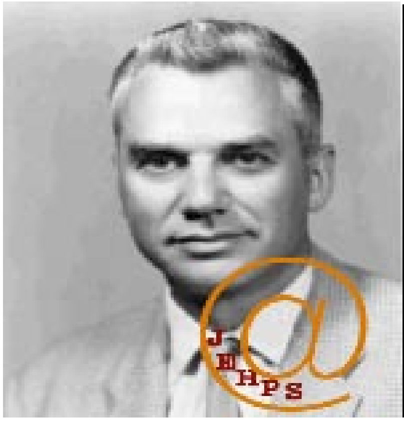

Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique

Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics

Vol 4, n°2; Décembre/December 2008

www.jehps.net

Zwey und dreyßigstus Hauptstück: Vorstellung der Größen durch Figuren

§885-902 vom 4. Theil "Die Größe" der Architectonic, 1765*

Johann Heinrich Lambert

§885

Man stellet bald alle Größen durch Figuren vor, und dieses geschieht, theils um sie gleichsam sichtbar zu machen, theils auch weil sich die Lehrsätze der Geometrie dabey anwenden lassen. Dadurch werden die Figuren gleichsam in Zeichen verwandelt, und die dabey gezogenen Linien erhalten eine Bedeutung. Ungeachtet nun der Raum nur drey Dimensionen hat, und von diesen, weil man die Figuren auf Flächen zeichnet, mehrentheils nur zwo gebraucht werden, so hat man doch Mittel gefunden, diesem Mangel in vielen Fällen abzuhelfen, und dazu sind besonders die krummen Linien gewählet worden, zumal, da man vermittelst derselben die Verhältniß zwischen zwoen *veränderlichen* Größen gleichsam vor Augen malen kann, weil man die eine derselben durch die Abscissen, die andere aber durch die Ordinaten einer krummen Linie vorstellet. Dabey erhält nun mehrentheils die Lage der Tangenten, die Subtangente, der Halbmesser des Krümmungskreises, der Flächenraum etc. eine Bedeutung, welche sich auf die Gesetze der Veränderungen der beyden Größen beziehen, die durch die Abscissen und Ordinaten, und zuweilen auch durch den Raum vorgestellet werden.

*All footnotes are added by the editor of this text, MB.

§886

Um hierüber nun einige allgemeinere Betrachtungen anzustellen, so hat man zwar die krummen Linien schon häufig in Classen getheilet. Man hat aber bey solchen Eintheilungen die Gleichungen zum Grunde geleget, wodurch die Verhältniß zwischen Ordinaten und Abscissen ausgedrücket wird. Die allgemeinen Formeln dieser Classen sind

I. $0 = x + ay + B$
II. $0 = x + ay + bxy + cx^2 + dy^2 + e$.
III. $0 = x + ay + bxy + cx^2 + dy^2 + exy^2 + fyx^2 + gx^3 + hy^3 + k$. etc.

Von diesen Classen hat man nun gesuchet, die besondern Arten, die darunter begriffen sind, abzuzählen. Man ist aber noch nicht bis über die dritte gekommen, und auch bey dieser geht Herr Euler von Newton, in Absicht auf die Gründe zur Eintheilung ab, in dem er einfachere und zum Theil auch kenntlichere Gründe aufsuchet. Man sehe hierüber den zweyten Theil von seiner *Analysi infinitorum.* Wir können dabey überhaupt so viel anmerken, daß man mit solchen Eintheilungen nicht viel ausrichtet, weil die krummen Linien auf eine viel zu vielfache Art an einander gränzen. Es giebt Fälle, wo man eine gerade Linie als eine Parabel, Hyperbel, Ellipse ansehen muß, wie z.E. wenn man den parabolischen, hyperbolischen, elliptischen Fall eines Körpers in die Sonne berechnet, um dadurch einen Maaßstab zu jeden andern Bewegung der Weltkörper um die Sonne zu haben, (§746).[1] So ist die Gleichung

$$x = \sqrt{(a + byy + cy^3)}$$

überhaupt vom dritten Grade. Sie stellet einen allgemeinen Fall vor, wo für jeden einzeln darunter begriffenen Fall die Coefficienten a, b, c besonders bestimmet werden müssen. Unter diese gehöret nun allerdings derjenige auch mit, wo $c = 0$ ist. Für diesen Fall wird die Formel eine Gleichung vom zweiten Grade, und wenn überdieß noch $a = 0$ wird, so stellet sie eine gerade Linie vor. So kann eben diese Formel nur als ein specialer Fall zu einer noch viel allgemeinern gehören, welche irgend anwendbar ist. Wir ziehen hieraus überhaupt die Folge, daß die Eintheilung der krummen Linien den verschiedenen Graden nach, nicht so wesentlich sey, daß nicht solche, die von verschiedenen Graden sind, in Absicht auf die Sache, die sie vorstellen, zusammen gehören könnten.

§887

Indessen können wir hiebey anmerken, daß Herr Euler solche Gründe zur Eintheilung genommen, die viel Wesentliches haben, wenn wir auf die Sache sehen, die dadurch können vorgestellet werden. Denn da stellet man sich die Gesetze, nach welchen die beyden mit einander verglichenen Größen sich verändern, auf eine kenntlichere Art vor, wenn man weiß, *ob eine krumme Linie in sich selbst zurücke kehre, ob sie Äste habe, die bis ins*

[1] §746 from the part "Die einfache Gestalt der Größe" explains how to find a common measure for the space coordinates and the time variable in the calculation of orbits to simplify the computing. This method is the one explained in Lambert's *Insigniores orbitae cometarum proprietates* (Klett: Augsburg, 1761).

