MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

POTENCIALES GENERALIZADOS DE BESSEL

DOMINGO ISRAEL CRUZ Y JOSÉ RODRÍGUEZ

En memoria del Prof. J. J. Guadalupe

Abstract. In this paper new potentials that generalize Bessel potentials are studied. We obtain an embedding theorem between the generalized Bessel potentials spaces and Lizorkin-Triebel spaces. Moreover, we defined the capacities associated to these potentials establishing some relation with well-known capacities.

Introducción

O. Frostman [8] introduce en 1935 los potenciales de Riesz, los cuales incluyen como casos límites a los potenciales clásicos (potenciales de Newton y logarítmicos), pero su nombre se debe a M. Riesz ya que en 1938 en su memoria [13] obtiene los resultados más importantes relacionados con dichos potenciales y funciones superarmónicas de orden s $(0 < s < 2)$. El núcleo de los potenciales de Riesz de orden s viene dado por

$$I_s(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right)}{2^s \pi^{n/2} \Gamma(s/2)} |x|^{s-n}, \quad 0 < s < n.$$

El problema que presentaban los potenciales de Riesz para su aplicación a problemas diferenciales, por la acotación del parámetro s $(0 < s < n)$, ya que se necesitaban potenciales de orden arbitrario, es resuelto por N. Aronszajn, en 1959, cuando introduce en la teoría de espacios funcionales y completación funcional [3], los potenciales de Bessel cuyo núcleo viene dado por

$$G_s(x) = \frac{1}{2^{\frac{n+s-2}{2}} \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} K_{\frac{n-s}{2}}(|x|)\, |x|^{\frac{s-n}{2}}, \quad s > 0, \tag{1}$$

donde $K_{\frac{n-s}{2}}$ es la función modificada de Bessel de tercera especie. Posteriormente, J. Rodríguez [14, 15] introduce los potenciales de Bessel-Clifford estudiando, entre otros temas, su relación con los módulos de continuidad y con los conocidos espacios de Lipschitz. Con el objetivo de generalizar los potenciales de Bessel se introducen unos nuevos potenciales que llamaremos potenciales generalizados de Bessel o potenciales de Krätzel, por comparecer en el núcleo la función $\eta(\rho, \beta; x)$ estudiada en [9].

2000 *Mathematics Subject Classification.* 31C15, 46E35.
Key words and phrases. Potentials, capacities, Triebel-Lizorkin spaces.

Potenciales de Krätzel. Propiedades básicas

Sea $\rho > 0$ y $s \in R$, los potenciales de Krätzel asociados a la medida μ (que tiene su soporte en $\mathbb{R}^n$), vienen dados por

$$V^{\mu}_{s,\rho}(x) = \int_{\operatorname{sop}\mu} G_{s,\rho}(x-y)\, d\mu(y),$$

donde

$$G_{s,\rho}(x) = \frac{1}{2^n\, \pi^{\frac{n}{2}}\, \Gamma(\frac{s}{2})}\, \eta\left(\rho,\ \frac{n-s}{2}+1\ ;\ \left(\frac{|x|^2}{4}\right)^{\rho}\right)$$

siendo

$$\eta(\rho,\ \beta\ ; z) = \int_0^{\infty} t^{-\beta}\, e^{-t-\frac{z}{t^{\rho}}}\, dt. \tag{2}$$

La función η ha sido ampliamente estudiada por Krätzel en [9], [10]. Nótese que para $\rho = 1$, $G_{s,1}(x)$ se reduce al conocido núcleo del potencial de Bessel.

