Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

$C^{1,1}$-АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ УДЕЛЬНОЙ СКАЛЯРНОЙ КРИВИЗНОЙ

И. Г. Николаев

Аннотация.

Рассматриваются выпуклые гиперповерхности в евклидовом пространстве. Интегральная скалярная кривизна выпуклой гиперповерхности определяется как слабый предел интегральных скалярных кривизн регулярных выпуклых гиперповерхностей, аппроксимирующих исходную гиперповерхность. Доказывается, что выпуклая гиперповерхность с двусторонне ограниченной положительной *удельной* кривизной и абсолютно непрерывной интегральной гауссовой кривизной может быть аппроксимирована $C^{1,1}$-гладкими выпуклыми гиперповерхностями с равномерно двусторонне ограниченными положительными удельными скалярными кривизнами. Если также, в дополнение к указанным условиям, удельная гауссова кривизна двусторонне ограничена и положительна, то сама гиперповерхность принадлежит классу $C^{1,1}$.

1 Введение

Компактное выпуклое множество в $n+1$-мерном Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащее внутренние точки, называется выпуклым *телом.* Область на границе выпуклого тела называется *выпуклой гиперповерхностью. Интегральная скалярная кривизна* борелевского подмножества $\mathcal{A}$ на регулярной выпуклой гиперповерхности $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задается интегралом скалярной кривизны:

$$\mathcal{S}\left(\mathcal{M},\mathcal{A}\right)=\int_{\mathcal{A}} S\left(X\right) dVol^{n}\left(X\right), \mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}.$$

При равномерной аппроксимации выпуклой гиперповерхности $\mathcal{M}$ регулярными выпуклыми гиперповерхностями, их интегральные скалярные кривизны слабо сходятся к некоторой конечной неотрицательной борелевской мере на исходной гиперповерхности. Эта мера, $\mathcal{S}\left(\mathcal{M},\cdot\right)$, не зависящая от выбора аппроксимирующей последовательности регулярных выпуклых гиперповерхностей, называется интегральной скалярной кривизной $\mathcal{M}$. Нетрудно видеть, что так определенная интегральная скалярная кривизна не меняется при изометриях $\mathbb{R}^{n+1}$. Более детальное обсуждение этого определения будет дано в следующем параграфе.

Теперь напомним, что объем борелевского подмножества $\mathcal{A}$, $Vol^n(\mathcal{A})$, выпуклой гиперповерхности $\mathcal{M}$ определяется как n-мерная мера Хаусдорфа множества $\mathcal{A}$. Тогда *верхняя и нижняя удельные скалярные кривизны* гиперповерхности $\mathcal{M}$ в точке $X \in \mathcal{M}$ определяются следующим образом:

$$\overline{S}_{\mathcal{M}}(X) = \overline{\lim_{\mathcal{A}\to X}} \frac{\mathcal{S}(\mathcal{M},\mathcal{A})}{Vol^n(\mathcal{A})}, \underline{S}_{\mathcal{M}}(X) = \underline{\lim_{\mathcal{A}\to X}} \frac{\mathcal{S}(\mathcal{M},\mathcal{A})}{Vol^n(\mathcal{A})},$$

где область $\mathcal{A}$ на $\mathcal{M}$ произвольным образом стягивается к точке X. Заметим, что конечность верхней удельной скалярной кривизны влечет абсолютную непрерывность интегральной скалярной кривизны. Напомним, что *интегральная гауссовая кривизна* борелевского множества $\mathcal{A}$ на выпуклой гиперповерхности $\mathcal{M}$ определяется как n-мерный объем гауссового сферического образа множества $\mathcal{A}$. *Верхняя и нижняя удельные гауссовы кривизны*, $\overline{G}_{\mathcal{M}}(X)$ и $\underline{G}_{\mathcal{M}}(X)$, гиперповерхности $\mathcal{M}$ в точке $X \in \mathcal{M}$ определяются аналогично тому как определяются верхняя и нижняя удельные скалярные кривизны. Можно доказать, что гауссова интегральная кривизна инвариантна при изометриях $\mathbb{R}^{n+1}$ с точностью до знака, когда n нечетно.

В дальнейшем, $B_r^n(x_0)$ обозначает открытый шар $|x - x_0| < r$ в $\mathbb{R}^n$. Для выпуклой гиперповерхности $\mathcal{M}$: $x_{n+1} = F(x), x \in B_r^n(x_0)$, $X(x) = (x, F(x))$ обозначает ее параметризацию. Основным результатом настоящей статьи является

Теорема 1. *(Аппроксимационная теорема)*
Пусть $\mathcal{M}$: $x_{n+1} = F(x), x \in B_r^n(x_0)$ есть выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\Lambda = sup_{x\in B_r^n(x_0)} |F(x) - F(x_0)|$. Тогда, если в каждой точке $x \in B_r^n(x_0)$ выполняется

$$0 < \underline{\kappa} \le \underline{S}_{\mathcal{M}}(X(x)) \le \overline{S}_{\mathcal{M}}(X(x)) \le \overline{\kappa} < \infty, \tag{1}$$

и интегральная гауссова кривизна гиперповерхности $\mathcal{M}$ явлется абсолютно непрерывной мерой, то для каждого $0 < \rho < r$ существует последовательность выпуклых гиперповерхностей

$$\left\{\mathcal{M}_m : x_{n+1} = F_m(x), x \in B_\rho^n(x_0)\right\}_{m=1,2,\ldots}$$

таких что для каждого m,
A1. $F_m \in C^{1,1}\left(B_\rho^n(x_0)\right)$;
A2. $\sup_{x\in B_\rho^n(x_0)} |F_m(x) - F(x)| < 1/m$;
A3. Существуют постоянные $0 < \underline{\kappa}' = \underline{\kappa}'(r,\rho,\underline{\kappa},\overline{\kappa},\Lambda,n) \le \overline{\kappa}' = \overline{\kappa}'(r,\rho,\underline{\kappa},\overline{\kappa},\Lambda,n) < +\infty$, такие что для верхней и нижней удельных кривизн гиперповерхности $\mathcal{M}_m$ выполняются неравенства:

$$0 < \underline{\kappa}' \le \underline{S}_{\mathcal{M}_m}(X(x)) \le \overline{S}_{\mathcal{M}_m}(X(x)) \le \overline{\kappa}', x \in B_\rho^n(x_0).$$

Заметим, что Теорема 1 распространяет соответствующий результат работы [5] на произвольную размерность. Аппроксимационная теорема сводит изучение вопросов, связанных с регулярностью выпуклой гиперповерхности с двусторонне ограниченной положительной удельной скалярной кривизной к построения априорных оценок для $C^{1,1}$-гладкой выпуклой гиперповерхности с аналогичными оценками для верхней и нижней удельных скалярных кривизн. В двумерном случае, указанный метод позволил получить полную информацию о регулярности выпуклых поверхностей с двусторонне ограниченной положительной удельной кривизной [5]. Автор предполагает исследовать регулярность выпуклых гиперповерхностей произвольной размерности в последующих работах. В этой статье мы выводим следующую теорему о регулярности выпуклых гиперповерхностей из некоторых фактов, полученных в ходе доказательства аппроксимационной теоремы и недавних результатов В. Бангерта [2].

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$: $x_{n+1} = F(x), x \in B_r^n(x_0)$ есть выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\Lambda = sup_{x\in B_r^n(x_0)} |F(x) - F(x_0)|$. Тогда, если в каждой точке $x \in B_r^n(x_0)$ выполняется (1)* и

$$0 < \underline{\kappa}'' \le \underline{G}_{\mathcal{M}}(X(x)) \le \overline{G}_{\mathcal{M}}(X(x)) \le \overline{\kappa}'' < \infty, \tag{2}$$

то тогда $F \in C^{1,1}\left(B_\rho^n(x_0)\right)$ и $|F|_{C^{1,1}\left(B_\rho^n(x_0)\right)} \le C\left(r, \rho, \underline{\kappa}, \overline{\kappa}, \underline{\kappa}'', \overline{\kappa}'', \Lambda, n\right)$ для каждого $0 < \rho < r$. В частности, $\mathcal{M}$ – строго выпуклая гиперповерхность.

