*Journal de Théorie des Nombres*
*de Bordeaux* **7** *(1995), 51–73*

# L'arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles

par Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE

## 1. Introduction

Je fais le point sur diverses questions et conjectures naturelles sur le groupe de Chow $CH_0(X)$ des zéro-cycles modulo l'équivalence rationnelle sur une variété projective, lisse et géométriquement intègre $X$ définie sur un corps $k$, lorsque ce corps est arithmétique (corps local ou corps de nombres).

Au premier paragraphe, après un rappel de résultats valables pour toutes les variétés projectives et lisses (corps de base algébriquement clos, réel, fini), j'énonce des conjectures, qu'il vaudrait peut-être mieux rebaptiser questions, sur les variétés sur un corps $p$-adique et sur un corps de nombres. Au second paragraphe, je fais le tour des résultats connus pour les surfaces. Au troisième paragraphe, j'expose les quelques résultats obtenus pour les variétés de dimension supérieure.

La plupart des résultats concernent la torsion du groupe $CH_0(X)$. Ils portent sur des variétés qui géométriquement sont raisonnables : surfaces de genre géométrique zéro, variétés fibrées au-dessus d'une courbe, la fibre générale étant un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire. Il y a cependant déjà quelques résultats sur certaines surfaces de genre géométrique non nul.

Le présent texte passe en revue la plupart des résultats obtenus dans ce domaine, mais ne contient pas de démonstrations (à l'exception de celle du théorème 2.1, et des indications complémentaires sur la démonstration de 2.5 et de 2.8). Beaucoup de ces démonstrations reposent sur les résultats de Merkur'ev et Suslin [28], qui permirent de développer une méthode de S. Bloch ([1], [2]).

Dans la généralité où elles sont énoncées ici, les conjectures 1.4 et 1.5 paraissent pour la première fois.

Manuscrit reçu le 13 juillet 1994.

### Groupe de Chow des zéro-cycles : définitions

Soient $k$ un corps et $X$ une $k$-variété algébrique. Etant donné un point $P \in X$, on note $k(P)$ le corps résiduel en $P$. Le point $P$ est fermé sur $X$ si et seulement si le corps $k(P)$ est une extension finie de $k$. On note alors $\deg_k(P) = [k(P) : k]$. On note $Z_0(X)$ le groupe abélien libre sur les points fermés de $X$. Les éléments de $Z_0(X)$, qui sont les combinaisons linéaires finies à coefficients entiers $\sum_P n_P P$, sont appelés zéro-cycles. On définit le degré d'un zéro-cycle par la formule

$$\deg(\sum_P n_P P) = \sum_P n_P [k(P) : k].$$

Notons qu'il existe un zéro-cycle de degré un sur $X$ si et seulement si le p.g.c.d. des extensions finies de corps $K/k$ avec $X(K) \neq \emptyset$ est égal à un. Il s'agit là d'une condition plus faible que l'existence d'un point rationnel ($X(k) \neq \emptyset$).

Etant données $C/k$ une courbe intègre, de corps des fonctions $k(C)$, et une fonction $f \in k(C)^*$, on sait définir le zéro-cycle $\mathrm{div}(f) \in Z_0(C)$ ([21]). Le groupe $Z_0(X)_{rat}$ des zéro-cycles rationnellement équivalents à zéro sur $X$ est par définition le sous-groupe de $Z_0(X)$ engendré par tous les $\mathrm{div}(f) \in Z_0(C) \subset Z_0(X)$, pour $C \subset X$ variant parmi les courbes fermées intègres tracées sur $X$ et $f$ fonction rationnelle sur une telle courbe $C$. On définit alors le groupe de Chow $CH_0(X)$ comme le quotient $Z_0(X)/Z_0(X)_{rat}$. Ce groupe est fonctoriel covariant par morphismes propres.

Plus généralement, sur une variété $X$, on définit ([21]) des groupes de Chow $CH_i(X)$ (cycles de dimension $i$, modulo équivalence rationnelle) et $CH^i(X)$ (cycles de codimension $i$, modulo équivalence rationnelle).

Si $C/k$ est une courbe projective intègre, on sait que pour toute fonction $f \in k(C)^*$ le degré du zéro-cycle $\mathrm{div}(f)$ est nul. Ainsi, si $X/k$ est une variété complète (c'est-à-dire propre sur $k$), l'application degré de $Z_0(X)$ vers $\mathbf{Z}$ induit une application degré de $CH_0(X)$ vers $\mathbf{Z}$. On note alors $A_0(X)$ le noyau de cette application : c'est le groupe des zéro-cycles de degré zéro, modulo l'équivalence rationnelle.

Le groupe $A_0(X)$ est un invariant $k$-birationnel stable des $k$-variétés intègres, propres et lisses : Si $X$ et $Y$ sont deux telles variétés et si l'on a un $k$-isomorphisme birationnel entre $X \times_k \mathbf{P}^r_k$ et $Y \times_k \mathbf{P}^s_k$ ($r$ et $s$ entiers naturels), alors $A_0(X)$ et $A_0(Y)$ sont isomorphes ([21], 16.1.11).

Soit $X/k$ une $k$-variété projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps $k$. On aimerait comprendre la structure du groupe $A_0(X)$, sous des hypothèses arithmétiques variées sur le corps $k$. On peut essayer d'étudier le groupe $A_0(X)$ en le mettant en rapport avec divers autres groupes.

Ainsi, on sait définir un homomorphisme, dit homomorphisme d'Albanese :

$$alb : A_0(X) \to \mathrm{Alb}_{X/k}(k),$$

où $\mathrm{Alb}_{X/k}$ désigne la variété d'Albanese de $X$ : c'est une variété abélienne définie sur $k$, qui lorsque $X/k$ est une courbe s'identifie à la jacobienne de $X$. Si $X/k$ est une courbe projective, lisse, géométriquement intègre, avec $X(k) \neq \emptyset$, cet homomorphisme est un isomorphisme, mais c'est loin d'être le cas en général.

On peut aussi étudier des accouplements de $Z_0(X)$ avec divers groupes de cohomologie étale $H^i_{\text{ét}}(X,.)$, qui passent au quotient modulo l'équivalence rationnelle grâce à des propriétés de fonctorialité et à la trivialité, sur la droite affine, des groupes de cohomologie considérés. Notant $\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer cohomologique de $X$, on dispose en particulier d'accouplements bilinéaires

$$CH_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathrm{Br}(k)$$

et

$$A_0(X) \times \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \longrightarrow \mathrm{Br}(k)$$
$$(z, \alpha) \mapsto \alpha(z)$$

induits par l'accouplement bilinéaire

$$Z_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathrm{Br}(k)$$

qui à un point fermé $P \in X$ et à $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ associe l'image par la corestriction $\mathrm{Cores}_{k(P)/k} : \mathrm{Br}(k(P)) \to \mathrm{Br}(k)$ de l'image de $\alpha$ par l'évaluation $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k(P))$.

Faute de pouvoir contrôler le groupe $A_0(X)$ lui-même, on sera souvent content d'obtenir des informations sur la $n$-torsion ${}_nA_0(X)$ et la $n$-cotorsion $A_0(X)/n$ pour $n > 0$ entier.

(Un certain nombre de résultats énoncés ici sur la torsion du groupe $CH_0(X)$ pour les surfaces valent pour la torsion du groupe de Chow $CH^2(X)$ pour les variétés de dimension quelconque (voir le rapport [8]); j'ai choisi ici de centrer l'exposé sur les zéro-cycles.)