Mostremos ahora algunas propiedades que serán útiles en lo que sigue. En primer lugar (véase [9], [10, pág. 142 (9)]),

$$\eta\,(\rho,\ \beta\ ; z^{\rho}) = \frac{1}{\rho}\, z^{1-\beta}\, \eta\left(\frac{1}{\rho},\ 1+\frac{1-\beta}{\rho}\ ; z\right). \tag{3}$$

El núcleo $G_{s,\rho}(x)$ tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$G_{s,\rho}(x) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n-s}{2\rho}\right)}{2^s\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\rho}\, |x|^{s-n}, & s < n, \\ -\frac{1}{2^s\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\, |x|^{s-n} \log\frac{|x|^2}{4}, & s = n, \\ \frac{\Gamma\left(\frac{s-n}{2}\right)}{2^s\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}, & s > n, \end{cases} \tag{4}$$

cuando $|x| \to 0^+$; y

$$G_{s,\rho}(x) \sim \gamma_1\, |x|^{(n-s-\rho)/(\rho+1)}\, e^{-\gamma_2 |x|^{2\rho/(\rho+1)}}, \tag{5}$$

cuando $|x| \to \infty$, donde $\gamma_1 = \frac{\left(\frac{2\pi}{\rho+1}\right)^{1/2} \rho^{-(n-s+1)/(2\rho+2)}}{2^{(n-s-\rho)/(\rho+1)+n}\, \pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$, $\gamma_2 = (1+1/\rho)\cdot\left(\frac{\rho}{4}\right)^{1/(\rho+1)}$.

Además, $G_{s,\rho} \in L^{p'}$ si $\alpha p > n$, siendo $1/p + 1/p' = 1$. Por otra parte, observando la representaciones integrales del núcleo de los potenciales de Bessel y el núcleo de los potenciales generalizados se tiene que, si $\rho > 1$, entonces $G_{s,\rho}(x) < G_s(x)$; y en el caso de que $\rho < 1$, se invierte la desigualdad.

Para la obtención de los siguientes lemas se recuerda que la función de Fox de orden (m, n, p, q) siendo $0 \le m \le q$, $0 \le n \le p$. En [7] y [12, pp. 626–629] se denota por

$$H = H^{m,n}_{p,q}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_1, A_1) & \dots & (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1) & \dots & (b_q, B_q) \end{matrix}\right),$$

y además se introducen los siguientes parámetros reales:

$$\alpha_1 = \begin{cases} \text{máx}\left\{-\frac{b_j}{B_j},\, j = 1, \ldots, m\right\}, & \text{para } m > 0, \\ -\infty, & \text{para } m = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} \text{mín}\left\{\frac{1-a_j}{A_j},\, j = 1, \ldots, n\right\}, & \text{para } n > 0, \\ +\infty, & \text{para } n = 0, \end{cases}$$

y

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} A_j - \sum_{j=n+1}^{p} A_j + \sum_{j=1}^{m} B_j - \sum_{j=m+1}^{q} B_j.$$

Lema 1 (véase [4]). *Sea $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$. Si $x > 0$ entonces*

$$|H(x)| \leq M_\beta\, x^{-\beta}$$

para $x > 0$, donde M_β es una constante positiva.

Lema 2. *Sea $\rho \geq 1$, entonces*

$$(\mathcal{F}G_{s,\rho})(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\Gamma(s/2)\rho}\, H_{2,2}^{1,2}\left(|\xi|^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \left(1 - \frac{n}{2\rho}, \frac{1}{\rho}\right) & \left(1 - \frac{s}{2}, 1\right) \\ (0, 1) & \left(1 - \frac{n}{2}, 1\right) \end{matrix}\right),$$

donde $\mathcal{F}$ denota la transformada de Fourier dada por

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

Demostración. Por (3),

$$G_{s,\rho}(x) = \frac{1}{2^s\, \pi^{\frac{n}{2}}\, \Gamma(\frac{s}{2})\, \rho}\, |x|^{s-n}\, \eta\left(\frac{1}{\rho},\ 1 + \frac{s-n}{2\rho}\ ; \frac{|x|^2}{4}\right).$$

Usando la representación integral (2), se sigue que

$$G_{s,\rho}(x) = \frac{1}{2^s\, \pi^{\frac{n}{2}}\, \Gamma(\frac{s}{2})\, \rho}\, |x|^{s-n} \int_0^\infty t^{-1-\frac{(s-n)}{2\rho}}\, e^{-t-\frac{|x|^2}{4t^{1/\rho}}}\, dt \tag{6}$$

y aplicando el teorema de Fubini,

$$(\mathcal{F}G_{s,\rho})(\xi) = \frac{1}{2^s\, \pi^{\frac{n}{2}}\, \Gamma(\frac{s}{2})\, \rho} \int_0^\infty t^{-1-\frac{(s-n)}{2\rho}} e^{-t} \cdot \mathcal{F}\{|x|^{s-n}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t^{1/\rho}}}\}(\xi)\, dt. \tag{7}$$