Настоящая работа использует идеи совместных исследований в [5] с моим коллегой и другом С.З. Шефелем. К сожалению, преждевременная смерть С.З. Шефеля не позволила нам реализовать эти идеи совместно. В то время как только автор полностью ответственен за правильность и научную ценность данной статьи, автор с благодарностью отмечает вклад С.З. Шефеля.

2 Элементарные симметрические меры кривизны

Пусть $\mathcal{M}$ – регулярная выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Если $k_i(\mathcal{M}, X)$, $i = 1, 2, ..., n$, главные кривизны гиперповерхности $\mathcal{M}$ в некоторой ее точке $X = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ относительно вектора внешней нормали, то элементарные симметрические кривизны $H_j(\mathcal{M}, X)$, $j = 1, 2, ..., n$, определяются следующим образом:

$$H_j = \binom{n}{j}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_j \le n} k_{i_1} k_{i_2} ... k_{i_j}. \tag{3}$$

Пусть теперь $\mathcal{M} \subseteq \partial\mathcal{K}$ – выпуклая гиперповерхность; здесь $\mathcal{K}$ – выпуклое тело в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пара (X, ν), где $X \in \mathcal{M}$ и ν есть единичный вектор внешней нормали к гиперповерхности $\mathcal{M}$ в точке X, называется *опорным элементом.* Обобщенное *нормальное расслоение*, $Nor(\mathcal{M})$, определяется как множество всех опорных елементов. Мы также положим $Nor_X(\mathcal{M}) =$

$\{\nu \mid (X,\nu) \in Nor(\mathcal{M})\}$. Если B^{n+1} – единичный шар $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + x_{n+1}^2 \leq 1$, то $S^n = \partial B^{n+1}$ и $\Sigma = \mathbb{R}^{n+1} \times S^n$. Заметим, что $Nor(\mathcal{M}) \subseteq \Sigma$.

Пусть $\delta > 0$. Внешнее параллельное тело $\mathcal{K}$ на расстоянии δ есть сумма Минковского $\mathcal{K}_\delta = \mathcal{K} + \delta B^{n+1} = \left\{X + \delta Y \mid X \in \mathcal{K},\ Y \in B^{n+1}\right\}$. Очевидно, что $\mathcal{K}_\delta$ есть множество точек $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких что $dist(X,\mathcal{K}) \leq \delta$. Также ясно, что

$$\mathcal{K}_\delta = \mathcal{K} \cup \{X + t\nu \mid \nu \in Nor_X(\partial\mathcal{K}),\ 0 \leq t \leq \delta\}.$$

Для $X \in \mathcal{K}_\delta \backslash \mathcal{K}$, пусть $p(\mathcal{K},X)$ обозначает точку $\mathcal{K}$, ближайшую к точке X, и пусть

$$\nu(\mathcal{K},X) = [X - p(\mathcal{K},X)] / |X - p(\mathcal{K},X)|.$$

Легко видеть, что $(p(\mathcal{K},X), \nu(\mathcal{K},X)) \in Nor(\partial\mathcal{K})$; следовательно, мы можем определить непрерывную функцию $f_\delta : \mathcal{K}_\delta \backslash \mathcal{K} \to \Sigma$ следующим образом: $f_\delta(X) = (p(\mathcal{K},X), \nu(\mathcal{K},X))$. Для топологического пространства $\mathfrak{X}$, обозначим через $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ его σ-алгебру борелевских подмножеств пространства $\mathfrak{X}$. Если $\eta \in \mathfrak{B}(\Sigma)$, то множество $M_\delta(\mathcal{K},\eta) = f_\delta^{-1}(\eta)$ есть измеримое по Лебегу подмножество множества $\mathcal{K}_\delta \backslash \mathcal{K}$. Наконец определим $\mu_\delta(\mathcal{K},\eta)$ как $n+1$-мерную меру Лебега множества $M_\delta(\mathcal{K},\eta)$. Известно, что существуют конечные неотрицательные меры $\Theta_j(\mathcal{K},\cdot)$, $j = 0,1,2,...,n$, определенные на $\mathfrak{B}(\Sigma)$, такие что для каждого $\eta \in \mathfrak{B}(\Sigma)$ и для каждого $\delta > 0$,

$$\mu_\delta(\mathcal{K},\eta) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \delta^{n+1-j} \binom{n+1}{j} \Theta_j(\mathcal{K},\eta).$$

Элементарные симметрические меры кривизны
$\mathfrak{H}_j(\mathcal{K},\cdot) : \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) \to \mathbb{R}$, $j = 1,2,...,n$, определяются равенством

$$\mathfrak{H}_j(\mathcal{K},\beta) = \Theta_{n-j}(\mathcal{K},\beta \times S^n), \beta \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right).$$

Мера

$$Vol^n(\partial\mathcal{K},\cdot) : \beta \to \Theta_n(\mathcal{K},\beta \times S^n)$$

совпадает с n-мерной мерой Хаусдорфа множества $\beta \cap \partial\mathcal{K}$. В случае регулярной гиперповерхности $\partial\mathcal{K}$, $Vol^n(\partial\mathcal{K},\cdot)$ есть *n-мерный объем.*

Известно, что $\mathfrak{H}_j(\mathcal{K},\cdot)$ – борелевская мера на $\mathbb{R}^{n+1}$; мера $\mathfrak{H}_j(\mathcal{K},\cdot)$ сконцентриривана на $\partial\mathcal{K}$; мера $\mathfrak{H}_j(\mathcal{K},\cdot)$ определена локально: если $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ выпуклые тела такие что $\partial\mathcal{K}_1 \cap \beta = \partial\mathcal{K}_2 \cap \beta$, то $\mathfrak{H}_j(\mathcal{K}_1,\beta) = \mathfrak{H}_j(\mathcal{K}_2,\beta)$. Таким образом, если $\beta \cap \partial\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$, то $\mathfrak{H}_j(\mathcal{K},\beta)$ остается одним и тем же для каждого выпуклого тела $\mathcal{K}$, такого что $\mathcal{M} \subseteq \partial\mathcal{K}$. Эта мера, $\mathfrak{H}_j(\mathcal{M},\beta)$, которая зависит от $\mathcal{M}$, но не от $\mathcal{K}$, называется элементарной симметрической мерой кривизны выпуклой гиперповерхности $\mathcal{M}$. Если же $\mathcal{M}$ регулярная выпуклая гиперповерхность, то

$$\mathfrak{H}_j(\mathcal{M},\beta) = \int_{\beta\cap\mathcal{M}} H_j(\mathcal{M},X)\, dVol^n(X), j = 1,2,...,n.$$

Нетрудно видеть, что в случае регулярных гиперповерхностей, $\mathfrak{H}_2(\mathcal{M},\beta)$ совпадает с интегральной скалярной кривизной $\mathcal{S}(\mathcal{M},\beta\cap\mathcal{M})$. Известно, что если $\mathcal{M}_m\to\mathcal{M}$ при $m\to\infty$, то $\mathfrak{H}_2(\mathcal{M}_m,\beta)\to\mathfrak{H}_2(\mathcal{M},\beta)$ для каждого борелевского множества β. Поэтому $\mathcal{S}(\mathcal{M},\beta\cap\mathcal{M})=\mathfrak{H}_2(\mathcal{M},\beta)$ и в случае общих выпуклых гиперповерхностей. Доказательства приведенных выше свойств мер кривизны могут быть найдены в книге Р. Шнейдера [8, параграф 4.2].