Unendliche hinaus laufen, oder ob sie zwischen zweyen Puncten liege, und sich über dieselbe nicht ausdehne, ob ein oder mehrere Maxima oder Minima dabey vorkommen, ob sie einen oder mehrere Wendungspuncte haben, ob der Halbmesser des Krümmungskreises irgend $= 0$ *werde, ob die Linie aus abgebrochenen Stücken bestehe, ob sie sich in Form von Spiralen um einen Punct wende, ob sie Asymtoten habe, ob dabey eine solche Axe vorkomme, wo die auf beyden Seiten derselben liegenden Theile einander ähnlich bleiben, wie die Abscissen und Ordinaten sollen genommen werden, damit die einfachste Gleichung zwischen denselben statt finden*, etc. Dieses sind nun *Symptomata* von krummen Linien, die, wo sie vorkommen, gewisse Bedingungen voraus setzen, und Kennzeichen angeben, woran sie sich erkennen lassen.

§888

Das ersten was wir nun hiebey anmerken können, betrifft die Gleichgültigkeit der Ordinaten und Abscissen, wenn diese nämlich verwechselt werden können. Dieses kann man nun mehrentheils den Gleichungen ansehen. Denn so z.E. ist es in den Formeln

$$\begin{aligned}&ax^2/ay^2 = b\\ &ax^2 \pm bxy + ay^2 = c\\ &ax^3 + bx^2y + cxy + bxy^2 + ay^3 = d \text{ etc.}\end{aligned}$$

gleich viel, ob man x oder y nehme, und eben so hängt auch in den Formeln

$$\begin{aligned}&x = \sqrt{ay^2 + byz + az^2}\\ &x^3 = ay + byz + az \text{ etc.}\end{aligned}$$

die Große x von den Größen y, z auf eine gleichgültige Art ab, und y, z lassen sich dabey verwechseln. Was man demnach für y findet, wenn z beständig bleibt, ist auch für z gefunden, wenn y betändig bleibt. Man hat bey Rechnungen auf solche Fälle, wo sie vorkommen, zu sehen, weil sie immer eine besondere Schicklichkeit und Eleganz haben.

§889

Sodann merken wir an, daß, wenn man die vorhin angeführten Syptomata der krummen Linien in einem fürgegebenen Fall finden will, man immer die Gleichung so einrichtet, daß

$$y = A + \phi x$$

sey, wobey ϕx eine jede Function von x vorstellt. Da wir hier y, x als die Größen ansehen, zwischen welchen die Verhältniß und das Gesetz der Veränderung kenntlich gemacht werden solle, so werden wir x als eine Abscisse, y als die dazu gehörige Ordinate ansehen, und uns die krumme Linie als schon gezogen vorstellen. Hiebey werden wir nun $x = P+\xi$, und $y = Q + \eta$ setzen, dergestalt, daß wenn $x = P$ wird, zugleich auch $y = Q$ werde, das will sagen, ξ und η zugleich anfangen. Daraus lassen sich nun folgende Symptomata der krummen Linie überhaupt betrachtet herleiten.

§890

Einmal, wenn die Abscisse P da genommen wird, wo Q ein Maximum oder Minimum ist, da hat die Gleichung zwischen ξ und η folgende Form

$$\pm\eta = a\xi^2 + b\xi^3 + c\xi^4 + \text{ etc.}$$

Denn η wird zugleich mit $\xi, = 0$. Demnach fällt in dieser Formel die beständige Größe, welche sonst dabey seyn kann, weg. Ferners wird, wo Q ein Maximum oder Minimum ist, η zugleich mit ξ größer, man mag ξ positiv oder negativ nehmen. Dieses würde nicht geschehen, wenn das Glied $m\xi$ mit in dieser Formel wäre, weil dieses Glied mit ξ positiv und negativ wird, und weil ξ immer so klein angenommen werden kann, daß $m\xi > a\xi^2$ ist. Demnach kann $m\xi$ in dieser Formel nicht vorkommen, und so muß dieselbe wenigstens bey $a\xi^2$ anfangen. Kömmt aber in dem fürgegebenen Fall $a\xi^2$ vor, so kann auch $b\xi^3$ vorkommen, ungeachtet dieses Glied mit ξ positiv und negativ wird. Denn ξ kann immer so klein angenommen werden, daß $a\xi^2 > b\xi^3$ ist, und unter dieser Bedingung hat das Maximum oder Minimum statt. Trifft es aber zu, daß in dem fürgegebenen fall $a = 0$ ist, so muß auch $b = 0$ seyn, weil aus gleichen Gründen Q nicht ein Maximum oder Minimum seyn kann, es sey denn, daß die Formel

$$\pm y = a\xi^2 + b\xi^3 + c\xi^4 + \text{ etc.}$$

mit einer geraden Dimension anfange, oder die niedrigste Dimension des ξ gerade sey. Fällt nun in einem fürgegebenen Fall diese Formel so aus, daß lauter Dimensionen

$$\pm y = a\xi^2 + c\xi^4 + d\xi^6 + \text{ etc.}$$

darinn vorkommen, so ist die Ordinate Q nicht nur ein Maximum, sondern die krumme Linie ist sich auf beyden Seiten dieser Ordinate ähnlich, und hinwiederum, wo dieses letztere vorkömmt, da hat auch eine solche Formel statt. Hingegen weicht die krumme Linie von dieser Aehnlichkeit nothwendig ab, wo

$$\pm y = a\xi^2 + b\xi^3 + c\xi^4 + d\xi^5 + \text{ etc.}$$

ist, und zwar wird diese Abweichung desto näher bey dem Punct, wo das Maximum oder Minimum vorkömmt, merklich, je größer die Coefficienten b, d etc. in Absicht auf die Coefficienten a, c sind. Uebrigens ist hiebey anzumerken, daß der Begriff eines Maximi und Minimi etwas relatives hat, weil dasselbe von der Lage derjenigen Linie abhängt, auf welcher die Abscissen genommen werden. Je nachdem diese Lage geändert wird, fällt auch das Maximum oder Minimum auf andere Puncte der krummen Linie, nämlich auf solche, wo die Tangenten mit der Abscissenlinie parallel sind. Es kann daher Fälle geben, wo bey einer und eben derselben krummen Linie bald von mehrern bald auch von gar keinem Maximo die Rede ist. Hingegen sind bey jeder krummen Linie solche Lagen der Abscissen möglich, wo wenigstens ein Maximum oder Minimum vorkömmt.

