrow} S''$ wqo sind. Nach Lemma 10.1.3 sind dann auch die Paare (H'_i, H''_i) wqo. Wegen $|H'_i \cap H''_i| \leqslant k$ kann man daraus herleiten, daß auch die Graphen $H_i = H'_i \cup H''_i$ wqo sind – was zu zeigen war.

Induktionsanfang $S = S^2$:

Wegen $H_0 \underset{\text{(fast)}}{\hookrightarrow} S^2$ und $H_0 \not\preccurlyeq H_1, H_2, \ldots$ haben die H_i nach Satz 10.4.3 beschänkte Baumweite und sind damit nach Satz 10.3.6 wiederum wqo.