## 1. Résultats généraux et conjectures

Théorème 1.1. *Soit $X$ une variété projective, lisse et connexe sur un corps $k$ algébriquement clos. Alors :*

(a) *Le groupe $A_0(X)$ est divisible.*
(b) *L'application d'Albanese $alb: \quad A_0(X) \to \mathrm{Alb}_{X/k}(k)$ est surjective, et son noyau est uniquement divisible.*
(c) *Soit $g$ la dimension de la variété d'Albanese. Pour tout entier $n > 0$ premier à la caractéristique de $k$, l'application d'Albanese induit un isomorphisme de groupes finis*

$$ {}_nA_0(X) \simeq {}_n\mathrm{Alb}_{X/k}(k) \simeq (\mathbf{Z}/n)^{2g}. $$

La partie (a) s'établit par réduction au cas des courbes. Les énoncés équivalents (b) et (c), sont dus à Roitman pour la partie première à la caractéristique $p$ de $k$, et à Milne pour la partie $p$-primaire. Ils ont été ensuite été établis de diverses manières par S. Bloch. Voir [8], § 4.

Il convient ici de rappeler, comme il a été établi pour la première fois par Mumford, puis par une méthode toute différente par S. Bloch, que l'application d'Albanese $alb$ est en général loin d'être un isomorphisme. C'est une question ouverte de savoir si c'est un isomorphisme lorsque $k$ est une clôture algébrique du corps des rationnels.

Etant donnée une variété $X$ projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps $k$, on note $\pi_1^{ab}(X)$ le groupe fondamental abélien

$$ \mathrm{Hom}(H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}), $$

et on note $\pi_1^{\text{ab,géom}}(X)$ le groupe fondamental abélien géométrique qui est le dual de Pontryagin du groupe

$$ \mathrm{Coker}\,[H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})]. $$

On dispose d'accouplements évidents

$$ CH_0(X) \times H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \longrightarrow H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) $$

et

$$ A_0(X) \times (H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})/H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \longrightarrow H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}). $$

THÉORÈME 1.2. *Soient* $\mathbf{F}$ *un corps fini et* $X/\mathbf{F}$ *une variété projective, lisse et géométriquement intègre. Alors le groupe* $A_0(X)$ *est fini, et on a un isomorphisme de groupes (finis)*

$$A_0(X) \simeq \pi_1^{\mathrm{ab,g\acute{e}om}}(X)$$

*induit par l'accouplement ci-dessus.*

Ce théorème (dit du corps de classes de Hilbert), classique pour les courbes, est dû à K. Kato et S. Saito pour les surfaces. Un argument simple permet de déduire le cas général de celui des surfaces. On connaît maintenant plusieurs démonstrations de ce résultat. Je renvoie à [8], § 5, pour une discussion détaillée.

THÉORÈME 1.3. *Soient* $X/\mathbf{R}$ *une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur le corps des réels, et* $X_{\mathbf{C}} = X \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. *Soit* $s$ *le nombre de composantes connexes de l'espace topologique* $X(\mathbf{R})$. *Soit* $D(X) \subset A_0(X)$ *le sous-groupe divisible maximal de* $A_0(X)$. *Alors*

(a) *Le quotient* $A_0(X)/D(X)$ *est fini, nul si* $X(\mathbf{R}) = \emptyset$, *et isomorphe à* $(\mathbf{Z}/2)^{s-1}$ *sinon.*
(b) *Soit* $p : X_{\mathbf{C}} \to X$ *la projection naturelle. On a alors* $D(X) = p_*(A_0(X_{\mathbf{C}})) = 2A_0(X)$.
(c) *Le sous-groupe de torsion* $D(X)_{tors}$ *de* $D(X)$ *est isomorphe à* $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^g$, *où* $g$ *désigne la dimension de la variété d'Albanese de* $X$.
(d) *Pour tout entier* $n > 0$ *les groupes* $A_0(X)/n$, $CH_0(X)/n$ *et* ${}_nA_0(X)$ *sont finis.*

Ce théorème regroupe des résultats anciens [9] et des résultats récents [16]. Le même énoncé vaut pour un corps de base réel clos $R$, en remplaçant composantes connexes réelles par composantes semi-algébriques.

Dans l'énoncé suivant on s'intéresse au cas d'un corps de base $p$-adique $k$. On dispose alors de l'invariant local $\mathrm{Br}(k) \simeq \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

CONJECTURES 1.4. *Soient* $k$ *un corps* $p$*-adique (extension finie de* $\mathbf{Q}_p$*) et* $X$ *une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur* $k$. *Soit* $D(X) \subset A_0(X)$ *le sous-groupe divisible maximal de* $A_0(X)$.

(a) *Pour tout entier* $n > 0$, *les groupes* ${}_nA_0(X)$ *et* $A_0(X)/n$ *sont finis, et le groupe* $A_0(X)/l$ *est nul pour presque tout nombre premier* $l$.
(b) *L'application naturelle*

$$A_0(X)/D(X) \to \varprojlim_n A_0(X)/n$$

*est un isomorphisme. Les homomorphismes naturels*

$$\varphi_1 : A_0(X)/D(X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

*et*

$$\varphi_2 : \varprojlim_n A_0(X)/n \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

*ont un noyau fini.*

(c) *Soit $\mathcal{X}/\mathcal{O}$ un modèle régulier et propre de $X/k$ au-dessus de l'anneau $\mathcal{O}$ des entiers de $k$. L'image des homomorphismes $\varphi_1$ et $\varphi_2$ coïncide avec* $\mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/(\mathrm{Br}(\mathcal{X}) + \mathrm{Br}(k)), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Quelques jours avant mon exposé à Bordeaux, Parimala et Suresh [31] ont trouvé des exemples montrant que dans 1.4 (b), le noyau des homomorphismes $\varphi_1$ et $\varphi_2$ peut être non nul.

L'énoncé 1.4 (c) fait l'objet d'un travail en cours avec S. Saito. Le cas des surfaces rationnelles est étudié en détail dans la thèse de Dalawat [19].

Il est aussi naturel de poser les questions suivantes, sans les ériger en conjectures :

1.4 (e) Le groupe $A_0(X)_{tors}$ est-il fini ?

1.4 (f) Le groupe $D(X)$ est-il uniquement divisible ?

1.4 (g) Le groupe $A_0(X)/D(X)$ est-il isomorphe, à groupes finis près, à un groupe $\mathbf{Z}_p^n$ ?

*Le cas des courbes*

Soit $k$ un corps $p$-adique (extension finie de $\mathbf{Q}_p$). Soit $X/k$ une courbe projective, lisse, géométriquement intègre, et soit $J$ sa jacobienne, qui est une variété abélienne sur $k$. On dispose alors d'une inclusion naturelle $A_0(X) \subset J(k)$, à conoyau fini (et nul si $X$ possède un point rationnel). Le groupe $J(k)$ est un groupe de Lie abélien $p$-adique, extension d'un groupe abélien fini par un groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}_p)^N$ (où $N$ est le produit du genre de $X$ par le degré de $k$ sur $\mathbf{Q}_p$). On voit donc que les questions (a), (e) et (f) ont dans ce cas une réponse affirmative (le sous-groupe divisible maximal $D$ est réduit à zéro). Il en est de même des questions (b) et (c). Pour la question (b), on peut dire plus (dualité de Tate, voir [26] et [30]) : les flèches $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont injectives et, au moins lorsque $X$ possède un point $k$-rationnel, elles définissent des isomorphismes

$$A_0(X) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

(Pour les courbes, c'est une conséquence de la dualité de Tate que le groupe $\mathrm{Br}(\mathcal{X})$ est nul.)