3 Нормальные точки

Выпуклая гиперповерхность $\mathcal{M}$ представляется локально графиком выпуклой функции [3, Теорема 1.12] $x_{n+1}=F(x), x=(x_1,x_2,...x_n)\in B_r^n(x_0)$. Если $\mathcal{A}\subseteq B_r^n(x_0)$, то мы положим для краткости $\mathcal{A}^*=X(\mathcal{A})$. Следующие свойства выпуклых функций хорошо известны: всякая выпуклая функция $x_{n+1}=F(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица на каждом компактном подмножестве (доказательство может быть найдено в [8, Теорема 1.5.1]); каждая выпуклая функция $x_{n+1}=F(x)$ дважды дифференцируема почти всюду в следующем смысле: для почти всех $x\in B_r^n(x_0)$ существуют $a_i(x)$, $b_{ij}(x)$ $(b_{ij}(x)=b_{ji}(x))$, $i,j=1,2,...,n$, такие что

$$\left|F(x+u)-F(x)-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,u_i-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)\,u_iu_j\right|=|u|^2\,\varepsilon(x,u),$$

где $\varepsilon(x,u)\to 0$ при $u\to 0$ (для $n=2$, это доказано Г. Буземаном и В. Феллером в [4]; для $n>2$, это теорема А.Д. Александрова [1]).

Точка, в которой выпуклая функция $x_{n+1}=F(x)$ дважды дифференцируема в смысле приведенного выше определения, называется *нормальной* точкой функции $F(x)$. А.Д. Александров [1, стр. 9] доказал, что в каждой нормальной точке функция $F(x)$ имеет обычный второй дифференциал, при этом $a_i(x)=\partial F(x)/\partial x_i$ и $b_{ij}(x)=\partial^2F(x)/\partial x_i\partial x_j$. Множество всех нормальных точек выпуклой функции $F(x)$ обозначается через $\mathcal{N}_F$. Соответственно, множество нормальных точек гиперповерхности $\mathcal{M}$ есть $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}=\mathcal{N}_F^*$. Заметим, что в каждой нормальной точке $X\in\mathcal{M}$ определены главные кривизны $k_j(\mathcal{M},X)$ и они выражаются через $a_i(x)$ и $b_{ij}(x)$ точно также как и для регулярных гиперповерхностей, и также выполняется классическая теорема Родригеса: k является главной кривизной тогда и только тогда когда $d\nu=kdX$ (для $n=2$, доказательство может быть найдено в [4]; доказательство для многомерного случая аналогично).

Элементарные симметрические кривизны $\mathfrak{H}_j(\mathcal{M},\cdot):\mathcal{N}_{\mathcal{M}}\to\mathbb{R}$, $j=1,2,...,n$, определяются формулой (3). Из сказанного следует, что $Vol^n(\mathcal{M}\backslash\mathcal{N}_{\mathcal{M}})=0$. В заключение этого параграфа отметим следующее важное свойство элементарных мер кривизны: для каждого $X\in\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ существует последовательность $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1,2,...}\subset\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)\cap\mathcal{M}$, стягивающаяся к точке X такая что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\mathfrak{H}_j(\mathcal{M},\mathcal{G}_m)}{Vol^n(\mathcal{M},\mathcal{G}_m)}=H_j(\mathcal{M},X) \tag{4}$$

(см. [1, стр. 24], для $j=n$, и [7, Лемма 3.6], для $j=1,2,...,n-1$).

4 Доказательство аппроксимационной теоремы

Выпуклая гиперповерхность $\mathcal{M}_\delta=\{X+\delta\nu \mid (X,\nu)\in Nor(\mathcal{M})\}$ называется *δ-параллельной* выпуклой гиперповерхности $\mathcal{M}$. Очевидно, что δ-параллельная выпуклая гиперповерхность расположена на границе параллельного тела $\mathcal{K}_\delta$. Прежде чем мы перейдем к доказательству аппроксимационной теоремы, заметим, что δ-параллельная выпуклая гиперповерхность $\mathcal{M}_\delta$ является $C^{1,1}$гладкой. Доказательство этого утверждения практически такое же как и в двумерном случае, см. [5, параграф 1]. Теорема 1 будет доказана в несколько шагов.

Шаг 1. Для $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{M}$ положим $\widetilde{\mathcal{G}}=\left\{\widetilde{X}\in\mathcal{M}_\delta \mid p\left(K,\widetilde{X}\right)\in\mathcal{G}\right\}$. Пусть также $Vol^n(\mathcal{M},\cdot)=Vol^n(\cdot)$ и $Vol^n(\mathcal{M}_\delta,\cdot)=Vol^n_\delta(\cdot)$. Утверждается, что $Vol^n_\delta\left(\mathcal{M}_\delta\backslash\widetilde{\mathcal{N}_\mathcal{M}}\right)=0$. Ясно, что утверждение Шага 1 будет доказано как только мы покажем что в каждой точке $\widetilde{X}\in\mathcal{N}_{\mathcal{M}_\delta}\cap\left(\mathcal{M}_\delta\backslash\widetilde{\mathcal{N}_\mathcal{M}}\right)$ кривизна $H_1\left(\mathcal{M}_\delta,\widetilde{X}\right)$ положительна. Действительно, тогда

$$0=\mathfrak{H}_n(\mathcal{M}\backslash\mathcal{N}_\mathcal{M})=\mathfrak{H}^\delta_n\left(\mathcal{M}_\delta\backslash\widetilde{\mathcal{N}_\mathcal{M}}\right).$$

Если $Vol^n\left(\mathcal{M}_\delta,\mathcal{M}_\delta\backslash\widetilde{\mathcal{N}_\mathcal{M}}\right)>0$, то $\mathfrak{H}^\delta_n\left(\mathcal{M}_\delta\backslash\widetilde{\mathcal{N}_\mathcal{M}}\right)>0$, противоречие.

Теперь приступим к доказательству $H_1\left(\mathcal{M}_\delta,\widetilde{X}\right)>0$. Для краткости, положим $\mathfrak{H}_j(\mathcal{M}_\delta,\cdot)=\mathfrak{H}^\delta_j(\cdot)$, $H_j(\mathcal{M}_\delta,\cdot)=H^\delta_j(\cdot)$ и $\mathcal{N}_{\mathcal{M}_\delta}=\mathcal{N}_\delta$. Согласно (4), для каждого $\widetilde{X}\in\mathcal{N}_\delta\cap\left(\mathcal{M}_\delta\backslash\widetilde{\mathcal{N}_\mathcal{M}}\right)$ и $j=1,2,...,n$, найдется последовательность областей $\widetilde{\mathcal{G}_m}\subset\mathcal{M}_\delta$, сходящаяся к точке $\widetilde{X}$ такая что

$$\mathfrak{H}^\delta_j\left(\widetilde{\mathcal{G}_m}\right)/Vol^n_\delta\left(\widetilde{\mathcal{G}_m}\right)\to H^\delta_j\left(\widetilde{X}\right)$$

при $m\to\infty$. По формуле (4.2.7) в [8],

$$Vol^n_\delta\left(\widetilde{\mathcal{G}}\right)=Vol^n(\mathcal{G})+\sum_{i=1}^{n}\delta^i\binom{n}{i}\mathfrak{H}_i(\mathcal{G})$$

и

$$\mathfrak{H}^\delta_j\left(\widetilde{G}\right)=\sum_{i=0}^{n-j}\delta^i\binom{n-j}{i}\mathfrak{H}_{j+i}(\mathcal{G}). \tag{5}$$

Пусть $\mathfrak{H} = \sum_{i=1, i\neq 2}^{n} \delta^i \binom{n}{i} \mathfrak{H}_i$, так что $Vol_\delta^n \left(\widetilde{\mathcal{G}}\right) = Vol^n (\mathcal{G}) + \mathfrak{H}(\mathcal{G}) + \delta^2 \mathfrak{H}_2 (\mathcal{G})$. Оценим $\mathfrak{H}_1^\delta$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_1^\delta \left(\widetilde{\mathcal{G}}\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} \delta^i \binom{n-1}{i} \mathfrak{H}_{i+1} (\mathcal{G}) = \frac{1}{\delta n} \sum_{i=1}^{n} \delta^i \binom{n}{i} (n-i) \mathfrak{H}_i (\mathcal{G}) \\ &\geq \frac{\mathfrak{H}(\mathcal{G}) + \delta^2 \mathfrak{H}_2 (\mathcal{G})}{\delta n}. \end{aligned}$$