De [5] sabemos que

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = |\xi|^{\frac{1-n}{2}} \mathcal{H}_{\frac{n-2}{2}}\{z^{\frac{n-1}{2}} f(z)\}(\xi)$$

donde $\mathcal{H}_\nu$ es la transformada de Hankel de orden ν [6, p. 3]. Luego

$$\mathcal{F}\{|x|^{s-n}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t^{1/\rho}}}\}(\xi) = |\xi|^{\frac{1-n}{2}} \mathcal{H}_{\frac{n}{2}-1}\{z^{s-\frac{n+1}{2}}\, e^{-\frac{z^2}{4t^{1/\rho}}}\}(\xi).$$

Entonces, usando [6, p. 30 (14)] se obtiene

$$\mathcal{H}_{\frac{n}{2}-1}\{z^{s-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{z^2}{4t^{1/\rho}}}\}(\xi) = \frac{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}-s}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, t^{\frac{s}{2\rho}} \cdot {}_1F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{n}{2}; -t^{\frac{1}{\rho}}|\xi|^2\right), \tag{8}$$

siendo ${}_1F_1$ la función hipergeométrica confluente.

Por lo tanto, por (7) y (8),

$$(\mathcal{F}G_{s,\rho})(\xi) = \frac{1}{2^s\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{s}{2})\,\rho}\int_0^\infty t^{-1-\frac{(s-n)}{2\rho}}e^{-t}\cdot\mathcal{F}\{|x|^{s-n}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t^{1/\rho}}}\}(\xi)\,dt$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})\,\rho}\int_0^\infty t^{-1+\frac{n}{2\rho}}\,e^{-t}\cdot\,{}_1F_1\left[\frac{s}{2},\,\frac{n}{2};\,-t^{1/\rho}|\xi|^2\right]\,dt.$$

Entonces, por ser ${}_1F_1$ absolutamente convergente en $(0,\infty)$, y utilizando [12, fórmula 3, p. 627]

$$(\mathcal{F}G_{s,\rho})(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\Gamma(s/2)\rho}\,H^{1,2}_{2,2}\left(|\xi|^2\;\middle|\;\begin{matrix}\left(1-\frac{n}{2\rho},\frac{1}{\rho}\right) & \left(1-\frac{s}{2},1\right)\\ (0,1) & \left(1-\frac{n}{2},1\right)\end{matrix}\right),$$

siempre que $\rho\geq 1$. □

Nota 1. *En el caso de que $\rho=1$, la transformada de Fourier del núcleo coincide con la de los potenciales de Bessel.*

1. Espacios de Triebel-Lizorkin

Consideremos el espacio $S(\mathbb{R}^n)$ que es el espacio de funciones $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de decrecimiento rápido, que verifican la condición

$$p_N(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\sum_{|\alpha|\leq N}|D^\alpha\varphi(x)| < \infty,\quad N=1,2,3,\ldots,$$

donde $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ tiene el significado usual, con $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ multiíndice, $\alpha_i\geq 0$ son enteros y $|\alpha|=\sum_{j=1}^n\alpha_j$.

La colección numerable de seminormas anterior p_N, define una topología completa localmente convexa. Además entenderemos por $S'(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todas las distribuciones temperadas sobre $\mathbb{R}^n$, es decir, el espacio dual de $S(\mathbb{R}^n)$.

Dados $\rho\geq 1$ y $1<p<\infty$, definimos el espacio de los potenciales de Krätzel como

$$\mathcal{L}^s_{p,\rho}(\mathbb{R}^n) = \{f : f\in S'(\mathbb{R}^n),\ f=G_{s,\rho}*g,\ g\in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

y lo dotamos con la norma $\|f\|_{\mathcal{L}^s_{p,\rho}}=\|g\|_p$.