§891

Das Maximum und Minimum hat demnach nichts, das sich an der krummen Linie unterscheiden ließe, wenn man nicht eine Abscissenlinie dabey zum grunde legt. Hingegen hat es mit den Wendungspuncten eine andere Bewandtniß, weil diese die Krümmung und folglich das Wesentliche der krummen Linie betreffen. Man setze, die Abscisse P falle dahin, wo die Ordinate Q in den Wendungspunct trifft, so wird die Gleichung zwischen ξ und η folgende Form haben

$$\pm\eta = a\xi + b\xi^3 + c\xi^4 + d\xi^5 + \text{ etc.}$$

Denn η wird zugleich mit $\xi = 0$. Demnach fällt eben so, wie vorhin, (§890) die beständige Größe aus dieser Formel weg. Sodann bliebt $a\xi$ in allen Fällen, wo die krumme Linie in dem Wendungspunct mit der Abscissenlinie nicht parallel läuft. Dieses Glied aber giebt der Linie keine Krümmung, ungeachtet es die, so von den übrigen Gliedern entsteht, in eine andere und gleichsam verzogene Lage bringen kann. Ferners kann in dieser Formel das Glied $m\xi^2$ nicht vorkommen, weil es positiv bleibt, man mag ξ positiv oder negativ annehmen, udn weil ξ so klein genommen werden kann, daß $m\xi^2 > b\xi^3$ seyn würde. Dieses aber würde machen, daß sich die Krümmung der Linie nicht von dem Punct Q an, wenden würde, wie es vermittelst des Gliedes $b\xi^3$, als welches mit ξ zugleich positiv und negativ wird, geschehen muß. Demnach bleibt $m\xi^2$ aus der Formel nothwendig weg. Wird nun in einem fürgegebenen Fall auch $b = 0$, so muß aus gleichem Grunde auch $c = 0$ werden. Das will nun überhaupt sagen, daß in erst angegebener Formel die niedrigste Dimension des ξ ungerade seyn muß. kommen nun in einem fürgegebenen Fall lauter ungerade Dimensionen

$$\pm y = a\xi + b\xi^3 + d\xi^5 + \text{ etc.}$$

vor; so theilt der Wendungspunct die krumme Linie dergestalt in zwo Hälften, die einander durchaus ähnlich sind, und nur eine anders gewendete Lage haben. Muß aber die Formel

$$\pm\eta = a\xi + b\xi^3 + c\xi^4 + d\xi^5 + e\xi^6 + \text{ etc.}$$

ganz beybehalten werden, so weicht die krumme Linie von dieser Aehnlichkeit desto ehender ab, je größer die Coefficienten c, e etc. in Absicht auf die Coefficienten b, d etc. sind.

§892

Nimmt man aber für die Abscissen und Ordinaten P, Q solche an, wo weder ein Maximum oder Minimum, noch ein Wendungspunct ist, da kommen in der Formel

$$\pm\eta = a\xi + b\xi^2 + c\xi^3 + d\xi^4 + e\xi^5 + \text{ etc.}$$

die beyden ersten Glieder nothwendig vor. Denn ohne das erste würde ein Maximum oder Minimum, ohne das zweyte aber ein Wendungspunct bey P, Q statt haben (§890.

891.). Wir wollen aber in Ansehung dieser Formel noch folgende allgemeine Anmerkung hersetzen. Wenn von den Coefficienten a, b, c, d, e, etc. einer $= 0$ ist, so ist der vorhergehende ein Maximum oder ein Minimum. Um dieses zugleich zu erklären und zu beweisen, so setze man $\xi = q + x$, so verwandelt sich diese Formel in folgende:

$$\begin{array}{ll} \pm\eta = & aq + ax \\ & bq^2 + 2bqx + bx^2 \\ & cq^3 + 3cq^2x + 3cqx^2 + cx^3 \\ & dq^4 + 4dq^3x + 6dq^2x^2 + 4dqx^3 + dx^4 \\ etc. & \end{array}$$

Demnach sind die Coefficienten

$$\begin{array}{lcl} \text{des ersten Gliedes} & = & aq + bq^2 + cq^3 + dq^4 + \&c. = p \\ \text{des zweyten Gliedes} & = & a + 2bq + 3cq^2 + 4dq^3 + \&c. = p' \\ \text{des dritten Gliedes} & = & b + 3cq + 6dq^2 + \&c. = p'' \\ \text{des vierten Gliedes} & = & c + 4dq^3 + \&c. = p''' \\ \text{des fünften Gliedes} & = & d + \&c. = p'''' \\ etc. & & \end{array}$$

Man sehe nun q als veränderlich an, so werden diese Coefficienten ebenfalls größer und kleiner. Welchen davon man nun $= 0$ setzt, so wird das Differentiale des vorhergehenden ebenfalss $= 0$, welches eine Anzeige ist, daß derselbe ein Maximum oder Minimum sey. Denn differentiirt man alle, so findet man

$$\begin{array}{ll} dp = & p'.dq \\ dp' = & 2p''.dq \\ dp'' = & 3p'''.dq \\ dp''' = & 4p''''.dq \\ etc. & \end{array}$$

Demnach wird dp mit p', dp' mit p'', dp'' mit p''', dp''' mit p'''' etc. $= 0$. Wenn demnach in der Formel

$$\pm\eta = a\xi + b\xi^2 + c\xi^3 + d\xi^4 + e\xi^5 + \text{ etc.}$$

einer der Coefficienten $= 0$ ist, so ist der Coefficient des vorhergehenden Gliedes ein Maximum oder ein Minimum, und die krumme Linie folgt der Krümmung, welche dieses Glied der Formel nach sich zieht, am meisten oder am wenigsten. Man kann auch hinwiederum hieraus den Schluß machen, daß wenn η ein Maximum oder ein Minimum seyn solle, der Coefficient $a = 0$ seyn müsse. Man kann diese Anmerkung noch weiter ausdehnen. Denn setzt man dq beständig, so ist

$$\begin{array}{lll} ddp = & dp'.dq = & 2p''.dq^2 \\ ddp' = & 2dp''.dq = & 2.3.p'''.dq^2 \\ ddp'' = & 3dp'''.dq = & 3.4.p''''.dq^2 \\ etc. & & \end{array}$$