Следовательно, мы приходим к оценке:

$$H_1^\delta \left(\widetilde{X}\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathfrak{H}_1^\delta \left(\widetilde{G_m}\right)}{Vol_\delta^n \left(\widetilde{G_m}\right)} \geq \frac{1}{\delta n} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\mathfrak{H}(\mathcal{G}_m) + \delta^2 \mathfrak{H}_2 (\mathcal{G}_m)}{Vol^n (\mathcal{G}_m) + \mathfrak{H}(\mathcal{G}_m) + \delta^2 \mathfrak{H}_2 (\mathcal{G}_m)}.$$

Если требуется, переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что возможны только следующие случаи: (a) для каждого m, $Vol^n (\mathcal{G}_m) > 0$ и $\mathfrak{H}(\mathcal{G}_m) / Vol^n (\mathcal{G}_m) \to +\infty$; (b) для каждого m, $Vol^n (\mathcal{G}_m) > 0$ и $\mathfrak{H}(\mathcal{G}_m) / Vol^n (\mathcal{G}_m) \to h_0 < +\infty$; (c) для каждого m, $Vol^n (\mathcal{G}_m) = 0$ и $\mathfrak{H}(\mathcal{G}_m) > 0$. Заметим, что если $Vol^n (\mathcal{G}_m) = 0$ и $\mathfrak{H}(\mathcal{G}_m) = 0$, то $Vol_\delta^n (\mathcal{G}_m) = 0$, что невозможно. Не ограничивая общности, мы также можем предположить, что в случаях (a) и (b) существует конечный или бесконечный предел $\lim_{m\to\infty} \mathfrak{H}_2 (\mathcal{G}_m) / Vol^n (\mathcal{G}_m)$. Поскольку

$$\begin{aligned} H_1^\delta \left(\widetilde{X}\right) &\geq \frac{1}{\delta n} \\ &\times \frac{\lim_{m\to\infty} \mathfrak{H}(\mathcal{G}_m) / Vol^n (\mathcal{G}_m) + \delta^2 \lim_{m\to\infty} \mathfrak{H}_2 (\mathcal{G}_m) / Vol^n (\mathcal{G}_m)}{1 + \lim_{m\to\infty} \mathfrak{H}(\mathcal{G}_m) / Vol^n (\mathcal{G}_m) + \delta^2 \lim_{m\to\infty} \mathfrak{H}_2 (\mathcal{G}_m) / Vol^n (\mathcal{G}_m)}, \end{aligned}$$

в случае (a), учитывая (1), имеем $H_1^\delta \left(\widetilde{X}\right) \geq 1/\delta n > 0$, и в случае (b), применяя (1), получаем $H_1^\delta \left(\widetilde{X}\right) \geq \left(h_0 + \delta^2 \underline{\kappa}\right) / \left[\delta n \left(1 + h_0 + \delta^2 \overline{\kappa}\right)\right] > 0$. В случае (c), имеем

$$\mathfrak{H}(\mathcal{G}_m) + \delta^2 \mathfrak{H}_2 (\mathcal{G}_m) = \mathfrak{H}(\mathcal{G}_m) \text{ и } Vol^n (\mathcal{G}_m) + \mathfrak{H}(\mathcal{G}_m) + \delta^2 \mathfrak{H}_2 (\mathcal{G}_m) = \mathfrak{H}(\mathcal{G}_m),$$

откуда $H_1^\delta \left(\widetilde{X}\right) \geq 1/\delta n > 0$, что и требовалось.

Шаг 2. Для $X \in \mathcal{N}_\mathcal{M}$, обозначим через $\widetilde{X}$ однозначно определенную точку на $\mathcal{M}_\delta$ такую что $\widetilde{X} = X + \delta \nu (X)$. Сперва мы выведем формулу для $H_1^\delta \left(\widetilde{X}\right)$, применив теорему Родригеса. Если $k_i (X)$ главная кривизна поверхности $\mathcal{M}$ в нормальной точке X, то $d\nu (X) = k_i (X) dX$ и dX задает соответствующее главное направление. Следовательно, $d\widetilde{X} = dX + \delta d\nu = (1 + \delta k_i) dX$. Пусть $\nu_\delta \left(\widetilde{X}\right)$ – однозначно определенный единичный внешний нормальный вектор к $\mathcal{M}_\delta$ в точке $\widetilde{X}$. Поскольку $\nu_\delta \left(\widetilde{X}\right) = \nu (X)$, то $d\nu_\delta = d\nu = k_i dX = \left[k_i/(1+\delta k_i)\right] d\widetilde{X}$. Таким образом, если $k_i(X), i = 1, 2, ...n$, главные кривизны в точке X, то

$$k_i^\delta\left(\widetilde{X}\right) = \frac{k_i(X)}{1+\delta k_i(X)}, i = 1, 2, ..., n,$$

главные кривизны поверхности $\mathcal{M}_\delta$ в точке $\widetilde{X}$. Итак,

$$H_1^\delta = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{1+\delta k_j} \ = \ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j(1+\delta k_1)...(\widehat{1+\delta k_j})...(1+\delta k_n)}{(1+\delta k_1)(1+\delta k_2)...(1+\delta k_n)},$$

где $(\widehat{1+\delta k_j})$ означает, что сомножитель $1+\delta k_j$ пропущен в соответствующем произведении. Нетрудно видеть, что

$$(1+\delta k_1)...(1+\delta k_n) = 1 + n\delta H_1(X) + ... + \delta^j\binom{n}{j}H_j(X) + ... + \delta^n H_n(X).$$

Мы также получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}k_j(1+\delta k_1)...(\widehat{1+\delta k_j})...(1+\delta k_n)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\delta^s\sum_{j=1}^{n}\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_s\le n}k_j k_{i_1}...k_{i_s}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\delta^s\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{s+1}\le n}(s+1)k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_{s+1}}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1}\delta^s\binom{n}{s+1}\frac{s+1}{n}H_{j+s} = \sum_{s=0}^{n-1}\delta^s\binom{n-1}{s}H_{s+1}.$$

Теперь нетрудно получить формулу для $H_1^\delta\left(\widetilde{X}\right)$:

$$H_1^\delta\left(\widetilde{X}\right) = \frac{H_1(X) + ... + \binom{n-1}{j}\delta^j H_{j+1}(X) + ... + \delta^n H_n(X)}{1 + n\delta H_1(X) + ... + \delta^j\binom{n}{j}H_j(X) + ... + \delta^n H_n(X)}.$$

Аналогичные выкладки приводят к следующему выражению для $H_2^\delta\left(\widetilde{X}\right)$:

$$H_2^\delta\left(\widetilde{X}\right) = \frac{H_2(X) + ... + \delta^j\binom{n-2}{j}H_{j+2}(X) + ... + \delta^n H_n(X)}{1 + n\delta H_1(X) + ... + \delta^j\binom{n}{j}H_j(X) + ... + \delta^n H_n(X)}.$$

В заключение отметим, что поскольку $\mathcal{M}_\delta$ – $C^{1,1}$-гладкая гиперповерхность и, согласно Шагу 1, $Vol_\delta^n\left(\mathcal{M}_\delta\backslash\widetilde{\mathcal{N}_\mathcal{M}}\right) = 0$, получаем: $\mathfrak{H}_j^\delta\left(\widetilde{\mathcal{G}}\right) = \int_{\widetilde{\mathcal{G}}}H_j^\delta\left(\widetilde{X}\right)dVol_\delta^n\left(\widetilde{X}\right)$, для каждого $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{M}$ и $j = 1, 2, ..., n$.