A continuación necesitamos definir el siguiente sistema de funciones.

Definición 1. *Si N es un número natural, entonces Φ_N denota el conjunto de todos los sistemas de funciones $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ con las siguientes propiedades:*

(i) $\varphi_k(x)\in S(\mathbb{R}^n)$, $(\mathcal{F}\varphi_k)(\xi)\geq 0$ *si* $k=0,1,2,\ldots$

(ii) *Se verifica*

$$\operatorname{sop}\mathcal{F}\varphi_k\subset\left\{\xi:\xi\in\mathbb{R}^n,\ 2^{k-N}\leq|\xi|\leq 2^{k+N}\right\},\quad k=1,2,\ldots$$

y $\operatorname{sop}\mathcal{F}\varphi_0\subset\left\{\xi:\xi\in\mathbb{R}^n,\ |\xi|\leq 2^N\right\}$.

(iii) *Existe un número positivo* c_1 *tal que*

$$c_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi_k)(\xi).$$

(iv) *Para cualquier muti-índice* α*, existe un número positivo* $c_2(\alpha)$ *tal que*

$$|(D^\alpha \mathcal{F}\varphi_k)(\xi)| \leq \frac{c_2(\alpha)}{|\xi|^{|\alpha|}}$$

si $k = 1, 2, \ldots$

Entonces, representamos por $\Phi = \cup_{N=1}^{\infty} \Phi_N$*.*

Lo que nos permite, a continuación, recordar la definición de los espacios de Triebel-Lizorkin dados en [16].

Definición 2. *Sea* $s \in R$*,* $0 < q \leq \infty$ *y* $0 < p < \infty$*. Consideremos* $\varphi = \{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$*; entonces*

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in S'(\mathbb{R}^n),\ \left\| 2^{sj} \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}\varphi_j \cdot \mathcal{F}f \right) \right\|_{L^p(l_q)} < \infty \right\}$$

donde la norma $\|\cdot\|_{L^p(l_q)}$ *viene dada por*

$$\|f_k\|_{L^p(l_q)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|^q \right)^{p/q} \right)^{1/p}.$$

Así mismo, será de gran utilidad la siguiente versión l_2 del conocido teorema de multiplicadores de Hörmander [16, pp. 161–165].

Proposición 1. *Dado* $m(x) = (m_{k,j})_{-\infty<k,j<\infty}$*, sean* $(\mathcal{F}m_{k,j})(\xi)$ *distribuciones regulares para todo* k *y* j*, que tienen derivadas clásicas en* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *hasta el orden* $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$*. Asumamos que existe un número positivo* B *tal que, para todo* $R > 0$ *y para todo multi-índice* α *con* $|\alpha| \leq 1 + \left[\frac{n}{2}\right]$*,*

$$\int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq 2R} \sum_{j,k=0}^{\infty} \left| D^\alpha \left(\mathcal{F}m_{k,j} \right)(\xi) \right|^2 dx \leq B^2 R^{n-2|\alpha|}. \tag{9}$$

Entonces, existe una constante positiva c *tal que*

$$\left\| \{m_{k,j} * g\} \right\|_{L^p(l_2)} \leq c \left\| g \right\|_{L^p(l_2)} \tag{10}$$

para todos los sistemas $g = \{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *de funciones medibles en* $\mathbb{R}^n$ *y para* $1 < p < \infty$*.*

Todo ello nos lleva a obtener a continuación el teorema de embebimiento entre los espacios de los potenciales generalizados de Bessel y los espacios de Triebel-Lizorkin.

Teorema 1. *Sea* $s > 0$*,* $\rho \geq 1$ *y* $1 < p < \infty$*. Entonces*

$$\mathcal{L}^s_{p,\rho}(\mathbb{R}^n) \subseteq F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n). \tag{11}$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}^s_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$; entonces $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $\|f\|_{\mathcal{L}^s_{p,\rho}} < \infty$. Además, existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = G_{s,\rho} * g$.