Dans l'énoncé suivant on s'intéresse au cas d'un corps de base $k$ qui est un corps de nombres. On note $\Omega$ l'ensemble des places de $k$. Pour $v \in \Omega$, on note $k_v$ le complété de $k$ en $v$. On dispose de la suite exacte du corps de classes

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \bigoplus_{v\in\Omega} \mathrm{Br}(k_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0,$$

où les flèches $\mathrm{Br}(k_v) \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ sont les invariants de la théorie du corps de classes local.

Pour $X/k$ projective, les invariants locaux permettent de construire un accouplement

$$\prod_{v\in\Omega} CH_0(X_{k_v}) \times \mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

donné par

$$(\{z_v\}, \alpha) \mapsto \sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v(\alpha(z_v)) \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Cet accouplement s'annule sur l'image de $CH_0(X)$ dans $\prod_{v\in\Omega} CH_0(X_{k_v})$ (image par l'application diagonale).

Conjectures 1.5. *Soient $k$ un corps de nombres et $X$ une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur $k$.*

(a) *S'il existe une famille $\{z_v\}_{v\in\Omega} \in \prod_{v\in\Omega} Z_0(X_{k_v})$ de zéro-cycles de degré 1 telle que $\sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v(\alpha(z_v)) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$, alors il existe un zéro-cycle $z \in Z_0(X)$ de degré 1 .*

(b) *Le groupe $A_0(X)$ est un groupe de type fini, et l'application d'Albanese $alb : A_0(X) \to \mathrm{Alb}_{X/k}(k)$ a noyau (et conoyau) finis.*

(c) *Le complexe*

$$\varprojlim_n A_0(X)/n \longrightarrow \prod_{v\in\Omega} \varprojlim_n A_0(X_{k_v})/n \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

*est exact, où la première flèche est la flèche diagonale évidente et où la deuxième flèche $\sigma$ est obtenue par somme des accouplements locaux.*

(d) *Soit $\mathcal{X}/\mathcal{O}$ un modèle régulier propre de $X/k$ au-dessus de l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de $k$. Alors le conoyau de $\sigma$ dans le complexe ci-dessus est un groupe fini qui s'identifie au groupe*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Br}'(\mathcal{X})/\mathrm{Br}(\mathcal{O}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

*où* $\mathrm{Br}'(\mathcal{X}) \subset \mathrm{Br}(\mathcal{X}) \subset \mathrm{Br}(X)$ *est le sous-groupe formé des éléments de* $\mathrm{Br}(\mathcal{X})$ *qui s'annulent sur* $X(k_v)$ *pour toute place réelle* $v \in \Omega$.

*Remarques.*

La conjecture 1.5 (a) s'exprime aussi sous la forme : l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 est la seule. Pour une courbe $X/k$ de genre un, Manin [27] a remarqué qu'il en est bien ainsi si le groupe de Tate-Shafarevich de la Jacobienne de $X$ est fini, et Saito [33] a étendu cet énoncé conditionnel au cas des courbes de genre quelconque. Cette conjecture est aussi motivée par différents résultats obtenus sur le principe de Hasse, rappelés ci-dessous (Théorèmes 2.9 et 3.6).

La conjecture 1.5 (b) est due indépendamment à Bloch et à Beilinson.

La conjecture 1.5 (c) est une extension au cadre de toutes les variétés d'une conjecture de Cassels [6] sur les courbes elliptiques (conjecture étendue aux variétés abéliennes par Tate, voir Milne [30] p. 102), et d'une conjecture de Sansuc et l'auteur sur les surfaces rationnelles ([12], voir aussi [40]). Kato et Saito ([24] (7.6.2) p. 303, et [33], (7.8) p. 394) ont proposé certains énoncés, qu'on peut relier à cette conjecture, ainsi qu'à la conjecture (a) ([33], Th. 8.4). Saito me dit que Kato et lui-même aiment voir la conjecture 1.5 (c) sous une forme duale, qui évite le recours aux limites projectives ou aux topologies. Kato et Saito postulent que l'application naturelle

$$\theta : \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Hom}_f((\prod_{v\in\Omega} A_0(X_{k_v}))/\mathrm{Im}\ A_0(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

où $\mathrm{Hom}_f$ désigne les caractères d'exposant fini, est surjective.

La conjecture 1.5 (d) est motivée par le cas des courbes; elle a été aussi suggérée par S. Saito. Dans un futur travail commun, sans pouvoir rien dire sur la finitude des groupes considérés, nous établirons un énoncé proche de l'énoncé "dual" qui dit que que le noyau de $\theta$ est essentiellement $\mathrm{Br}'(\mathcal{X})$.

## 2. Surfaces

Pour les surfaces sur un corps $p$-adique, on a quelques résultats généraux. Dans l'énoncé qui suit, les résultats (a) et (b) sont connus depuis 1982. Les résultats (c) et (d), qui auraient pu être trouvés à la même époque, n'ont été remarqués que récemment : l'énoncé (c) (sous une forme essentiellement équivalente) apparaît pour la première fois dans un article de Saito et Sujatha ([35], Thm. 2.4).

THÉORÈME 2.1. *Soit $k$ un corps $p$-adique (extension finie de $\mathbf{Q}_p$). Soit $X/k$ une surface projective, lisse, géométriquement intègre.*

(a) *Pour tout entier $n > 0$, le groupe ${}_nA_0(X)$ est fini.*
(b) *Pour tout nombre premier $l$, le groupe de torsion $l$-primaire $A_0(X)\{l\}$ est de cotype fini : il est isomorphe à la somme directe d'un groupe fini et d'un groupe $(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^N$, avec $N = N_l \geq 0$.*
(c) *Pour $n > 0$ premier à $p$, le groupe $A_0(X)/n$ est fini.*
(d) *Pour $l$ premier, $l \neq p$, le groupe $A_0(X)$ est la somme directe de son sous-groupe $l$-divisible maximal et d'un groupe fini $l$-primaire.*

*Démonstration.* Pour $n > 0$ premier à la caractéristique de $k$, notons $\mu_n$ le faisceau étale défini par le groupe des racines $n$-ièmes de l'unité, et $\mu_n^{\otimes 2} = \mu_n \otimes \mu_n$. Pour toute variété lisse sur un corps $k$ et tout entier $n > 0$ premier à la caractéristique de $k$, le groupe ${}_nCH^2(X)$ est un sous-quotient du groupe $H^3_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$ : ceci est une conséquence du théorème de Merkur'ev et Suslin [28], des résultats de Bloch et Ogus [4] et d'une analyse de S. Bloch (voir par exemple [8], Théorème 3.3.2). De même, pour $l$ premier, le groupe de torsion $l$-primaire $CH^2(X)\{l\}$ est un sous-quotient du groupe $H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ (ici $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)$ est la limite inductive sur les entiers $m > 0$ des faisceaux étales $\mu_{l^m}^{\otimes 2}$.) Pour $k$ un corps $p$-adique, le groupe $H^3_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$ est fini et le groupe $H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est de cotype fini.

De ceci résulte les énoncés (a) et (b) pour $X$ une surface projective et lisse sur un corps $p$-adique : pour $l$ premier, on peut écrire

$$A_0(X)\{l\} = (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^N \oplus F,$$

où $F = F_l$ est un groupe abélien fini, et $N$ un entier (dépendant a priori de $l$).