Шаг 3. Ясно, что H_2^δ не имеет равномерной положительной оценки снизу. Для того, чтобы исправить эту ситуацию, мы рассматриваем семейство инверсий $\mathcal{I}_{\sigma(\delta)}$, которые увеличивают скалярную кривизну, сохраняя ее ограниченность. Пусть $\widetilde{X_0} \in \mathcal{M}_\delta$ и $P_{\delta,\sigma} = \widetilde{X_0} + \sigma\nu_\delta\left(\widetilde{X_0}\right)$. Тогда инверсия $\mathcal{I}_{\delta,\sigma}$ определяется соотношением

$$\mathcal{I}_{\delta,\sigma}\left(\widetilde{X}\right) = \sigma^2 \frac{\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}\right|^2} + P_{\delta,\sigma},$$

то есть, $\mathcal{I}_{\delta,\sigma}$ – инверсия относительно сферы радиуса σ с центром в точке $P_{\delta,\sigma}$, проходящей через точку $\widetilde{X_0}$. Мы обзначаем через $\mathcal{M}_{\delta,\sigma}$ образ поверхности $\mathcal{M}_\delta$ при инверсии $\mathcal{I}_{\delta,\sigma}$. Нашей целью является вывод формулы для $H_2\left(\mathcal{M}_{\delta,\sigma},\cdot\right)$ через H_j. Сначала напомним формулу для дифференциала инверсии:

$$d\mathcal{I}_{\delta,\sigma}\left(\widetilde{X}\right)u = \frac{\sigma^2}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}\right|^2}\left(u - 2 < \frac{\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}\right|}, u > \frac{\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}\right|}\right),$$

где $<\cdot,\cdot>$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$, и отображение

$$u \to u - 2 < \frac{\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}\right|}, u > \frac{\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}\right|}$$

является ортогональным преобразованием (см. [6]). Поскольку $\mathcal{I}_{\delta,\sigma}$ конформное отображение, легко получается формула для $\nu_{\delta,\sigma}$:

$$\nu_{\delta,\sigma} = \nu_\delta - 2 < \widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}, \nu_\delta > \frac{\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}\right|^2}.$$

Если $X \in \mathcal{N}_m$, то

$$\begin{aligned} d\nu_{\delta,\sigma} = &\left[d\nu_\delta - 2\frac{\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}\right|^2} < \widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}, d\nu_\delta >\right] \\ &-2 < \widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}, \nu_\delta > \left[\frac{d\widetilde{X}}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}\right|^2} - 2\frac{\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}\right|^4} < \widetilde{X} - P_{\delta,\sigma}, d\widetilde{X} >\right]. \end{aligned}$$

Поскольку $d\widetilde{X}$ главное направление, то для $\mathcal{M}_\delta$ выполняется $d\nu_\delta = k_i^\delta d\widetilde{X}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} d\nu_{\delta,\sigma} &= \left[\frac{d\widetilde{X}}{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^2} - 2\frac{\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}}{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^4} < \widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}, d\widetilde{X} >\right] \\ &\quad \times \left[\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^2 k_i^\delta - 2 < \widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}, \nu_\delta >\right] \\ &= \frac{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^2}{\sigma^2}\left(k_i^\delta + 2\frac{< P_{\delta,\sigma}-\widetilde{X}, \nu_\delta >}{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^2}\right) d\left(\mathcal{I}_{\delta,\sigma}\circ\widetilde{X}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме Родригеса,

$$k_i^{\delta,\sigma} = \frac{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^2}{\sigma^2}\left(k_i^\delta + 2\frac{< P_{\delta,\sigma}-\widetilde{X}, \nu_\delta >}{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^2}\right),$$

откуда

$$\begin{aligned} H_2^{\delta,\sigma} &= \binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\le i<j\le n} k_i^{\delta,\sigma}k_j^{\delta,\sigma} = \binom{n}{2}^{-1}\frac{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^4}{\sigma^4} \\ &\quad \times \sum_{1\le i<j\le n}\left(k_i^\delta + 2\frac{< P_{\delta,\sigma}-\widetilde{X}, \nu_\delta >}{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^2}\right)\left(k_j^\delta + 2\frac{< P_{\delta,\sigma}-\widetilde{X}, \nu_\delta >}{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^2}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^4}{\sigma^4}\left[4\frac{< P_{\delta,\sigma}-\widetilde{X}, \nu_\delta >^2}{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^4} + 4\frac{< P_{\delta,\sigma}-\widetilde{X}, \nu_\delta >}{\left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|^2}H_1^\delta + H_2^\delta\right].$$

Положим для краткости $c_{\delta,\sigma} = \cos\angle\left(P_{\delta,\sigma}-\widetilde{X}, \nu_\delta\right)$ и $\xi_{\delta,\sigma} = \left|\widetilde{X}-P_{\delta,\sigma}\right|/\sigma$. Тогда имеем $< P_{\delta,\sigma}-\widetilde{X}, \nu_\delta >= c_{\delta,\sigma}\xi_{\delta,\sigma}\sigma$. Теперь можно переписать формулу для $H_2^{\delta,\sigma}$ в более компактной форме:

$$H_2^{\delta,\sigma} = \xi_{\delta,\sigma}^4\left[\frac{1}{\sigma^2}\frac{4c_{\delta,\sigma}^2}{\xi_{\delta,\sigma}^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{4c_{\delta,\sigma}}{\xi_{\delta,\sigma}}H_1^\delta + H_2^\delta\right].$$

Наконец, используя Шаг 2, получаем

$$\begin{aligned} H_2^{\delta,\sigma}\left(\mathcal{I}_{\delta,\sigma}\left(\widetilde{X}\right)\right) &= \xi_{\delta,\sigma}^4\left[\frac{1}{\sigma^2}\frac{4c_{\delta,\sigma}^2}{\xi_{\delta,\sigma}^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{4c_{\delta,\sigma}}{\xi_{\delta,\sigma}}\right. \\ &\quad \times \frac{H_1(X) + \dots + \binom{n-1}{j}\delta^j H_{j+1}(X) + \dots + \delta^{n-1}H_n(X)}{1 + n\delta H_1(X) + \dots + \delta^j\binom{n}{j}H_j(X) + \dots + \delta^n H_n(X)} \\ &\quad \left. + \frac{H_2(X) + \dots + \delta^j\binom{n-2}{j}H_{j+2}(X) + \dots + \delta^{n-2}H_n(X)}{1 + n\delta H_1(X) + \dots + \delta^j\binom{n}{j}H_j(X) + \dots + \delta^n H_n(X)}\right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Шаг 4. Выберем σ так чтобы $\sigma(\delta) = 1/\delta$. Обозначим через $\mathcal{M}'_\delta$ выпуклую гиперповерхность $\mathcal{M}_{\delta,\sigma(\delta)}$. Нашей целью является вывод положительных двусторонних равномерных оценок для скалярной кривизны гиперповерхности $\mathcal{M}'_\delta$.

Напомним, что гиперповерхность $\mathcal{M}$ задана уравнением $x_{n+1} = F(x)$, $x \in B_r^n(x_0)$. Ясно, что $\mathcal{M}_\delta$ также задается в виде $x_{n+1} = F_\delta(x)$, $x \in B_r^n(x_0)$. Не ограничивая общности, можно предположить что $F(x_0) = X_0$ и x_{n+1}-ось параллельна нормальному вектору $\nu_0 = \nu(X_0)$; следовательно $\partial F_\delta\left(\widetilde{X_0}\right)/\partial x_i = 0, i = 1, 2, ..., n$.