Consideremos $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$, luego

$$\|f\|_{F^s_{p,2}} \leq c \left\| \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}\varphi_j \cdot 2^{sj} \right) \right\} \right\|_{L^p(l_2)};$$

dado que $f = G_{s,\rho} * g$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|f\|_{F^s_{p,2}} &= c \left\| \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left(H \cdot \mathcal{F}g \cdot \mathcal{F}\varphi_j \cdot 2^{sj} \right) \right\} \right\|_{L^p(l_2)} \\ &= c \left\| \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left(2^{sj} \mathcal{F}G_{s,\rho} \cdot \mathcal{F}\varphi_j \cdot \mathcal{F}g \right) \right\} \right\|_{L^p(l_2)}, \end{aligned}$$

siendo

$$H \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\Gamma(s/2)\rho} H^{1,2}_{2,2} \left(|\xi|^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \left(1 - \frac{n}{2\rho}, \frac{1}{\rho}\right) & \left(1 - \frac{s}{2}, 1\right) \\ (0,1) & \left(1 - \frac{n}{2}, 1\right) \end{matrix} \right).$$

Definimos

$$\begin{aligned} m_{0,j}(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left(2^{sj} \mathcal{F}G_{s,\rho} \cdot \mathcal{F}\varphi_j \right) \quad \text{si } j = 0, 1, 2, \ldots, \\ m_{k,j}(x) &= 0 \quad \text{en otro caso,} \end{aligned}$$

y $\widetilde{g} = \{g_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ con $g_0 = g$ y $g_j = 0$ en otro caso. Entonces, aplicando la Proposición 1 obtenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{F^s_{p,2}} &= c \left\| \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}m_{0,j} \cdot \mathcal{F}g \right) \right\} \right\|_{L^p(l_2)} \\ &= c' \left\| \{ m_{0,j} * g \} \right\|_{L^p(l_2)} \leq c'' \|g\|_{L^p} = c'' \|f\|_{\mathcal{L}^s_{p,\rho}}. \end{aligned}$$

□

Nota 2. *En el caso $\rho = 1$, obtenemos el espacio de los potenciales de Bessel y se verifica la igualdad $\mathcal{L}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \equiv F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$.*

Capacidades

En esta sección se estudian capacidades asociadas al núcleo de los potenciales de Krätzel, así como las relaciones que se establecen con capacidades conocidas.

Denotamos por $\mathcal{M}$ al espacio vectorial de medidas de Radon complejas sobre $\mathbb{R}^n$. Pondremos un superíndice $+$ cuando se trate de elementos positivos y por $\mathcal{L}^1$ el subespacio de $\mathcal{M}$ compuesto de todas las medidas μ con $\|\mu\|_1$ = variación total de μ finita.

Exponemos a continuación el principio de acotación, que para casos particulares se reduce al principio de máximo.

Proposición 2. *Sea $s > 0$ y $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^n)$; entonces existe una constante C tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$G_{s,\rho} * \mu(x) \leq C \sup_{y \in \operatorname{sop} \mu} G_{s,\rho} * \mu(y).$$

Demostración. Se sigue de [2, p. 880, Proposition 2.2]. □

Definición 3. *Sea $1 < p < \infty$, la L^p-capacidad asociada al potencial de Krätzel la denotaremos por $B_{s,p,\rho}$ y la l^p-capacidad por $b_{s,p,\rho}$. Vienen dadas, para $A \subset \mathbb{R}^n$, por*

$$B_{s,p,\rho}(A) = \inf_f \|f\|_p^p ,$$

donde $f \in (L^p)^+$ y $G_{s,\rho} * f(x) \geq 1$ para todo $x \in A$; y

$$b_{s,p,\rho}(A) = \sup_\mu \|\mu\|_1 ,$$

donde $\mu \in (\mathcal{L}^1)^+$ con $\|G_{s,\rho} * \mu\|_{p'} \leq 1$, $1/p + 1/p' = 1$.