Demnach wenn einer der Coefficienten a, b, c, d, etc. $= 0$ ist, so ist nicht nur der nächst vorhergehende ein Maximum oder Minimum, sondern der, so diesem vorgeht, hat die Eigenschaft, die bey einem Wendungspunct vorkömmt, nämlich die geschwindenste oder langsamste Veränderung, oder Zunahm. Man sieht demnach auch hieraus wie in der Formel

$$\eta = ax + cx^3 + dx^4 + \text{ etc.}$$

wo $bx^2 = 0$ ist, der Wendungspunct für η, und das Maximum oder Minimum für a zusammen treffen, und so auch, daß in den Formeln

$$\eta = ax + cx^3 + ex^5 + gx^7 \text{ etc.}$$
$$\eta = bx^2 + dx^4 + fx^6 + \text{ etc.}$$

die Coefficienten a, c, e, g, etc. b, d, f, lauter Maxima oder Minima sind, und in der erstern η einen Wendungspunct haben. Wir haben aber bereits vorhin (§890.891.) angemerket, daß die Formeln nur da vorkommen, wo die auf beyden Seiten der Ordinate Q liegende Theile der krummen Linie einander durchaus ähnlich sind. Demnach treffen diese Schicklichkeiten auch nur da zusammen, wo letzteres statt findet, und folglich nicht nur bey allen krummen Linien, sondern bey denen, wo sie zusammen treffen, nur in einigen und öfters nur in einem Puncte. Denn so ist der Circul die einige krumme Linie, bei welcher alle Diameter gleichgültig sind, und jeder den Diameter in zwey gleiche Theile theilt. Bey den Ellipsen sind nur die beyden Axen von dieser Art, weil bey den übrigen Diametern, die Stücke zwar ähnlich sind, aber anders gelegt werden müssen, um auf einander zu passen.

§893

Bey der Formel

$$\eta = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{ etc.}$$

zeiget der erste Coefficient a überhaupt an, wie stark sich die krumme Linie bey der Ordinate Q gegen dieselbe neigt, und diese Neigung behält sie desto länger merklich, je kleiner die Coefficienten a, b, c, etc. sind. Besonders wenn $b = 0$ ist, so behält die Linie diese Neigung sehr merklich, weil die Tangente die Linie bey dem Wendungspunct unter einem Winkel duchschneidet, der kleiner ist, als jeder, der sich gedenken läßt, und weil cx^3 vor und nach Q unmerklich klein bleibt. Wie demnach a überhaupt die Lage der Linie und ihrer Tangente anzeigt, so zeigt hingegen b die Krümmung derselben dergestalt an, daß, wo b nicht $= 0$ ist, diese Krümmung sich mit der Krümmung eines Circuls vergleichen läßt, dessen Halbmesser

$$R = \frac{(1+aa)^{3:2}}{2b}$$

ist, und folglich mit a zunimmt, und hingegen desto kleiner ist, je größer b ist. Setzt man nun b sey $= 0$, so wird R unendlich, und dieses will sagen, die Krümmung der Linie lasse sich mit der Krümmung eines Circuls nicht vergleichen, und in der That differirt sie davon, wie eine Linie von einer Fläche, weil sie kleiner ist, als die von jedem Circul, indessen aber dennoch eine Krümmung ist, so lange die Coefficienten c, d, e etc. nicht $= 0$ sind. Man kann aber, wo die Formel

$$\eta = ax + px^n + qx^{n+1} + \text{ etc.}$$

ist, die Krümmung der Linie bey Q mit der Krümmung einer Linie vergleichen, die durch

$$z = px^n : (1 + aa)^{(n+1):2}$$

vorgestellet wird. Es hat aber eine solche nicht circuläre Krümmung nur bey demjenigen Puncte der krummen Linie statt, bey welchem die Gleichung

$$\pm\eta = ax + px^n + qx^{n+1} + \text{ etc.}$$

anfängt, oder wo $x = 0$ ist. Denn so wenig man sich davon entfernt, fängt die Krümmung wiederum an, circulär zu werden, welches leicht daraus erhellet, wenn man in dieser Gleichung $x = A + v$ setzet, und dadurch die Abscisse P um die beständige Größe A verlängert.

§894

Wir haben in dem vorhergehenden die Abscissen mit Ordinaten P, Q dergestalt angenommen, daß dieselben bey einem Maximo, Minimo, oder Wendungspunct vorkommen. Wir werden nun diese Bedingungen weglassen, und für P, Q jede Abscisse und Ordinate annehmen, von welcher ξ und η fortgezählt werden. Dadurch erhält die allgemeine Gleichung zwischen ξ und η folgende Form

$$\eta = a\xi + b\xi^2 + c\xi^3 + d\xi^4 + \text{ etc.}$$

Man setze nun $\xi = q + x$, so werden wir die in dem §892. angegebene Formel und Coefficienten haben, von welchen,

$$\begin{array}{lcl} \text{der zweyte} & = & a + 2bq + 3cq^2 + 4dq^3 + \&c. = p' \\ \text{der dritte} & = & b + 3cq + 6dq^2 + \&c. = p'' \end{array}$$

die Formel aber

$$\eta = p + p'x + p''x^2 + p'''x^3 + \text{ etc.}$$

ist. Soll demnach η ein Maximum werden, so muß $p' = 0$ seyn, folglich setzet man