Пусть $0 < \rho < r$. Следующая оценка доказана в [5, неравенства (8)]:

$$\sup_{x\in B_\rho^n(x_0)} \angle(\nu_0, \nu(X(x))) \le \alpha(r, \rho, \Lambda) < \pi/2.$$

В частности, имеем:

$$0 < \cos\alpha(r, \rho, \Lambda) \le c_{\delta,\sigma} \le 1. \tag{7}$$

По неравенству треугольника,

$$\sigma \le \left|P_{\delta,\sigma} - \widetilde{X}_0\right| - \left|\widetilde{X}_0 - \widetilde{X}\right| \le \left|P_{\delta,\sigma} - \widetilde{X}\right| \le \left|P_{\delta,\sigma} - \widetilde{X}_0\right| + \left|\widetilde{X}_0 - \widetilde{X}\right|.$$

Поскольку

$$|F_\delta|_{C^{0,1}\left(\overline{B}_\rho^n(x_0)\right)} \le C(\rho, r, \Lambda)$$

[8, Теорема 1.5.1], $\left|\widetilde{X}_0 - \widetilde{X}\right|$ равномерно ограничена постоянной, зависящей от ρ, r, Λ. Следовательно, для достаточно больших σ, $\sigma \ge \sigma(\rho, r, \Lambda)$, имеем $\left|P_{\delta,\sigma} - \widetilde{X}_0\right| + \left|\widetilde{X}_0 - \widetilde{X}\right| \le 2\sigma$. Таким образом, получается следующая оценка:

$$1 \le \xi_{\delta,\sigma} \le 2, \sigma \ge \sigma(\rho, r, \Lambda). \tag{8}$$

Наконец мы докажем элементарное неравенство, связывающее H_{j+1} и H_j. По неравенству Коши,

$$\sum_{s=1}^{j} k_{i_1}k_{i_2}...\widehat{k_{i_s}}...k_{i_j}k_{i_{j+1}} \ge j\left(k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_s}...k_{i_j}k_{i_{j+1}}\right)^{\frac{j}{j+1}},$$

где символ “ $\widehat{\ }$ ” над k_{i_s} означает, что k_{i_s} опущен в произведении $k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_s}...k_{i_j}k_{i_{j+1}}$. Тогда, согласно (3), получаем:

$$\begin{aligned}
H_j &= \binom{n}{j}^{-1} \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j<i_{j+1}\le n} \sum_{s=1}^{j} k_{i_1}k_{i_2}...\widehat{k_{i_s}}...k_{i_j}k_{i_{j+1}} \\
&\ge \binom{n}{j}^{-1} j \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j<i_{j+1}\le n} \left(k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_s}...k_{i_j}k_{i_{j+1}}\right)^{\frac{j}{j+1}} \\
&\ge j\binom{n}{j}^{-1}\binom{n}{j+1}^{-\frac{j}{j+1}}(H_{j+1})^{\frac{j}{j+1}},
\end{aligned}$$

откуда $H_{j+1} \leq C_{n,j} H_j^{(j+1)/j}$, и где $C_{n,j}$ зависит только от n и j. Итак, если $m > l$, то

$$H_m \leq C_n H_l^{\frac{m}{l}}. \tag{9}$$

Из неравенства (9) следует, что $H_{s+2} \leq C_n H_2^{\frac{s+2}{2}}$, откуда, по условию (1), $H_{s+2} \leq C_n \sqrt{(\overline{\kappa})^{s+2}}$. Следовательно, согласно формуле (6), где $\delta = 1/\sigma$, (8) и (7), $H_2\left(\mathcal{M}'_\delta, \mathcal{I}_{\delta,\sigma}\left(\widetilde{X}\right)\right)$ ограничена сверху постоянной $\overline{\kappa}'(r, \rho, \underline{\kappa}, \overline{\kappa}, \Lambda, n)$. Теперь мы переходом к доказательству положительной нижней оценки для $H_2'^{\delta}(X) = H_2\left(\mathcal{M}'_\delta, \mathcal{I}_{\delta,\sigma}\left(\widetilde{X}\right)\right)$. Пусть

$$I = \frac{\delta H_1(X) + ... + \binom{n-1}{j}\delta^{j+1} H_{j+1}(X) + ... + \delta^n H_n(X)}{1 + n\delta H_1(X) + ... + \delta^j \binom{n}{j} H_j(X) + ... + \delta^n H_n(X)}.$$

Имеем

$$I \geq \frac{\delta H_1(X) + ... + \binom{n-1}{j}\delta^{j+1} H_{j+1}(X) + ... + \delta^n H_n(X)}{1 + \delta H_1(X) + ... + \delta^j \binom{n-1}{j} H_j(X) + ... + \delta^n H_n(X)} = \frac{u}{1+u},$$

где $u = \delta H_1(X) + ... + \binom{n-1}{j}\delta^{j+1} H_{j+1}(X) + ... + \delta^n H_n(X)$. Поскольку $u/(1+u)$ возрастающая функция, $I > 1/2$, когда $u > 1$. Если же $u \leq 1$, то, применяя (1), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{H_2(X) + ... + \delta^j \binom{n-2}{j} H_{j+2}(X) + ... + \delta^{n-2} H_n(X)}{1 + n\delta H_1(X) + ... + \delta^j \binom{n}{j} H_j(X) + ... + \delta^n H_n(X)} \\ &\geq \frac{H_2(X)}{1+u} \geq \frac{H_2(X)}{2} \geq \frac{\underline{\kappa}}{2} > 0. \end{aligned}$$

Пользуясь еще раз (6) с $\delta = 1/\sigma$, (8) и (7), мы оцениваем $H_2'^{\delta}(X)$ снизу положительной постоянной $\underline{\kappa}'(r, \rho, \underline{\kappa}, \overline{\kappa}, \Lambda, n)$.

Шаг 5. Пусть $0 < \rho < r$. Тогда, для достаточно малых положительных δ, выпуклая гиперповерхность $\mathcal{M}'_\delta : x \in B_\rho^n(x_0) \to \mathcal{I}_{\delta,\sigma(\delta)} \circ (x, F_\delta(x))$ задается уравнением $x_{n+1} = F'_\delta(x), x \in \overline{B}_\rho^n(x_0)$.

В самом деле, мы должны показать, что $\mathcal{M}'_\delta$ не может пересекаться с прямой линией, параллельной ν_0 более, чем в одной точке, если $\delta > 0$ достаточно мало. В противном случае существует последовательность положительных чисел $\delta_m \to 0$ и две последовательности точек гиперповерхности $\mathcal{M}'_\delta$

$$\widehat{X}_m = (z_m, f_m), \widehat{Y}_m = (z_m, g_m), \widehat{X}_m \neq \widehat{Y}_m, z_m \in \overline{B}_\rho^n(x_0), f_m, g_m \in \mathbb{R}, m = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $\mathcal{I}_m = \mathcal{I}_{\delta_m, \sigma(\delta_m)}$, $\widetilde{X}_m = \mathcal{I}_m^{-1}\left(\widehat{X}_m\right)$ и $\widetilde{Y}_m = \mathcal{I}_m^{-1}\left(\widehat{Y}_m\right)$. Пусть также X_m и Y_m обозначают проекции точек $\widetilde{X}_m$ и $\widetilde{Y}_m$ на выпуклую гиперповерхность $\mathcal{M}$. Наконец пусть $X_m = (x_m, F(x_m))$ и $Y_m = (y_m, F(y_m))$. Сначала заметим, что с точностью до выбора подпоследовательности, $x_m - y_m \to 0$ при $m \to \infty$. В самом деле, не ограничивая общности, можно считать, что $X_m \to X_0'$, $Y_m \to Y_0'$, $X_0' = (x_0', F(x_0'))\,, Y_0' = (y_0', F(y_0'))$. Тогда

$$\widehat{Y}_m - \widehat{X}_m = (0, g_m - f_m) \to Y_0' - X_0' = \left(y_0' - x_0', F\left(y_0'\right) - F\left(x_0'\right)\right),$$

откуда $y_0' - x_0' = 0$, и следовательно, $x_m - y_m \to 0$.