En el caso que cambiemos el núcleo y pongamos el de los potenciales de Bessel G_s tendremos la capacidad del potencial de Bessel ($C_{s,p}$) (véase [11] *y* [2]*).*

Una función que satisface $G_{s,\rho} * f(x) \geq 1$ para todo $x \in A$ se llama función prueba para $B_{s,p,\rho}(A)$; y una medida que cumple $\|G_{s,\rho} * \mu\|_{p'} \leq 1$, $1/p + 1/p' = 1$, se conoce como medida prueba. Además se dice que f es una distribución capacitaria de un conjunto A si $0 \leq B_{s,p,\rho}(A) < \infty$ y $\|f\|_p^p = B_{s,p,\rho}(A)$, siendo $G_{s,\rho} * f(x) \geq 1$ sobre A, $B_{s,p,\rho}$-c.t.p.

Por otro lado las siguientes definiciones serán útiles. Llamamos:

- Peso de $B_{s,p,\rho}$, definido mediante peso$(B_{s,p,\rho}) = s \cdot p$,
- Orden de $B_{s,p,\rho}$, simplemente orden$(B_{s,p,\rho}) = s$,
- Índice de $B_{s,p,\rho}$, que es ind$(B_{s,p,\rho}) = (s, p)$.

Para una referencia general sobre capacidades, véase [11] y [2].

Lema 3. *Si $\rho > 0$, $0 < \beta < s \cdot p$ y $\mu \in \mathcal{M}^+$, entonces*

$$\|G_{s,\rho} * \mu\|_{p'} \leq Q \|G_{\beta,\rho} * \mu\|_\infty^{1/p} \|\mu\|_1^{1/p'} ,$$

siendo Q constante independiente de μ.

Demostración. Tenemos que

$$G_{s,\rho} * \mu(x) = \left(G_{s,\rho} \cdot G_{\beta,\rho}^{-1/p} \cdot G_{\beta,\rho}^{1/p} \right) * \mu(x). \tag{12}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder en (12) se sigue

$$G_{s,\rho} * \mu(x) \leq \left(\left(G_{s,\rho}^{p'} \cdot G_{\beta,\rho}^{-p'/p} \right) * \mu(x) \right)^{1/p'} \cdot \left(G_{\beta,\rho} * \mu(x) \right)^{1/p} .$$

Tomando normas, es claro que

$$\|G_{s,\rho} * \mu\|_{p'} \leq \left(\int G_{s,\rho}^{p'}(x) \cdot G_{\beta,\rho}^{-p'/p}(x)\, dx \right)^{1/p'} \|G_{\beta,\rho} * \mu\|_\infty^{1/p} \|\mu\|_1^{1/p'},$$

por lo que acotando $\displaystyle\int G_{s,\rho}^{p'}(x) \cdot G_{\beta,\rho}^{-p'/p}(x)\, dx$ lograremos el resultado deseado. Para ello veamos que esta integral es finita utilizando los comportamientos asintóticos del núcleo.

En el origen distinguimos dos casos, $\alpha p \leq n$ y $\alpha p > n$. En el primer caso,

$$G_{s,\rho}^{p'}(x) \cdot G_{\beta,\rho}^{-p'/p}(x) \sim C|x|^{\frac{1}{(p-1)}(\alpha p - \beta) - n} \quad \text{cuando} \quad x \to 0,$$

cuya integral está acotada. En el segundo caso tenemos $G_{s,\rho} \in L_{p'}$ y por lo tanto

$$G^{p'}_{s,\rho}(x) \cdot G^{-p'/p}_{\beta,\rho}(x) \leq CG^{p'}_{s,\rho}(x) \quad \text{para} \quad |x| < 1.$$

Por último, en el infinito tenemos el siguiente comportamiento:

$$G^{p'}_{s,\rho}(x) \cdot G^{-p'/p}_{\beta,\rho}(x) \sim C|x|^{\frac{(\beta-\alpha p)}{(\rho+1)(p-1)} - \frac{(n-\rho)}{\rho+1}} e^{-\gamma_2|x|^{\frac{2\rho}{\rho+1}}},$$

siendo $\gamma_2 = \gamma_2 = (1 + 1/\rho) \cdot \left(\frac{\rho}{4}\right)^{1/(\rho+1)}$. De forma que concluimos la demostración. □