Pour $X$ une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps $k$ $p$-adique, et $l$ premier différent de $p$, on a $A_0(X) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l = 0$. Ceci est en effet clair lorsque $X$ est une courbe (puisque $A_0(X)$ est alors extension d'un groupe fini par une somme directe d'exemplaires du groupe additif $\mathbf{Z}_p$). Le cas général en résulte par une application du théorème de Bertini, qui permet de voir chaque zéro-cycle sur $X$ comme un zéro-cycle sur une courbe projective, lisse et géométriquement intègre tracée sur $X$. De l'égalité $A_0(X) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l = 0$ on déduit que pour tout entier $n > 0$, l'application naturelle $A_0(X)\{l\}/l^n \to A_0(X)/l^n$ est un isomorphisme. Ceci peut se voir aussi directement (sans recourir au passage à la limite inductive $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$) : cette flèche est clairement injective, et pour la surjectivité il suffit grâce au théorème de Bertini de traiter le cas d'une courbe projective, lisse et géométriquement connexe $C$, pour laquelle l'assertion résulte immédiatement de la structure de $A_0(C)$.

Lorsque $X$ est de plus une surface, pour laquelle

$$A_0(X)\{l\} = (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^N \oplus F$$

comme on l'a vu ci-dessus, on en déduit un isomorphisme naturel $F/l^n \simeq A_0(X)/l^n$ pour tout entier $n > 0$. Choisissant $n = t$ tel que $l^t.F = 0$, on obtient que l'application composée naturelle $F \hookrightarrow A_0(X) \to A_0(X)/l^t$ est un isomorphisme. Ainsi, dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow A_0(X) \longrightarrow A_0(X)/l^t \longrightarrow 0$$

définissant $D$, la projection $A_0(X) \to A_0(X)/l^t$ est scindée, ce qui donne un isomorphisme $A_0(X) \simeq D \oplus F$, et l'égalité $D/l = 0$ : le groupe $D$ est donc le sous-groupe $l$-divisible maximal de $A_0(X)$. Ceci établit l'énoncé (d). L'énoncé (c) est une conséquence évidente de (d). □

L'énoncé ci-dessus laisse les questions suivantes ouvertes : La torsion de $A_0(X)$ est-elle finie ? Le groupe $A_0(X)$ est-il $l$-divisible pour presque tout premier $l$ ? Le sous-groupe divisible maximal de $A_0(X)$ est-il uniquement divisible ? Dans certains cas, on peut répondre à ces questions. Je renvoie à [8], § 8, pour les deux énoncés suivants.

Théorème 2.2 ([10]). *Soit $X$ une surface projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps $k$ $p$-adique. Si $H^2(X, O_X) = 0$, alors le sous-groupe de torsion de $A_0(X)$ est fini.*

Théorème 2.3 (S. Saito). *Soit $X$ une surface projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps $k$ $p$-adique. Si $H^2(X, O_X) = 0$, et si la variété d'Albanese $\mathrm{Alb}_{X/k}$ de $X$ a bonne réduction sur le corps $p$-adique $k$, alors l'accouplement naturel induit une injection*

$$A_0(X)_{tors} \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

*Si de plus la flèche $alb : A_0(\overline{X}) \to \mathrm{Alb}_{X/k}(\overline{k})$ est un isomorphisme, alors l'accouplement naturel induit une injection*

$$A_0(X) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

(Selon une conjecture de S. Bloch, l'hypothèse supplémentaire selon laquelle $alb$ est un isomorphisme résulte de la nullité de $H^2(X, O_X) = 0$.)

Parmi les surfaces auxquelles le théorème 2.3 s'applique, on trouve les surfaces rationnelles, les surfaces d'Enriques, de Godeaux, les surfaces de Barlow (ces diverses surfaces satisfont $H^2(X, O_X) = 0$ et $H^1(X, O_X) = 0$ et aussi $A_0(\overline{X}) = 0$); on trouve aussi les surfaces fibrées en coniques au-dessus d'une courbe $C/k$ ayant bonne réduction (dans ce cas $H^1(X, O_X) = H^1(C, O_C)$). Comme viennent de le montrer Parimala et Suresh [31], on ne peut omettre cette dernière condition : ces auteurs ont en effet exhibé un exemple de surface $X$ fibrée en coniques au-dessus d'une courbe (la courbe ayant mauvaise réduction) telle que l'application $A_0(X)_{tors} \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ ne soit pas injective.

Le cas des surfaces avec $H^2(X, O_X) \neq 0$ semble difficile à atteindre. De fait, en utilisant une technique développée par Bloch et Srinivas [5], on se convainc facilement que dans ce cas, sur un corps $p$-adique, l'application naturelle $A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(k)$ a un noyau qui n'est pas de torsion.

On dispose cependant de quelques résultats de finitude pour le sous-groupe de torsion, dus à Raskind [32, Cor. 1.10], Mildenhall [29], Shen [Sh94].

Théorème 2.4 (Raskind). *Soit $k$ un corps $p$-adique de corps résiduel $\mathbf{F}$. Soit $X/k$ une surface projective, lisse, géométriquement intègre avec bonne réduction $Y/\mathbf{F}$. Si les rangs des groupes de Néron-Severi géométriques de $X$ et de $Y$ coïncident, alors la partie première à $p$ du sous-groupe de torsion de $A_0(X)$ est finie.*

Raskind montre comment certaines variétés abéliennes et certaines surfaces $K3$ satisfont la condition (assez restrictive) du théorème. Les deux résultats suivants portent sur des surfaces qui ne satisfont pas les hypothèses du théorème 2.4.

Théorème 2.5 (Mildenhall). *Soit $E/\mathbf{Q}$ une courbe elliptique modulaire, de bonne réduction en $p$. Soient $X = E \times_{\mathbf{Q}} E$ la surface produit de $E$ avec elle-même, et $X_{\mathbf{Q}_p} = X \times_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p$. Alors la torsion première à $p$ du groupe $A_0(X_{\mathbf{Q}_p})$ est un groupe fini.*

Ce théorème n'est pas explicité dans [29], mais résulte facilement de la Prop. 4.10, loc. cit. Indiquons comment. Soit $\mathcal{X}/\mathbf{Z}_p$ un modèle projectif et lisse de $X$ et soit $Y/\mathbf{F}_p$ la réduction modulo $p$. Mildenhall établit que le noyau de l'application surjective de restriction $CH^2(\mathcal{X}) \to CH^2(X)$ est fini. Ainsi la torsion $l$-primaire de $CH^2(X)$ est finie si et seulement si celle de $CH^2(\mathcal{X})$ l'est. Mais pour $l$ premier à $p$, la torsion $l$-primaire $CH^2(\mathcal{X})\{l\}$ de $CH^2(\mathcal{X})$ est un sous-quotient de $H^3_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ (cf. [8], démonstration du théorème 6.2), et ce dernier groupe est isomorphe à $H^3_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$. Des conjectures de Weil on déduit que ce groupe est fini, et l'on peut montrer qu'il est nul pour presque tout $l$ (cf. [14], Thm. 2 p. 780). □

THÉORÈME 2.6 (Shen). *Soient $k$ un corps $p$-adique et $E_1$ et $E_2$ deux courbes elliptiques sur $k$. Soit $X = E_1 \times_k E_2$. Sous l'une des hypothèses suivantes :*

*(a) $E_1$ a bonne réduction et $E_2$ a réduction multiplicative,*

*(b) $E_1$ et $E_2$ ont réduction multiplicative, et sont isogènes, la torsion première à $p$ de $A_0(X)$ est finie.*

Shen a aussi des résultats de finitude pour certaines surfaces produits de deux courbes modulaires.