Легко видеть, что

$$\frac{\sigma^2(\delta_m)}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta_m,\sigma(\delta_m)}\right|^2} \to 1 \text{и} \ \frac{\widetilde{X} - P_{\delta_m,\sigma(\delta_m)}}{\left|\widetilde{X} - P_{\delta_m,\sigma(\delta_m)}\right|} \to \nu_0, \text{когда } m \to \infty.$$

Из формулы для дифференциала $\mathcal{I}_{\delta,\sigma}$ Шага 3 следует, что $\mathcal{I}_m$ и $d\mathcal{I}_m$ равномерно сходятся к тождественному отображению $id_{\mathbb{R}^n}$ на произвольном компакте, содержащем открытую окрестность гиперповерхности $\mathcal{M}$. В частности, имеем:

$$\left|\widehat{Y}_m - \widehat{X}_m\right| \le C\left|\widetilde{Y}_m - \widetilde{X}_m\right|,$$

где C – постоянная, не зависящая от m. Пусть сперва $Y_0 - X_0 \ne 0$. Пусть $L = |F_{\delta_m}|_{C^{0,1}\left(\overline{B}_\rho^n(x_0)\right)}$. Как уже отмечалось в Шаге 3, $L \le C(\rho, r, \Lambda)$. Тогда мы приходим к оценке:

$$\left|\widehat{Y}_m - \widehat{X}_m\right| \le C\left|\widetilde{Y}_m - \widetilde{X}_m\right| \le C\sqrt{L^2+1}\,|x_m - y_m| \to 0,$$

противоречие. Следовательно, $X_0 = Y_0$ и $\left|\widehat{Y}_m - \widehat{X}_m\right| \to 0$ при $m \to \infty$. Пусть

$$\widehat{\tau}_m = \left(\widehat{Y}_m - \widehat{X}_m\right) \Big/ \left|\widehat{Y}_m - \widehat{X}_m\right| \text{ и } \widetilde{\tau}_m = \left(\widetilde{Y}_m - \widetilde{X}_m\right) \Big/ \left|\widetilde{Y}_m - \widetilde{X}_m\right|.$$

Рассмотрим следующее представление для $\widehat{Y}_m - \widehat{X}_m$:

$$\widehat{Y}_m - \widehat{X}_m = \mathcal{I}_m\left(\widetilde{Y}_m\right) - \mathcal{I}_m\left(\widetilde{X}_m\right) = d\mathcal{I}_m\left(\widetilde{X}_m\right)\left(\widetilde{Y}_m - \widetilde{X}_m\right) + \mathcal{E}_m\left|\widetilde{Y}_m - \widetilde{X}_m\right|,$$

где $|\mathcal{E}_m| \to 0$. Поскольку $d\mathcal{I}_m \rightrightarrows id_{\mathbb{R}^n}$, мы получаем:

$$\widehat{Y}_m - \widehat{X}_m = \widetilde{Y}_m - \widetilde{X}_m + \mathcal{E}_m'\left|\widetilde{Y}_m - \widetilde{X}_m\right|,$$

где $|\mathcal{E}_m'| \to 0$. В частности, $\left|\widehat{Y}_m - \widehat{X}_m\right| \Big/ \left|\widetilde{Y}_m - \widetilde{X}_m\right| \to 1$ при $m \to \infty$. Таким образом, $\widehat{\tau}_m - \widetilde{\tau}_m \to 0$. По определению, для каждого m, выполнено $1 = |(\nu_0 \cdot \widehat{\tau}_m)|$. Но тогда $|(\nu_0 \cdot \widetilde{\tau}_m)| \to 1$ при $m \to \infty$. Однако, аналогично выводу оценки (7), можно доказать, что для $\delta \le 1$ существуют $0 < \beta = \beta(r, \rho, \Lambda) < \pi$ и $0 < \gamma = \gamma(r, \rho, \Lambda) < \beta$ такие что $\gamma \le \angle(\widetilde{\tau}_m, \nu_0) \le \beta$, противоречие.

Выбирая последовательность семейства выпуклых гиперповерхностей $\mathcal{M}_\delta' : x_{n+1} = F_\delta'(x)\,, x \in \overline{B}_\rho^n(x_0)$, можно добиться выполнения условия A2. Теорема 1 доказана.

5 Доказательство Теоремы 2.

Доказательство Теоремы 2 основано на следующей

Лемма 1. *Пусть* $0 < k_1 \le k_2 \le ... \le k_{n-1} \le k_n$ *и* $1 < j < n$. *Пусть также* $n-2$ *чисел* H_j, $j = 2,...,n-1$, *определяются из (3). Если* $H_j \le \overline{a}$ *и* $H_{j+1} \ge \underline{a}$, $\underline{a} > 0$, $\overline{a} > 0$, *то* $k_n \le c(n, \overline{a}, \underline{a})$.

Доказательство. Пусть $\overline{a} = A\binom{n}{j}$ и $\underline{a} = a\binom{n}{j+1}$. Тогда имеем

$$a \le \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j<i_{j+1}\le n} k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_j}k_{i_{j+1}} = \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j\le n-1} k_n k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_j} + \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j<i_{j+1}\le n-1} k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_j}k_{i_{j+1}} \tag{10}$$

и

$$\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j\le n} k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_j} = \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{j-1}\le n-1} k_n k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_{j-1}} + \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j\le n-1} k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_j} \le A. \tag{11}$$

Теперь пусть $\alpha_i = k_i/k_n, i = 1,2,...,n-1$. Разделив обе части неравенства (10) на k_n^{j+1}, мы видим, что

$$\frac{a}{k_n^{j+1}} \le \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j\le n-1} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_j} + \sum_{1\le i_1<...<i_j<i_{j+1}\le n-1} \alpha_{i_1}...\alpha_{i_j}\alpha_{i_{j+1}}.$$

Аналогично, из (11),

$$\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{j-1}\le n-1} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_{j-1}} + \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j\le n-1} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_j} \le \frac{A}{k_n^j}.$$

Поскольку $0 < \alpha_i \le 1$, имеем $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_j}\alpha_{i_{j+1}} \le \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_{j-1}}$. Также заметим, что для произведения $\alpha_{i_1}...\alpha_{i_{j+1}}$ в $\sum_{1\le i_1<...<i_j<i_{j+1}\le n-1} \alpha_{i_1}...\alpha_{i_j}\alpha_{i_{j+1}}$ всегда найдется произведение $\alpha_{i_1}...\alpha_{i_{j-1}}$ в $\sum_{1\le i_1<...<i_{j-1}\le n-1} \alpha_{i_1}...\alpha_{i_{j-1}}$. Следовательно, имеем неравенство

$$\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j<i_{j+1}\le n-1} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_j}\alpha_{i_{j+1}} \le \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{j-1}\le n-1} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_{j-1}},$$

откуда

$$\begin{aligned} &\frac{a}{k_n^{j+1}} \\ &\le \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j\le n-1} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_j} + \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j<i_{j+1}\le n-1} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_j}\alpha_{i_{j+1}} \\ &\le \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{j-1}\le n-1} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_{j-1}} + \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_j\le n-1} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_j} \\ &\le \frac{A}{k_n^j}. \end{aligned}$$

Итак, сравнивая левую и правую части предыдущего неравенства, мы видим, что

$$k_n \geq \frac{a}{A}. \tag{12}$$

Теперь мы переходим к доказательству оценки сверху для k_{n+1}. Согласно (11), $k_n k_i^{j-1} \leq k_n k_i k_{i+1}...k_j \leq A$, откуда

$$k_i \leq \frac{A^{1/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}}, i = 1, 2, ..., n-j. \tag{13}$$

Согласно (10),

$$\begin{aligned} a &\leq \binom{n}{j+1} H_{j+1} \\ &= \sum_{s=0}^{j} \sum_{\substack{n-j+1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_s \leq n-1 \\ 1 \leq l_1 < l_2 < ... < l_{j-s} \leq n-j}} k_n k_{i_1} k_{i_2} ... k_{i_s} k_{l_1} k_{l_2} ... k_{l_{j-s}} \\ &+ \sum_{s=0}^{j+1} \sum_{\substack{n-j+1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_s \leq n-1 \\ 1 \leq l_1 < l_2 < ... < l_{j-s+1} \leq n-j}} k_{i_1} k_{i_2} ... k_{i_s} k_{l_1} k_{l_2} ... k_{l_{j-s+1}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Если $s = 0$ и $1 \leq l_1 < l_2 < ... < l_{j-s} \leq n-j$, то тогда согласно (13),

$$k_n k_{l_1} k_{l_2} ... k_{l_j} \leq k_n \frac{A^{j/(j-1)}}{k_n^{j/(j-1)}} = \frac{A^{j/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}}. \tag{15}$$