Proposición 3. *Si* $\operatorname{peso}(B') < \operatorname{peso}(B)$ *entonces, para todo* $A \subset \mathbb{R}^n$*, se cumple*

$$B'(A) \leq QB(A),$$

siendo Q *una constante independiente de* K*.*

Demostración. Supongamos $A = K$, K compacto, y que los índices son $\operatorname{ind}(B') = (\beta, q)$ y $\operatorname{ind}(B) = (s, p)$. Por las hipótesis $\beta q < \alpha p$; además, como $q > 1$, tenemos $\beta < \beta q < \alpha p$.

Sea $\mu = b^{q-1}_{\beta,q,\rho}(K) \cdot \nu$, donde ν es la $b_{\beta,q,\rho}$-distribución capacitaria de K ($\|\nu\|_1 = b_{\beta,q,\rho}(K)$). Por la Proposición 2 y [2, Proposition 1.9] tenemos

$$G_{\beta,\rho} * \mu(x) \leq Q_1, \quad \forall x.$$

Además, por el Lema 3, se sigue

$$\|G^\rho_s * \mu\|_{p'} \leq Q_2 \|G^\rho_\beta * \mu\|^{1/p}_\infty \|\mu\|^{1/p'}_1$$
$$\leq Q_2 \cdot Q^{1/p}_1 \cdot b^{\frac{q-1}{p'}}_{\beta,q,\rho} \|\nu\|^{1/p'}_1 = Q^{1/p} \cdot b^{\frac{q-1}{p'}}_{\beta,q,\rho} \cdot b^{\frac{1}{p'}}_{\beta,\,q,\,\rho} = Q^{1/p} b^{\frac{q}{p'}}_{\beta,q,\rho}(K),$$

siendo Q independiente de K.

Si $b_{\beta,\,q,\rho}(K) > 0$ entonces $\mu_1 = Q^{-1/p} b^{-q/p'}_{\beta,\,q,\,\rho}(K) \cdot \mu$ es una medida prueba para $b_{s,p,\rho}(K)$. Luego

$$\|G_{s,\rho} * \mu_1\|_{p'} \leq 1.$$

Ahora bien,

$$b_{s,p,\rho}(K) \geq \|\mu_1\|_1 = Q^{-1/p} \cdot b^{-\frac{q}{p'}}_{\beta,\,q,\,\rho} \cdot \|\mu\|_1$$
$$= Q^{-1/p} \cdot b^{-q/p'}_{\beta,q,\rho}(K) \cdot b^{q-1}_{\beta,\,q,\,\rho}(K) \cdot b_{\beta,q,\rho}(K) = Q^{-1/p} b^{q/p}_{\beta,q,\rho}(K),$$

esto es,

$$b_{s,p,\rho}(K) \geq Q^{-1/p} b^{q/p}_{\beta,q,\rho}(K).$$

Y por lo tanto

$$b^q_{\beta,q,\rho}(K) \leq Q b^p_{s,p,\rho}(K).$$

Entonces, aplicando [2, Proposition 1.7] obtenemos el resultado deseado para compactos.

Para $b_{\beta,\,q,\,\rho}(K) = 0$, el resultado es inmediato.

Finalmente, la desigualdad para conjuntos en general se obtiene usando el mismo argumento que en la demostración de [2, Theorem 2.1]. □

Seguidamente estudiamos algunas relaciones entre las capacidades asociadas a los potenciales de Bessel y a las generalizadas de Bessel.

Lema 4. *Dado cualquier conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$*, tenemos que:*

(i) *Si* $\rho > 1$*, entonces* $C_{s,p}(A) < B_{s,p,\rho}(A)$.

(ii) *Si* $\rho < 1$*, la desigualdad se invierte, es decir,* $B_{s,p,\rho}(A) < C_{s,p}(A)$.