Passons maintenant au cas des corps de nombres. On dispose du théorème suivant (Raskind et l'auteur [10], Salberger [39]) :

THÉORÈME 2.7. *Soient $k$ un corps de nombres et $X/k$ une surface projective, lisse, géométriquement intègre. Si $H^2(X, O_X) = 0$, alors le sous-groupe de torsion $A_0(X)_{tors}$ de $A_0(X)$ est fini. Si de plus la flèche alb : $A_0(\overline{X}) \to \mathrm{Alb}_{X/k}(\overline{k})$ est un isomorphisme, alors le groupe $A_0(X)$ est un groupe de type fini.*

Ce théorème recouvre de nombreux résultats antérieurs. On renvoie à [10] et [8] pour une discussion et une évocation des résultats ultérieurs (dont celui de Saito [34]), assurant la finitude de $A_0(X)_{tors}$ pour $X/k$ une surface projective lisse sur un corps $k$ de type fini sur $\mathbf{Q}$, sous l'hypothèse que $H^2(X, O_X) = 0$ et $H^1(X, O_X) = 0$, et que $X$ possède un point $k$-rationnel).

Lorsque le groupe $H^2(X, O_X)$ n'est pas nul, on ne dispose pas de résultat général. Cependant certaines surfaces produits d'une courbe elliptique avec elle-même ont été étudiées.

TÉORÈME 2.8 (Mildenhall). *Soit $E/\mathbf{Q}$ une courbe elliptique modulaire, de conducteur $N$. Soit $X = E \times_{\mathbf{Q}} E$ la surface produit de $E$ avec elle-même. Soit $n$ un entier premier à $6N$. Alors le groupe de $n$-torsion ${}_nA_0(X)$ est fini.*

Ceci résulte facilement du Théorème 1.3 de [29], par un argument analogue à celui donné plus haut. Désignons en effet par $\mathcal{X}$ un modèle projectif et lisse de $X$ au-dessus de Spec($\mathbf{Z}[1/6N]$). Soit $l$ un nombre premier ne divisant pas $6N$. D'après Mildenhall, le noyau de la flèche

$$CH^2(\mathcal{X}) \to CH^2(X)$$

est un groupe de torsion. Il en est donc de même du noyau de la flèche $CH^2(\mathcal{X}_{1/l}) \to CH^2(X)$, puisque ce groupe est un quotient du précédent (on note $\mathcal{X}_{1/l} = \mathcal{X} \times_{\mathbf{Z}[1/6N]} \mathbf{Z}[1/6lN]$). On en déduit que la torsion $l$-primaire $CH^2(\mathcal{X}_{1/l})\{l\}$ de $CH^2(\mathcal{X}_{1/l})$ se surjecte sur la torsion $l$-primaire $CH^2(X)\{l\}$ de $CH^2(X)$. Mais le groupe $CH^2(\mathcal{X}_{1/l})\{l\}$ est un groupe de type cofini (somme d'un groupe fini et d'un nombre fini d'exemplaires de $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$), car quotient du groupe de type cofini

$$H^3_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{1/l}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$$

(cf. [8], dém. du théorème 9.2). C'est donc un groupe de torsion de type cofini. Il en est donc de même du groupe $CH^2(X)\{l\}$, ce qui implique que pour tout entier $m > 0$, la $l^m$-torsion de $CH^2(X) = CH_0(X)$ est finie. $\square$

Depuis mon exposé à Bordeaux en Septembre 1993, des progrès dans cette direction ont été accomplis par A. Langer et S. Saito [25]. Supposant la courbe elliptique modulaire $E/\mathbf{Q}$ sans multiplication complexe, et le conducteur $N$ sans facteur carré, ces auteurs montrent que pour $p$ premier ne divisant pas $6N$, la torsion $p$-primaire de $A_0(X)$ est finie. La difficulté est de montrer que l'exposant de la torsion est fini. Un ingrédient essentiel est fourni par certaines classes dans le groupe $H^1_{Zar}(X, \mathcal{K}_2)$, découvertes par Bloch et Mildenhall [29], et utilisées par Flach [20].

Passons maintenant à l'aspect local-global. La conjecture 1.5 (a) et, sous une forme un peu plus précise, la conjecture 1.5 (c), furent d'abord énoncées pour les surfaces rationnelles [12]. Etant donné un corps $k$, on appelle $k$-surface rationnelle une $k$-surface projective, lisse, géométriquement intègre, qui, sur la clôture algébrique de $k$, devient birationnelle à un plan affine. Pour une surface rationnelle, le groupe $A_0(X)$ est un groupe de torsion.

Pour toute surface rationnelle $X/k$, on dispose d'une application cycle

$$\Phi : A_0(X) \to H^1(k, S)$$

où $S = S_X$ est le $k$-tore dual du module galoisien libre de type fini donné par le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ (voir [12]).

Pour $k$ un corps de nombres, $X/k$ surface rationnelle et $S = S_X$ le $k$-tore associé comme ci-dessus, le corps de classes donne naissance à une suite exacte, définisssant $Ш^1(k, S)$,

$$0 \longrightarrow Ш^1(k,S) \longrightarrow H^1(k,S) \longrightarrow \oplus_{v\in\Omega} H^1(k_v,S) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

où le dernier terme peut être réinterprété comme $\mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Le théorème suivant regroupe les résultats connus sur les surfaces rationnelles.

Théorème 2.9. *Soient $k$ un corps de nombres et $X/k$ une $k$-surface rationnelle. Alors*

(a) *Le groupe $A_0(X)$ est fini.*
(b) *Les groupes $A_0(X_{k_v})$ sont finis pour toute place $v \in \Omega$, et nuls pour presque toute place $v$.*
(c) *Les applications $\Phi : A_0(X) \to H^1(k,S)$ et $\Phi_v : A_0(X_{k_v}) \to H^1(k_v,S)$ sont injectives.*
(d) *Si $X$ est un fibré en coniques sur la droite projective, alors l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur $X$ est la seule: S'il existe une famille $\{z_v\}_{v\in\Omega} \in \prod_{v\in\Omega} Z_0(X_{k_v})$ de zéro-cycles de degré 1 telle que $\sum_{v\in\Omega} inv_v(\alpha(z_v)) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$, alors il existe un zéro-cycle $z \in Z_0(X)$ de degré 1 .*
(e) *Si $X$ est un fibré en coniques sur la droite projective $\mathbf{P}^1_k$, alors le complexe de groupes finis*

$$A_0(X) \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Omega} A_0(X_{k_v}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

*est exact.*
(f) *Si $X$ est un fibré en coniques sur la droite projective, alors l'inclusion*

$$Ker\,[A_0(X) \to \bigoplus_{v\in\Omega} A_0(X_{k_v})] \hookrightarrow Ш^1(k,S)$$

*induite par $\Phi$ est un isomorphisme.*

Le résultat (e) dit que pour une famille $\{z_v\}_{v\in\Omega}$ de zéro-cycles de degré zéro, l'obstruction produite par le groupe de Brauer est la seule obstruction à l'existence d'un zéro-cycle global $z$ de degré zéro donnant naissance simultanément à chacun des $z_v$, modulo équivalence rationnelle.