Аналогично, если $s = 0$ и $1 \leq l_1 < l_2 < ... < l_{j-s+1} \leq n-j$, то

$$k_{l_1} k_{l_2} ... k_{l_{j+1}} \leq \left(\frac{A^{1/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}} \right)^{j+1} = \frac{A^{(j+1)/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)} k_n^{j/(j-1)}}. \tag{16}$$

Пусть $s > 0$. По (11), $k_n k_{i_1} k_{i_2} ... k_{i_s} k_{l_1} k_{l_2} ... k_{l_{j-s}-1} \leq A$. Следовательно, применяя (13),

$$k_n k_{i_1} k_{i_2} ... k_{i_s} k_{l_1} k_{l_2} ... k_{j-s-1} k_{j-s} \leq \frac{A A^{1/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}} = \frac{A^{j/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}}. \tag{17}$$

Теперь рассмотрим $k_{i_1} k_{i_2} ... k_{i_s} k_{l_1} k_{l_2} ... k_{l_{j-s+1}}$. Вновь, по (11) и (13),

$$\begin{aligned} & \left(k_{i_1} k_{i_2} ... k_{i_s} k_{l_1} k_{l_2} ... k_{l_{j-s-1}} \right) k_{l_{j-s}} k_{l_{j-s+1}} \\ \leq \quad & A \left(\frac{A^{1/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}} \right)^2 = \frac{A^{(j+1)/j-1}}{k_n^{1/(j-1)} k_n^{1/(j-1)}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Из (11), применяя также (15), (16), (17) and (18), получается

$$
\begin{aligned}
a \leq & \left[\frac{A^{j/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}} + \frac{A^{j/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}} + ... + \frac{A^{j/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}}\right] \\
& + \left[\frac{A^{(j+1)/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)} k_n^{j/(j-1)}} + \frac{A^{(j+1)/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)} k_n^{j/(j-1)}} + ... + \frac{A^{(j+1)/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)} k_n^{j/(j-1)}}\right] \\
& + \left[\frac{A^{j/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}} + \frac{A^{j/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}} + ... + \frac{A^{j/(j-1)}}{k_n^{1/(j-1)}}\right] \\
& + \left[\frac{A^{(j+1)/j-1}}{k_n^{1/(j-1)} k_n^{1/(j-1)}} + \frac{A^{(j+1)/j-1}}{k_n^{1/(j-1)} k_n^{1/(j-1)}} + ... + \frac{A^{(j+1)/j-1}}{k_n^{1/(j-1)} k_n^{1/(j-1)}}\right].
\end{aligned}
$$

Итак,

$$
a \leq C'(n, a, A) \left[\frac{1}{k_n^{1/(j-1)}} + \frac{1}{k_n^{1/(j-1)} k_n^{j/(j-1)}} + \frac{1}{k_n^{1/(j-1)} k_n^{1/(j-1)}}\right],
$$

откуда, согласно (12),

$$
\begin{aligned}
k_n^{1/(j-1)} & \leq C'(n, a, A) \left[1 + \frac{1}{k_n^{j/(j-1)}} + \frac{1}{k_n^{1/(j-1)}}\right] \\
& \leq C'(n, a, A) \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{A}\right)^{j/(j-1)}} + \frac{1}{\left(\frac{a}{A}\right)^{1/(j-1)}}\right].
\end{aligned}
$$

Таким образом, $k_n \leq c(n, a, A)$, что и утверждалось. Доказательство леммы завершено. $\mathcal{M}$

Теперь мы перейдем к доказательству Теоремы 2. По Лемме 1, (1) и (2), для каждого $X \in \mathcal{N}_{\mathcal{M}}$,

$$
0 < k_i(X) = k_i(\mathcal{M}, X) \leq C\left(n, \underline{\kappa}'', \overline{\kappa}\right). \tag{19}
$$

Заметим, что $\mathfrak{H}_1$ абсолютно непрерывна. В самом деле, пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ – борелевское множество и $Vol^n(\mathcal{E}) = 0$. Поскольку $0 = \mathfrak{H}_n(\mathcal{E}) = \mathfrak{H}_n^\delta\left(\widetilde{\mathcal{E}}\right)$ и $H_n^\delta > 0$ для почти всех $\widetilde{X} \in \mathcal{M}_\delta$, имеем $Vol_\delta^n\left(\widetilde{\mathcal{E}}\right) = 0$. Поскольку, согласно замечанию в конце Шага 2,

$$
\mathfrak{H}_j^\delta\left(\widetilde{\mathcal{E}}\right) = \int_{\widetilde{\mathcal{E}}} H_j^\delta\left(\widetilde{X}\right) dVol_\delta^n\left(\widetilde{X}\right),
$$

получаем $\mathfrak{H}_j^\delta\left(\widetilde{\mathcal{E}}\right) = 0$. Согласно (5) для $j = n-1$,

$$
\mathfrak{H}_{n-1}^\delta\left(\widetilde{\mathcal{E}}\right) = \mathfrak{H}_{n-1}(\mathcal{E}) + \delta \mathfrak{H}_n(\mathcal{E}).
$$

Итак, $\mathfrak{H}^{\delta}_{n-1}\left(\widetilde{\mathcal{E}}\right)=0$ и, так как гауссова кривизна абсолютно непрерывна, имеем $\mathfrak{H}_n(\mathcal{E})=0$, откуда $\mathfrak{H}_{n-1}(\mathcal{E})=0$. Аналогично,

$$\mathfrak{H}^{\delta}_{n-2}\left(\widetilde{\mathcal{E}}\right)=\mathfrak{H}_{n-2}(\mathcal{E})+\delta\mathfrak{H}_{n-1}(\mathcal{E})+\delta^{2\binom{n-2}{2}}\mathfrak{H}_n(\mathcal{E}),$$

откуда $\mathfrak{H}_{n-2}(\mathcal{E})=0$. Используя индукцию, нетрудно видеть, что $\mathfrak{H}_1(\mathcal{E})=0$. Следовательно, $\mathfrak{H}_1$ – абсолютно непрерывная мера.

Согласно (19) и [2, Предложение 1.3], $\mathcal{M}\in C^{1,1}$ и внешний нормальный вектор удовлетворяет условию Липшица с нормой, ограниченной постоянной $c(n,\underline{\kappa}'',\overline{\kappa})$. Поскольку $|F_\delta|_{C^{0,1}(B_\rho(x_0))}\le C(\rho,r,\Lambda)$, априорная оценка Теоремы 2 следует. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, А.Д., *Существование почти всюду второго дифференциала выпуклой функции и некоторые связанные с ним свойства выпуклых поверхностей* // Ученые записки ЛГУ. 1939. Т. 37, № 6. С. 3-35. Zbl 0063.00046

2. V. Bangert. *Convex hypersurfaces with bounded first mean curvature measure* // Calc. Var. 1999. V. 8. P. 259-278. Zbl 0960.53007

3. H. Busemann. *Convex surfaces.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 6 Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers Ltd., London. 1958. Zbl 0196.55101

4. H. Busemann, W. Feller. *Krümmungseigenschaften konvexer Flächen* // Acta Math. 1935. V. 66. P. 1-47. Zbl 0012.27404

5. Николаев, И.Г., Шефель, С.З. *Выпуклые поверхности с положительной ограниченной удельной кривизной и априорные оценки для уравнения Монжа-Ампера* // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 4. С. 120-136. Zbl 0578.53045

6. Решетняк, Ю.Г., *Теоремы устойчивости в геометрии и анализе.* Новосибирск: Наука, 1982. Zbl 0523.53025

7. R. Schneider. *Bestimmung konvexer Körper durch Krümmungsmaße* // Comment Math. Helvet. V. 54. P. 42-60. Zbl 0392.52004

8. R. Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 44. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. Zbl 0798.52001

University of Illinois at U-C Department of Mathematics,
273 Altgeld Hall, MC-382,1409 W. Green Street, Urbana, IL 61801, USA.
e-mail: inik@math.uiuc.edu