Demostración. La demostración se sigue de la desigualdad existente entre los dos núcleos. Es decir, cuando $\rho > 1$, $G_{s,\rho}(x) < G_s(x)$, y si $\rho < 1$, $G_{s,\rho}(x) > G_s(x)$. □

Haciendo uso de [1, Proposition 4.2] obtenemos el siguiente resultado

Proposición 4. *Sea* $\rho \geq 1$*, entonces existe* $r_1 > 0$ *y* Q_1*, independiente de* A*, tal que*

$$Q_1^{-1} C_{s,p}(A) \leq B_{s,p,\rho}(A) \leq Q_1\, C_{s,p}(A)$$

siempre que $\operatorname{diam}(A) < r_1$.

Por último, utilizando el Lema 4 y [2, Theorem 2.2] tenemos

Proposición 5. *Si* $\alpha p \geq n$ *y* $0 < t \leq 1$*, entonces, para todo* $A \subset \mathbb{R}^n$*,*

$$\left(B_{t\alpha,p/t,1/\rho}(A)\right)^t \leq Q B_{s,p,\rho}(A),$$

donde Q *es una constante independiente de* A *y* $\rho \geq 1$.

Referencias

[1] D. R. Adams y N. G. Meyers, Thinness and Wiener criteria for non-linear potentials, *Indiana Univ. Math. J.* **22** (1972/73), 169–197.

[2] D. R. Adams y N. G. Meyers, Bessel potentials. Inclusion relations among classes of exceptional sets, *Indiana Univ. Math. J.* **22** (1972/73), 873–905.

[3] N. Aronszajn y K. T. Smith, *Theory of Bessel potentials. Part I, Studies in eigenvalue problems*, Technical Report n.º 22, University of Kansas, 1959.

[4] J. J. Betancor y C. Jerez Díaz, Boundedness and range of $\mathcal{H}$-transformation on certain weighted $\mathcal{L}_p$ spaces, *Serdica* **20** (1994), 269–297.

[5] S. Bochner, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932. Republicación: Chelsea, Nueva York, 1948.

[6] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger y F. Tricomi, *Tables of integral transforms*, vol. II, McGraw-Hill, Nueva York, 1954.

[7] C. Fox, The $\mathcal{G}$ and $\mathcal{H}$ functions as symmetrical Fourier kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.* **98** (1961), 395–429.

[8] O. Frostman, Potentiel d'equilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.* **3** (1935), 1–118.

[9] E. Krätzel, Integral transformations of Bessel-type, en *Generalized functions and operational calculus* (Proc. Conf., Varna, 1975), *Bulgar. Acad. Sci.*, Sofía (1979), 148–155.

[10] E. Krätzel y H. Menzer, Verallgemeinerte Hankel-Funktionen, *Publ. Math. Debrecen* **18** (1971), 139–147 (1972).

[11] N. G. Meyers, A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes, *Math. Scand.* **26** (1970), 255–292 (1971).

[12] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series. Vol. 3: More special functions* (traducido del ruso por G. G. Gould), Gordon and Breach Science Publishers, 1990.

[13] M. Riesz, Intégrales de Riemman-Lioville et potentiels, *Acta Szeged* **9** (1938), 1–42.

[14] J. Rodríguez, El núcleo de los potenciales de Bessel-Clifford y espacios de Lipschitz, en *Actas VII Jornadas Hispano-Lusas Matem., vol. 3* (Sant Feliu de Guíxois, 1980), *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona* **22** (1980), 63–66.
[15] J. Rodríguez, Algunos módulos de continuidad relacionados con los potenciales de Bessel-Clifford, en *Actas IX Jornadas Hispano-Lusas Matem., vol. 1* (Salamanca, 1982), *Acta Salmanticensia. Ciencias* **46**, Univ. Salamanca, Salamanca (1982), 377–381.
[16] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland, Amsterdam-Nueva York, 1978; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlín, 1978.

Departamento de Economía Aplicada, Universidad de La Laguna, 38071 La Laguna (Tenerife), Spain
Correo electrónico: dicruz@ull.es

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 38271 La Laguna (Tenerife), Spain
Correo electrónico: joroguez@ull.es