$$0 = a + 2bq + 3cq^2 + 4dq^3 + \text{ etc.}$$

So viel nun diese Gleichung reale Wurzeln hat, so viele Maxima und Minima hat auch die fürgegebene krumme Linie. Hinwiederum da für den Wendungspunct, $p'' = 0$ seyn muß, so wird sie auch so viele Wendungspuncte haben, als in der Gleichung

$$0 = b + 3cq + 6dq^2 + \text{ etc.}$$

reale Wurzeln vorkommen. Da nun bey jeder krummen Linie, die Maxima und Minima abwechseln, wenn sie in Absicht auf die angenomme Lage der Abscissenlinie mehrere hat, und da zwischen zwey auf einander folgende immer wenigstens ein Wendungspunct fällt, so läßt sich daraus, wenn $p' = 0$ mehrere reale Wurzeln hat, schließen, daß $p'' = 0$ ebenfalls einige haben müsse. Hingegen ist es leicht möglich, daß diese letztere Gleichung mehrere reale Wurzeln hat, als die erstere $p' = 0$, weil, wie wir bereits vorhin (§890.) erinnert haben, die Maxima und Minima von der Lage der Abscissenlinie abhängen, die Wendungspuncte aber nicht. Der Halbmesser des Krümmungskreises ist dabey überhaupt

$$R = \frac{(1+p'.p4)^{3:2}}{2p''}$$

und folglich eben so viele male unendlich, als die Gleichung $p'' = 0$ Wurzeln hat.

§895

Wenn man bey einem fürgegebenen Fall eine Gleichung oder unendliche Reihe von der Form

$$\eta = a\xi + b\xi^2 + c\xi^3 + d\xi^4 + \text{ etc.}$$

annimmt, so kann man sich öfters aus Betrachtung der Sache selbst versichern, wie die Coefficienten a, b, c, d, etc. beschaffen, und ob einige davon $= 0$ seyn müssen. Denn so z.E. wenn man voraus weiß, daß η einerley seyn müsse, man mag ξ positiv oder negativ nehmen, so werden nothwendig die geraden oder die ungeraden Dimensionen von ξ allein behalten, und demnach kömmt von folgenden Formeln

$$\eta = a\xi + c\xi^3 + e\xi^5 + \text{ etc.}$$
$$\eta = b\xi^2 + d\xi^4 + f\xi^6 + \text{ etc.}$$

nothwendig eine vor, und zwar die erste, wenn η anfangs wie ξ zunimmt, die andere aber, wenn η anfangs wie ξ^2 zunimmt. Man setze z.E. η sey die Stralenbrechung, ξ aber der Entfernungsbogen des Sterns vom Scheitelpunct, oder dessen Sinus, oder dessen Tangente: so ist erstlich η einerley, man mag ξ positiv oder negativ nehmen. Demnach kömmt eine von diesen Formeln vor, und zwar die erste, weil man weiß, daß wenn für ξ die Tangente des Entfernungsbogens vom Scheitelpunct genommen wird, die Reihe am stärksten convergirt. Man wird eben so finden, daß in dieser Reihe, wo ξ die Tangente ist, die Zeichen $+-$ abwechseln müssen. Will man hingegen die Krümmung des horizontalen Lichstals in der Luft durch eine solche Formel bestimmen, so, daß ξ die gerade horizontale Entfernung, η aber die derselben entsprechende Vertiefung des Lichstrals vorstellet, so, daß ξ von dem Punct an gerechnet wird, wo der Lichtstral horizontalm ist, oder die Horizontallinie berührt: so wird man wiederum η einerley finden, ξ mag positiv oder negativ seyn, und da in beyden Fällen η abwärts geht oder positiv bleibt, so kömmt hiebey die zweyte Formel

$$\eta = b\xi^2 + d\xi^4 + f\xi^6 + \text{ etc.}$$

vor. Vergleicht man diese mit den über die Stralenbrechung irdischer Gegenstände gemachten Observationen, so findet sich, daß b nicht $= 0$ ist, sondern daß der Halbmesser des Krümmungskreises, welcher bey dieser Formel für den Anfang der Abscissen

$$R = \frac{1}{2b}$$

ist (§893.), siebenmal so groß ist, als der Halbmesser der Erde. Wird dieser $= 1$ gesetzt, so ist

$$7 = \frac{1}{2b}$$
$$b = \frac{1}{14}$$

Dieses ist demnach der erste Coefficient dieser Formel, mit welchem man bey irdischen Gegenständen ziemlich ausreicht. Setzet man, daß der Lichtstral asymtotisch ist, so werden von den folgenden Coefficienten nothwendig einige negativ, und es ist nicht zu zweifeln, daß dieses nicht wechselweise geschehe. Da der Lichtstral in der Luft keinen Wendungspunct, und η nur ein Minimum hat, wo nämlich $\xi = 0$ ist, so läßt sich daraus schließen, daß in den zwoen Formeln des §894.

$$\begin{aligned} 0 &= a + 2bq + 3cq^2 + 4dq^3 + \&c. \\ 0 &= b + 3cq + 6dq^2 + \&c. \end{aligned}$$

welche sich hier, wegen $a = c = e =$ etc. $= 0$, in folgende

$$\begin{aligned} 0 &= 2bq + 4dq^3 + \&c. \\ 0 &= b + 6dq^2 + \&c. \end{aligned}$$

verwandeln, die erstere, welche für das Maximum ist, nur eine, die andere aber, welche für den Wendungspunct ist, gar keine reale Wurzeln hat.