Le résultat (f) dit que d'une donnée "motivique", la donnée du module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$, on peut déduire le groupe Ker $[A_0(X) \to \oplus_{v\in\Omega} A_0(X_{k_v})]$, et en particulier dans des circonstances convenables, prédire l'existence de classes non nulles de zéro-cycles, qui partout localement sont triviales.

Pour les surfaces rationnelles fibrées en coniques, les résultats (a) et (b) sont dus à Bloch [2], le résultat (c) est dans [12], les résultats (d), (e) et (f) sont dus à Salberger [38]. Pour les surfaces rationnelles quelconques, par exemple les surfaces cubiques lisses, les résultats (a), (b) et (c) sont dans [7], mais les énoncés (d), (e) et (f) (conjectures de Colliot-Thélène et Sansuc [12]) ne sont pas encore établis.

Des extensions possibles de l'énoncé 2.9 (f) à de vastes classes de variétés ont été esquissées par S. Bloch ([3], Conj. 3.16), mais on ne dispose pas à ce jour d'autre évidence que celle fournie par l'énoncé ci-dessus (voir cependant [29] et [25]).

## 3. Variétés de dimension supérieure

En dimension supérieure, on ne possède pour l'instant de résultats que pour des variétés qui géométriquement (i.e. après passage à une clôture algébrique du corps de base) sont dominées par le produit d'une courbe et d'un espace projectif.

Parmi ces variétés, on trouve celles qui sont géométriquement unirationnelles. Pour une telle variété $X$, il existe un entier positif $n > 0$ tel que pour tout surcorps $K/k$, le groupe $A_0(X_K)$ soit annulé par $n$. Par ailleurs le groupe $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est fini.

Pour ces variétés, on a envie de préciser les conjectures du paragraphe 1 de la manière suivante :

CONJECTURES 3.1. *Soient $k$ un corps de nombres et $X$ une $k$-variété projective, lisse et géométriquement intègre, géométriquement unirationnelle. Alors :*

(a) *le groupe $A_0(X)$ est un groupe fini.*
(b) *Pour presque toute place $v$ de $k$, le groupe $A_0(X_{k_v})$ est nul.*
(c) *Pour chaque place $v$ de $k$, le groupe $A_0(X_{k_v})$ est fini.*
(d) *On a une suite exacte (de groupes finis) :*

$$A_0(X) \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Omega} A_0(X_{k_v}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

*où les applications* $A_0(X_{k_v}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ *sont induites par l'accouplement*

$$A_0(X_{k_v}) \times \mathrm{Br}(X_{k_v}) \longrightarrow \mathrm{Br}(k_v) \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

(e) *L'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré un est la seule.*

*Remarque 3.1.1.*

Même pour de telles variétés, et même pour celles qui sont (géométriquement) rationnelles, il n'est pas raisonnable de conjecturer que l'accouplement

$$A_0(X_{k_v}) \times \mathrm{Br}(X_{k_v}) \longrightarrow \mathrm{Br}(k_v) \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est non dégénéré à gauche (à la différence de ce qui se passe pour les surfaces (Théorème 2.3)). Pour le cas des places réelles, il est facile de donner des contre-exemples en utilisant le résultat de [9] : on prend pour $X/\mathbf{R}$ une intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^5_{\mathbf{R}}$, telle que $X(\mathbf{R})$ possède deux composantes connexes réelles. Pour un corps de base $p$-adique $k$, Parimala et Suresh [31] ont donné un exemple de variété $X/k$ de dimension 3, fibrée en quadriques de dimension deux au-dessus de la droite projective sur un corps $p$-adique, toutes les fibres étant géométriquement intègres, et telle que $A_0(X_{k_v}) \neq 0$, alors qu'on vérifie facilement $\mathrm{Br}(X_{k_v})/\mathrm{Br}(k_v) = 0$.

*Remarque 3.1.2.*

Soient $k$ un corps de nombres et $X$ une $k$-compactification lisse d'un $k$-groupe algébrique linéaire connexe $G$. On peut alors établir l'énoncé (b) (nullité de $A_0(X_{k_v})$ pour presque toute place $v$) : cela résulte de [11] (Corollaire à la Prop. 14, p.205). Par contre, même lorsque $G$ est un $k$-tore, on ne sait pas établir la finitude des groupes $A_0(X)$ et $A_0(X_{k_v})$, ni la suite exacte de la conjecture 3.1(d). On sait que le groupe $G(k)/R$, quotient du groupe des points rationnels par la $R$-équivalence, est fini (Gille, [22]). Quand $G$ est un $k$-tore $T$, on dispose ([11], Prop. 19) pour le sous-groupe $T(k)/R \subset A_0(X)$ ([11], Prop. 13) d'une suite exacte comme souhaitée en (d), ainsi que d'un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}[(T(k)/R) \to \bigoplus_{v \in \Omega} (T(k_v)/R)] \simeq Ш^1(k, S),$$

où $S$ désigne le $k$-tore dual de $\mathrm{Pic}(\overline{X})$, ce qui implique que le groupe $Ш^1(k, S)$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{Ker}[A_0(X) \to \bigoplus_{v \in \Omega} A_0(X_{k_v})]$ (ce qu'on comparera avec le Théorème 2.9 (c) ci-dessus).

Les résultats de finitude obtenus pour le groupe $CH_0(X)$ en dimension supérieure portent sur des variétés $X$ fibrées au-dessus d'une courbe, la fibre générique étant "presque" rationnelle. Plus précisément, soient $k$ un corps, $C/k$ une courbe projective, lisse et géométriquement intègre, puis $X/k$ une $k$-variété projective, lisse, géométriquement intègre et $\pi : X \to C$ un $k$-morphisme plat, surjectif, à fibre générique lisse géométriquement intègre. On étudie le groupe

$$CH_0(X/C) = \mathrm{Ker}\ \pi_* :\ CH_0(X) \to CH_0(C)$$

(qui, lorsque $C$ est de genre zéro, coïncide avec $A_0(X)$). Soit $K = k(C)$ le corps des fonctions de $C$, et soit $X_\eta$ la fibre générique de $\pi$. On définit le groupe des normes $N = N_{X_\eta}(K)$ de la $K$-variété $X_\eta$ comme le sous-groupe $N \subset K^*$ engendré par les sous-groupes $N_{L/K}(L^*)$ pour $L/K$ extension finie telle que $X_\eta(L) \neq \emptyset$. On définit ensuite le sous-groupe $K^*_{dn} \subset K^*$ comme le sous-groupe de $K^*$ formé des éléments $f$ tels que $\mathrm{div}_C(f) \in \pi_*(Z_0(X))$. On a alors la proposition suivante ([17]):

Proposition 3.2. *Soit $\pi : X \to C$ comme ci-dessus. Supposons que pour tout point fermé $P \in C$, de fibre associée $X_P/k(P)$, on ait $A_0(X_P) = 0$. Alors on dispose d'un isomorphisme*

$$K^*_{dn}/k^*.N \simeq Ker\ \pi_* :\ A_0(X) \to A_0(C).$$

Dans cet énoncé, la flèche n'est autre que celle qui à une fonction $f \in K^*_{dn}$, de diviseur $\mathrm{div}_C(f) = \pi_*(z)$, associe la classe du zéro-cycle $z$.

On notera que le groupe $K^*/N$ est annulé par le degré de toute extension $L/K$ avec $X_\eta(L) \neq \emptyset$. Il en est donc de même des groupes $K^*_{dn}/N$ et $K^*_{dn}/k^*.N$.

Dans certains cas, on peut contrôler le quotient $K^*/N$. Ainsi, si $X_\eta/K$ est une variété de Severi-Brauer d'algèbre simple centrale associée $D/K$, alors $N$ coïncide avec le sous-groupe $\mathrm{Nrd}(D^*) \subset K^*$ des normes réduites. Si de plus $D$ est d'indice $n$ sans facteur carré, et premier à la caractéristique de $k$, alors un théorème de Merkur'ev et Suslin [28] donne un plongement $K^*/N \hookrightarrow H^3(K, \mu_n^{\otimes 2})$, l'application associant à une fonction $f \in K^*$ le cup-produit de la classe de $f$ dans $K^*/K^{*n} \simeq H^1(K, \mu_n)$ avec la classe de $D$ dans $H^2(K, \mu_n)$ (groupe qui s'identifie à la $n$-torsion du groupe de Brauer de $K$). On peut alors étudier le groupe $CH_0(X/C)$ en étudiant l'image de $K^*_{dn}/N$ par la flèche $K^*/N \hookrightarrow H^3(K, \mu_n^{\otimes 2})$.

Le premier résultat de finitude, obtenu par une méthode essentiellement équivalente, est dû à Salberger ([36], [37]) :

Théorème 3.3. *Soit $X$ une variété projective et lisse sur un corps $k$, équipée d'une fibration $\pi : X \to \mathbf{P}^1_k$ sur la droite projective, la fibre générique étant une variété de Severi-Brauer d'indice premier.*

(a) *Si $k$ est un corps $p$-adique, le groupe $A_0(X)$ est fini.*
(b) *Si $k$ est un corps de nombres, le groupe $A_0(X)$ est fini, et pour presque toute place $v$ de $k$, le groupe $A_0(X_{k_v})$ est nul.*

E. Frossard vient d'étendre ce résultat au cas où la droite projective est remplacée par une courbe projective lisse $C/k$ de genre quelconque, et où le groupe $A_0(X)$ est remplacé par sa généralisation $CH_0(X/C)$.

Le cas où l'indice est 2 correspond aux fibrations en coniques. La technique évoquée plus haut permet de traiter les variétés de dimension 3 fibrées au-dessus d'une courbe, la fibre générique étant une quadrique de dimension 2 (le point est que là encore on a un bon contrôle sur le groupe $N = N_{X_\eta}(K)$ associé à une quadrique lisse $X_\eta/K$ de dimension 2). Le résultat suivant provient de [17], complété par [31] :

Théorème 3.4. *Soit $X$ une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps $k$, équipée d'une fibration $\pi : X \to C$ sur une courbe projective, lisse et géométriquement connexe $C$. Supposons que la fibre générique de $\pi$ est une quadrique lisse de dimension 2. Alors*

(a) *Si $k$ est un corps $p$-adique, le groupe $CH_0(X/C)$ est fini.*
(b) *Si $k$ est un corps de nombres, le groupe $CH_0(X/C)$ est fini, et le groupe $CH_0(X_{k_v}/C_{k_v})$ est nul pour presque toute place $v$ de $k$.*

Pour toute quadrique lisse $Y/F$ définie par une forme quadratique $q$, on a une interprétation simple de $N_Y(F)$ : c'est le sous-groupe de $F^*$ engendré par les produits d'un nombre pair de valeurs non nulles de $q$ sur $F$. Mais lorsque le rang de $q$ est au moins 5, on n'a pas d'interprétation simple du quotient $F^*/N_Y(F)$.

Cependant, par une réduction ingénieuse au cas des dimensions relatives un et deux (Thm. 2.2 et Thm 3.4 ci-dessus), dans le cas $p$-adique, Parimala et Suresh [31] ont réussi à établir le :

Théorème 3.5. *Soit $X$ une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps $p$-adique $k$, équipée d'une fibration $\pi : X \to C$ sur une courbe $C$ projective, lisse et géométriquement connexe. Supposons que la fibre générique de $\pi$ est une quadrique lisse de dimension au moins 1. Alors le groupe $CH_0(X/C)$ est un groupe fini.*

C'est une question ouverte de savoir si, sous les hypothèses du théorème ci-dessus, et pour une fibration en quadriques de dimension relative au moins 3, le groupe $CH_0(X/C)$ peut être non nul. Sous les mêmes hypothèses sur $k$ et $C$, on peut en fait poser la question suivante. Soit $q$ une forme quadratique non dégénérée de rang 5 sur le corps $k(C)$. Le sous-groupe du groupe multiplicatif $k(C)^*$ engendré par les produits d'un nombre pair de valeurs non nulles de $q$ est-il tout $k(C)^*$ ? Ce serait le cas si toute forme quadratique sur $k(C)$ en au moins 10 variables avait un zéro non trivial, a fortiori si c'était le cas pour les formes en 9 variables – c'est là encore une question ouverte, même pour $C = \mathbf{P}^1_k$.

Lorsque $k$ est un corps de nombres, on ne sait établir l'analogue du théorème 3.4 que sous une hypothèse restrictive, à savoir que la forme quadratique définissant la fibre générique contient une forme voisine d'une 3-forme de Pfister ([17], [31]).

La conjecture 1.5 ci-dessus fut formulée par Sansuc et moi-même [12] en 1981, pour les surfaces rationnelles. L'évidence dont nous disposions alors était numérique (voir aussi [40]). Elle fut ensuite établie ([15]) pour les surfaces de Châtelet, qui sont les surfaces fibrées en coniques non triviales les plus simples. Puis Salberger [38] l'établit pour toutes les surfaces fibrées en coniques. Dans le récent article [18], Swinnerton-Dyer et moi-même reprenons la technique de Salberger et l'étendons à un cadre plus large.

Soit $F$ un corps, $F_i/F$ $(i = 1, \cdots, n)$ des extensions finies séparables de $F$, puis $Z_i/F$ des $F$-variétés de Severi-Brauer. La variété

$$\prod_i R_{F_i/F}(V_i \times_F F_i)$$

sera appelée variété de Severi-Brauer généralisée (la notation $R_{F_i/F}$ désigne la restriction à la Weil). Des exemples de telles variétés sont bien sûr fournis par les variétés de Severi-Brauer usuelles, mais aussi par les quadriques lisses de dimension deux.

Théorème 3.6 ([18]). *Soient $k$ un corps de nombres et $\pi : X \to \mathbf{P}^1_k$ une $k$-variété projective, lisse, géométriquement intègre, fibrée au-dessus de la droite projective. Supposons que la fibre générique $X_\eta$ sur le corps $K = k(\mathbf{P}^1)$ est $K$-isomorphe à une variété de Severi-Brauer généralisée. Alors*

(a) *L'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un zéro-cycle sur $X$ est la seule obstruction.*

(b) *Si $X$ possède un zéro-cycle de degré 1, les applications naturelles induisent une suite exacte*

$$A_0(X) \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Omega} A_0(X_{k_v})/\mathrm{Br} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

*où les groupes $\bigoplus_{v\in\Omega} A_0(X_{k_v})/\mathrm{Br}$ et $\mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sont finis.*

Outre la technique originale de Salberger [38], nous utilisons une variante dans le cadre des zéro-cycles de l'énoncé suivant, dégagé dans la thèse de D. Harari [23] :

THÉORÈME 3.7. *Soient $k$ un corps de nombres et $X/k$ une variété projective, lisse, géométriquement intègre. Soit $U \subset X$ un ouvert de Zariski non vide de $X$, soit $A \in \mathrm{Br}(U)$ un élément du groupe de Brauer (cohomologique) de $U$. Si $A$ ne provient pas de $\mathrm{Br}(X)$, alors il existe une infinité de places $v$ de $k$ telles que l'image de l'application $U(k_v) \to \mathrm{Br}(k_v)$, qui à $M \in U(k_v)$ associe $A(M)$, contienne un élément non nul.*

(Ce théorème prend le contrepied de l'énoncé classique disant que si $A$ appartient à $\mathrm{Br}(X)$, alors pour toute place $v$ de $k$ sauf un nombre fini, pour tout $M \in X(k_v)$, on a $A(M) = 0$.)