§896

Wir haben diese beyden Beispiele umständlicher angeführt, weil daraus erhellet, wie man die allgemeinen Betrachtungen über die krummen Linien sehr gut gebrauchen könne, in vielen Fällen die Größen, so in der Natur vorkommen, leichter zu bestimmen, und Formeln, die gleichsam bloß analytisch sind, auf eine gegründete und schickliche Art daher anzuwenden. Denn so lassen sich, ohne daß man die stralenbrechende Kraft der Luft und ihre Abnahme in größern Höhen wisse, die Coefficienten der erstern Formel

$$\eta = a\xi + c\xi^3 + e\xi^5 + \text{ etc.}$$

unmittelbar aus den beobachteten astronomischen Refractionen bestimmen, ohne daß man im geringsten eine Hypothese dabey anzunehmen genöthigt sey. Wir müssen übrigens hiebey noch anmerken, daß es nicht immer gleichgültig ist, welche von beyden Größen, die man durch solche Formeln vorstellet, als Abscisse und Ordinate angenommen werde. Die Abscissenlinie, das will sagen, diejenige, worauf man ξ nimmt, muß die krumme Linie, wenigstens nicht bey dem Anfange, oder wo $\xi = 0$ ist, rechtwinklicht durchschneiden, weil man sonst statt der bisher betrachteten Formeln, andere von folgender Art

$\eta = a\sqrt{\xi} + b\xi\sqrt{\xi} +$ etc.
$\eta = a\xi^{1:3} + b\xi^{2:3} +$ etc.

haben würde, mit deren Betrachtung wir uns hier nicht länger aufhalten werden, zumal, da man mit Verwechslung der Abscissen und Ordinaten diese Formeln und deren Wurzelgrößen vermeiden kann, wenn anders der Fall, den man vor sich hat, einförmiger ist. Aendert man aber nur den Anfang der Abscissen, so, daß man $\xi = A \pm x$ setzet, so lassen sich solche Wurzelgrößen leicht wiederum in unendliche Reihen verwandeln, die aus rationalen Gliedern bestehen, etc.

§897

Sodann wenn auch eine der beyden Formeln

$\eta = a\xi + c\xi^3 + e\xi^5 +$ etc.
$\eta = b\xi^2 + d\xi^4 + f\xi^6 +$ etc.

bey einer fürgegebenen krummen Linie statt findet, so geschieht dieses nicht durchaus, sondern nur bey einigen und zuweilen nur bey einem Punct (§892.). Man hat demnach nicht nur diesen zum Anfange der Abscissen zu machen, sondern es müssen in Ansehung der zweyten dieser Formeln die Abscissen auf der Tangente genommen werden, weil die Ordinate η dabey zwischen die krumme Linie und die Tangente fällt. Dieses findet sich nun, wie aus den beyden vorhin (§895.) angeführten Beyspielen erhellet, aus der Natur der Sache, auf welche die Formel angewandt wird, öfters sehr leicht. Wir wollen nun noch sehen, wie die Coefficienten bestimmt werden können, wenn man nichts als Observationen vor sich hat. Zu diesem Ende wird die erste dieser Formeln

$$\eta = a\xi + c\xi^3 + e\xi^5 + \text{ etc.}$$

in folgende

$$\eta = A\xi + B\xi(\xi^2 - m^2) + C\xi(\xi^2 - m^2).(\xi^2 - n^2) + D\xi(\xi^2 - m^2).(\xi^2 - n^2).(\xi^2 - p^2) + \text{ etc.}$$

aufgelöset. Man setzet nun, daß wenn

$$\begin{array}{llll} \xi & = m \quad \text{ist,} & \eta = \alpha & \text{sey} \\ & = n & = \beta & \\ & = p & = \gamma & \\ & = q & = \delta & \end{array}$$

so werden A, B, C, D, etc. folgendermaßen bestimmt.

I. Man setze $\xi = m$, so ist $\eta = \alpha$ folglich $\alpha = Am$, $A = \alpha : m$
II. Man setze $\xi = n$, so ist $\eta = \beta$, folglich
$\beta = \frac{\alpha n}{m} + Bn(n^2 - m^2)$
$B = \frac{\beta m - \alpha n}{n.m.(n^2 - m^2)} = \frac{\beta - An}{n(n^2 - m^2)}$

III. Man setze $\xi = p$, so ist $\eta = \gamma$, folglich
$\gamma = Ap + Bp(p^2 - m^2) + Cp(p^2 - m^2)(p^2 - n^2)$
$C = \frac{\gamma : p - A - B(p^2 - m^2)}{(p^2 - m^2).(p^2 - n^2)}$
IV. Auf eine ähnliche Art findet sich für $x = q$,
$D = \frac{\delta : q - A - B(q^2 - m^2) - C(q^2 - m^2).(q^2 - n^2)}{(q^2 - m^2).(q^2 - n^2).(q^2 - p^2)}$
etc.

§898

In Ansehung der andern Formel

$$\eta = b\xi^2 + d\xi^4 + f\xi^6 + \text{ etc.}$$

wird

$$\eta = A\xi^2 + B\xi^2(\xi^2 - m^2) + C\xi^2(\xi^2 - m^2)(\xi^2 - n^2) + \text{ etc.}$$

angenommen, und eben so verfahren, wodurch man sodann

$$A = \alpha : m^2$$
$$B = \frac{\beta : n^2 - A}{(n^2 - m^2)}$$
$$C = \frac{\gamma : p^2 - A - B(p^2 - m^2)}{(p^2 - m^2).(p^2 - n^2)}$$
$$D = \frac{\delta : q^2 - A - B(q^2 - m^2) - C(q^2 - m^2).(q^2 - n^2)}{(q^2 - m^2).(q^2 - n^2).(q^2 - p^2)}$$

findet.

§899

Hat aber die Formel, deren Coefficienten man durch Beobachtungen bestimmen will, alle Glieder, so daß

$$\eta = a\xi + b\xi^2 + c\xi^3 + d\xi^4 + \text{ etc.}$$

ist, so muß man

$$\eta = A\xi + B\xi(\xi - m) + C\xi(\xi - m)(\xi - n) + D\xi(\xi - m)(\xi - n)(\xi - p) + \text{ etc.}$$

annehmen, und die Coefficienten A, B, C, D, etc. auf die erst angezeigte Art bestimmen. Der Grund, warum man dieser Formel in jedem Fall eine andere Gestalt giebt, ist dieser, daß, wenn man dieselbe durch die wirkliche Multiplication auflöset, die herauskommende Reihe keine andere Glieder haben, als die, so in derjenigen Reihe vorkommen, für die man sie annimmt. Es kömmt übrigens hiebey viel darauf an, daß die Coefficienten A, B, C, D, etc. geschwinde convergiren, weil man auf diese Art derselben weniger gebraucht. Man kann zwar diese letztere Formel auch bey den beyden erstern Fällen gebrauchen, allein sie wird dabey weitläuftiger und weniger convergirend. So z.E. wenn man den Sinus durch den Bogen ausdrücken will, so geschieht dieses durch die erste Formel des §897, weil die kleinern Bogen wie die Sinus zunehmen, und beyde positiv und negativ einerley bleiben. Man setze nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. die Sinus von 10, 20, 30, 40, etc. Graden für m, n, p, q, aber 1, 2, 3, 4, so ist

$$\begin{array}{llll}
\alpha = & 0,1736482 & m = & 1 \\
\beta = & 0,3420202 & n = & 2 \\
\gamma = & 0,5000000 & p = & 3 \\
\delta = & 0,6427876 & q = & 4 \\
etc. & & & \\
\eta = & \eta & \xi = & \xi
\end{array}$$

und (§897.)

$$\eta = A\xi + B\xi(\xi^2 - m^2) + C\xi(\xi^2 - m^2)(\xi^2 - n^2) + \text{ etc.}$$

Hieraus erhält man nach der erst angegebenen Art zu verfahren

$$\begin{array}{ll}
A = & +0,1736482 \\
B = & -0,0008794 \\
C = & 0,0000013\frac{1}{3} \\
etc. &
\end{array}$$

und folglich, wenn diese Werthe substituirt werden

$$\eta = 0,1745329\xi - 0,0008860\xi^3 + 0,0000013\tfrac{2}{5}\xi^5 + \text{ etc.}$$

In dieser Reihe ist $\xi = 1$ der Bogen von 10 Graden, und folglich der erste Coefficient 0,1745329 die wirkliche Länge desselben in eben den Theilen, in welchen die Sinus genommen worden, nämlich in solchen, da der Halbmesser = 1,000000 ist. Setzet man $\xi = \frac{1}{2}$, so giebt diese Reihe den Sinus des Bogens von 5 Graden = 0,0871557. Setzet man $\xi = \frac{1}{12}$, so giebt sie den Sinus von 15 Graden = 0,2588190, alles so genau als in den Tafeln, woraus die Sinus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. genommen sind. Nimmt man hingegen die Sinus von 30, 60, 90, 120 etc. Graden, und setzet demnach

$$\begin{array}{ll}
\alpha = \frac{1}{2} & m = 1 \\
\beta = \sqrt{\frac{3}{4}} & n = 2 \\
\gamma = 1 & p = 3 \\
\delta = \sqrt{\frac{3}{4}} & q = 4 \\
etc & etc
\end{array}$$

so erhält man

$$\begin{array}{lll}
A & = \frac{1}{2} & = +0,50000000 \\
B & = -\frac{1}{6}(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}) & = -0,02232910 \\
C & = +\frac{7-8\sqrt{\frac{3}{4}}}{240} & = +0,00029919 \\
D & = -\frac{13-15\sqrt{\frac{3}{4}}}{5040} & = -0,0000019 \\
etc & &
\end{array}$$

welches alles weniger convergirt. Setzet man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. seyn die Sinus von 90, 180, 270, 360, 45 etc. Graden, so ist

$$\begin{array}{ll} \alpha = 1 & m = 1 \\ \beta = 0 & n = 2 \\ \gamma = -1 & p = 3 \\ \delta = 0 & q = 4 \\ \epsilon = +1 & r = 5 \\ etc & etc \end{array}$$

Und hieraus erhält man

$$\begin{array}{ll} A & = 1 \\ B & = -\frac{1}{3} \\ C & = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} \\ D & = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \\ E & = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} \\ etc & \end{array}$$

welches ebenfalls weniger convergirt. Indessen convergiren alle diese Fälle ungleich stärker, als wenn man die Formel

$$\eta = A\xi + B\xi(\xi - m) + C\xi(\xi - m)(\xi - n) + \text{ etc}$$

genommen hätte. Denn da würde man für den ersten Fall, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. die Tabellarsinus von 10, 20, 30, etc. Graden sind,

$$\begin{array}{ll} A & = 0,1736482 \\ B & = -0,0026381 \\ C & = -0,0008527 \\ D & = +0,0000132 \\ E & = +0,0000012 \\ etc & \end{array}$$

gefunden haben, und dabey wechseln die Zeichen + - anders ab, weil, wenn man diese Formel durch die wirkliche Multiplication auflöset, die Glieder, wo ξ gerade Dimensionen hat, =0 werden müssen. Ungeachtet übrigens die Coefficienten A, B, C etc. in allen diesen Fällen stark convergiren, so ist dieses dennoch nur dem Schein nach, weil sie sodann durch m, n, p, q etc. wiederum multiplicirt werden. Man thut demnach besser, wenn man die Formeln folgender Gestalt annimmt.

$$\begin{array}{l} \eta = A\xi + B\frac{\xi^2 - m^2}{m^2} + C\xi\frac{\xi^2 - m^2}{m^2}\frac{\xi^2 - n^2}{n^2} + \text{ etc} \\ \eta = A\xi^2 + B\xi^2\frac{\xi^2 - m^2}{m^2} + C\xi^2\frac{\xi^2 - m^2}{m^2}\frac{\xi^2 - n^2}{n^2} + \text{ etc} \\ \eta = A\xi + B\xi\frac{\xi - m}{m} + C\xi\frac{\xi - m}{m}\frac{\xi - n}{n} + \text{ etc} \end{array}$$