Au cours des Journées Arithmétiques, P. Salberger m'a informé qu'il venait d'obtenir un résultat voisin du théorème 3.6. Sa technique est assez différente, il utilise les torseurs universels de [13].

Il serait intéressant d'étendre le théorème 3.6 au cas des fibrations $\pi : X \to \mathbf{P}^1_k$ dont la fibre générique est (birationnelle) à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BLOCH, *Torsion algebraic cycles, $K_2$ and Brauer groups of function fields*, in L.N.M. **844** (éd. M. Kervaire et M. Ojanguren) Springer 1981.

[2] S. BLOCH, *On the Chow groups of certain rational surfaces*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **14** (1981), 41–59.

[3] S. BLOCH, *Algebraic K-theory, motives and algebraic cycles*, Proceedings of the ICM, Kyoto, Japan 1990, Springer 1991, Vol. 1, 43–54.

[4] S. BLOCH and A. OGUS, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **7** (1974), 181–202.

[5] S. BLOCH and V. SRINIVAS, *Remarks on correspondences and algebraic cycles*, Am. J. Math. **105** (1983), 1235–1253.

[6] J. W. S. CASSELS, *Arithmetic on curves of genus 1 (VII). The dual exact sequence*, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **216** (1964), 150–158.

[7] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, *Hilbert's theorem 90 for* $K_2$*, with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. math. **71** (1983), 1–20.

[8] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, *Cycles algébriques de torsion et* $K$*-théorie algébrique*, in *Arithmetical Algebraic Geometry*, C.I.M.E. 1991, E. Ballico ed., L. N. M. **1553**, Springer-Verlag, 1993.

[9] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et F. ISCHEBECK, *L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles*, C. R. Acad. Sc. Paris **292** (1981), 723–725.

[10] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et W. RASKIND, *Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres : un théorème de finitude pour la torsion*, Invent. math. **105** (1991), 221–245.

[11] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **10** (1977), 175–229.

[12] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE and J.-J. SANSUC, *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J. **48** (1981), 421–447.

[13] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), 375–492.

[14] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC et C. SOULÉ, *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Math. J. **50** (1983), 763–801.

[15] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC and Sir Peter SWINNERTON-DYER, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I*, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **373** (1987) 37-107; II, ibid. **374** (1987) 72-168.

[16] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE and C. SCHEIDERER, *Zero-cycles and cohomology on real algebraic varieties*, à paraître dans Topology.

[17] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et A. N. SKOROBOGATOV, *Groupe de Chow des zéro-cycles sur les fibrés en quadriques*, K-Theory **7** (1993), 477-500.

[18] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE and Sir Peter SWINNERTON-DYER, *Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer varieties and similar varieties*, Journal für die reine und angew. Math. (Crelle) **453** (1994), 49–112.

[19] C. S. DALAWAT, *Groupe des classes de zéro-cycles sur les surfaces rationnelles définies sur un corps local*, Thèse, Université de Paris-Sud, Juin 1993.

[20] M. FLACH, *A finiteness theorem for the symmetric square of an elliptic curve*, Invent. math. **109** (1992), 307–327.

[21] W. FULTON, *Intersection Theory*, Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgeb. Bd. **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[22] Ph. GILLE, *Un théorème de finitude arithmétique sur les groupes réductifs*, C. R. Acad. Sc. Paris **316** (1993), 701–704.

[23] D. HARARI, *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75** (1994), 221-260.

[24] K. KATO and S. SAITO, *Global class field theory of arithmetic schemes*, Contemp. Math. **55**, vol. **1**, 255–331.

[25] A. LANGER and S. SAITO, *Torsion zero-cycles on the self-product of a modular elliptic curve*, preprint 1994.

[26] S. LICHTENBAUM, *Duality theorems for curves over p-adic fields*, Invent. math. **7** (1969), 120–136.

[27] Yu. I. MANIN, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, in Actes Congrès intern. math. Nice, 1970, Tome **I**, 401–411.

[28] A.S. MERKUR'EV and A.A. SUSLIN, *K-cohomology of Severi–Brauer varieties and norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982) 1011–1146 = Math. USSR Izv. **21** (1983) 307–341.

[29] S. J. MILDENHALL, *Cycles in a product of elliptic curves, and a group analogous to the class group*, Duke Math. J. **67** (1992), 387-406.

[30] J. S. MILNE, *Arithmetic Duality Theorems*, Perspectives in Math. vol. **1**, Academic Press 1986.

[31] R. PARIMALA and V. SURESH, *Zero-cycles on quadric fibrations : Finiteness theorems and the cycle map*, Invent. Math. **122** (1995), 83–117.

[32] W. RASKIND, *Torsion algebraic cycles on varieties over local fields*, in *Algebraic K–theory : Connections with Geometry and Topology*, Lake Louise 1987, J.F. Jardine and V.P. Snaith ed., Kluwer Academic Publishers 1989.

[33] S. SAITO, *Some observations on motivic cohomology of arithmetic schemes*, Invent. math. **98** (1989), 371–404.

[34] S. SAITO, *Cycle map on torsion algebraic cycles of codimension two*, Invent. math. **106** (1991), 443–460.

[35] S. SAITO and R. SUJATHA, *A finiteness theorem for cohomology of surfaces over p-adic fields and an application to Witt groups*, in *Algebraic K-Theory, Quadratic Forms and Central Simple Algebras*, 1992 A. M. S. Summer Conference (Santa Barbara), B. Jacob and A. Rosenberg ed., Proc. Symposia in Pure Mathematics, Vol. 58, Part 2, 403–416.

[36] P. SALBERGER, *K-theory of orders and their Brauer-Severi schemes*, Thèse, Université de Göteborg, 1985.

[37] P. SALBERGER, *Galois descent and class groups of orders*, in *Orders and their*

*applications*, Oberwolfach 1984, I. Reiner and R. W. Roggenkamp ed., L. N. M. **1142**, Springer-Verlag, 1985.

[38] P. SALBERGER, *Zero-cycles on rational surfaces over number fields*, Invent. math. **91** (1988), 505–524.

[39] P. SALBERGER, *Chow groups of codimension two and l-adic realizations of motivic cohomology*, in *Séminaire de théorie des nombres*, Paris 1991/1992, éd. Sinnou David, Progress in Mathematics **116** (1993), 247–277.

[40] J.-J. SANSUC, *A propos d'une conjecture arithmétique sur le groupe de Chow d'une surface rationnelle*, Séminaire de théorie des nombres, Bordeaux 1981/1982, exp. 33.

[41] H. SHEN, *Monodromy and torsion algebraic cycles*, Thèse, Arizona State University, Juillet 1993.

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S., Mathématiques
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
F-91405 ORSAY