Auf diese Art fällt das bloß scheinbare Convergiren in den Coefficienten A, B, C, D etc. weg, und wenn sie in diesen Formeln in einem fürgegebenen Fall noch stark convergiren, so gebraucht man derselben nur wenige , um η zu bestimmen. So z.E. findet man für das erste der angeführten Beyspiele

$$
\begin{array}{ll}
A & = 0,1736482 \\
B & = -0,0008794 \\
C & = +0,0000053 \\
E & = -0,0000000 \\
etc &
\end{array}
$$

Bey dem dritten Beyspiele aber findet man

$$
\begin{array}{llll}
A & = 1 & D & = -\frac{2}{5\cdot 7} \\
B & = -\frac{1}{3} & E & = +\frac{8}{5\cdot 7\cdot 8} \\
C & = +\frac{2}{3\cdot 5} & F & = +\frac{8}{7\cdot 9\cdot 11} \\
etc & & &
\end{array}
$$

welche Zahlen schon viel langsamer convergiren. Sie machen aber, wenn sie sämtlich positiv genommen werden die Reihe

$$a = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \tfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \tfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \text{etc}$$

aus, und dieses ist der erste Coefficient der Formel

$$\eta = a\xi + c\xi^3 + e\xi^5 \text{ etc.}$$

um deren Coefficienten zu bestimmen die Formel

$$\eta = A\xi + B\xi\tfrac{\xi^2 - m^2}{m^2} \text{ etc.}$$

angenommen worden. Da nun in dem Beyspiele für $\xi = 1$, 2, 3 etc. Bogen von 90, 180, 270, etc. Graden, und für η deren Sinus angenommen worden, so ist dieser Coefficient a die wirkliche Länge des Quadranten, oder = 1,5707963 etc. und dieses ist auch die Summe der Reihe

$$a = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \tfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \tfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \text{etc}$$

welche sich leicht in

$$a = 2 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3\cdot 5} + \tfrac{1\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7} + \tfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \text{etc}$$

verwandelt.

§900

Wir haben uns bey diesen Beyspielen länger aufgehalten, weil sie nicht nur die angegebenen Formeln erläutern, sondern weil zugleich auch daraus erhellet, daß man, um die Länge des Quadranten eines Cirkels zu finden, weiter nichts wissen darf, als daß die Sinus von 90, 180, 270, 360 etc. Graden = 1, 0, -1, 0 etc. sind. Das übrige alles leitet sich aus ganz allgemeinen Betrachtungen über die Krümmung des Cirkels her. Die Vergleichung des ersten und des dritten Beyspieles zeiget zugleich, wie viel es darauf ankomme, daß die Coefficienten A, B, C etc. stark convergiren, und dieses wird besonders nothwendig, wo man es bey einer Näherung will bewenden lassen, so daß nur einige der ersten dieser Coefficienten gebraucht. Dieses geht aber immer an, so oft man nur kleine Stücke einer krummen Linie vor sich hat, und in dieser Absicht lassen sich die angeführten Formeln zu Interpolationen gebrauchen, wohin nun ebenfalls noch folgende Betrachtungen dienen.

§901

Wenn man eine construirte krumme Linie vor sich hat, so lassen sich leicht gerade Linien ziehen, welche dieselbe berühren. Hingegen ist der Berührungspunct schwerer zu bestimmen. Um dieses zu thun, so ziehe man mit der Tangente parallele Chorden, so viel man will, und theile jede derselben in zween gleiche Theile, so läßt sich durch diese Theilungspuncte eine andere Linie ziehen, welche die fürgegebene krumme Linie in dem gesuchten Berührungspunct durchschneidet. Diese Linie ist nun nothwendig gerade, so oft die fürgegebene krumme Linie eine von den Kegelschnitten ist, und sie ist es auch in sehr vielen andern Fällen. Da man nun, den einigen Fall ausgenommen, wo der gesuchte Berührungspunct zugleich ein Wendepunct ist, für ein kleines Stück der krummen Linie den Krümmungskreis derselben, oder ein osculirendes Stück eines Kegelschnittes substituiren kann, so folget daraus, daß die durch die Theilungspuncte der Chorden gezogene Linie nahe bey dem Berührungspuncte, den sie durchschneidet, eine sehr geringe und einförmige Krümmung habe, und daher um desto leichter gezogen werden könne. Man wird aus dem §864[2] sehen, daß man sich dieses Mittels bedienen kann, durch Ziehung solcher Tangenten die Länge der construirten krummen Linie genauer zu finden, als man sie construiren kann, das will sagen, daß, wo man sich mit einer Construction begnüget, dieses Verfahren sicher kann gebraucht werden.

§902

Hat man nun zwey solcher Tangenten, die einen Winkel von 5, 10, oder 15 Grad mit einander machen, gezogen, und auf erst bemeldete Art die Berührungspuncte gefunden, so zieht man diese zween Puncte durch eine Linie zusammen, welche zugleich eine Chorde ist, und mit den beyden Tangenten einen Triangel bildet, durch welchen die krumme Linie durchgeht. Sie theilet den Flächenraum dieses Triangels so, daß das Segment $\frac{2}{3}$ von demselben ist, so oft die krumme Linie eine Parabel ist, und daß es so groß angenommen werden kann, so oft die Krümmung der Linie von der von einem parabolischen Stücke nicht merklich abweicht. Von dieser Bedingung kann man sich versichern, wenn man die Chorde in zween gleiche Theile theilet, und aus dem Theilungspuncte in den Punct, wo sich beyde Tangenten durchschneiden eine Linie zieht. Wird diese von der krummen Linie in zween Theile getheilet, die so gleich sind, daß man sie mit dem Zirkel nicht ungleich finden kann, so unterscheidet man auch das Stück der krummen Linie nicht von einem Stücke einer Parabel, welches man folglich, so weit dieser Triangel geht, in allen Absichten dafür substituiren kann, so fern man sich mit der Construction und deren Genauigkeit begnüget (§865)[3].

---

[2] §864 from the part "Die Schranken" discusses how to use a thread for manually measuring ('rectifying') a curve.

[3] §865 from the part "Die Schranken" discusses the precision of construction as opposed to calculation.