Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **7** *(1995), 97–110*

Problèmes diophantiens sur les t-modules

par Laurent DENIS

RÉSUMÉ – On montre ici comment un raffinement de la hauteur canonique sur les puissances tensorielles du module de Carlitz permet d'obtenir des résultats de finitude pour les systèmes d'équations de Fermat. Ces résultats améliorent ceux de [D2]. On établit également une majoration de la différence entre la hauteur canonique et la hauteur de Weil sur les modules de Drinfeld. On termine en indiquant une liste de problèmes ouverts analogues aux conjectures diophantiennes de Lang, Mazur, Lehmer, et au théorème de Faltings.

1. Position du problème.

On désigne par $\mathbf{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans le corps fini F_q de caractéristique $p > 0$, par $k = \mathbf{F}_q(T)$ son corps des fractions, par $k_\infty = \mathbf{F}_q((1/T))$ le complété de k pour la valuation $(1/T)$-adique v, que l'on prolonge à une clôture algébrique $\overline{k}$ (resp. $\overline{k}_\infty$) de k (resp. $\overline{k}_\infty$). On notera $|\alpha| = q^{-v(\alpha)}$, la valeur absolue d'un élément de $\overline{k}_\infty$.

On désigne encore par t une indéterminée, par A l'anneau $\mathbf{F}_q[t]$ des polynômes en t et par deg a, le degré d'un polynôme a de $\mathbf{F}_q[t]$ et on conviendra que deg $0 = -\infty$. Par t-module de dimension N, on entend la donnée d'un couple $E = (G_a^N, \Phi)$ où G_a^N désigne le groupe additif de dimension N et Φ un homomorphisme injectif d'anneau de $\mathbf{F}_q[t]$ dans l'anneau $\overline{k}_\infty\{F\}$ des endomorphismes de G_a^N vérifiant :

$$\Phi(t) = a_0 F^0 + \cdots + a_u F^u,$$

où les $a_i (0 \leq i \leq u)$ sont des matrices $N \times N$ à coefficients dans $\overline{k}_\infty$ avec $a_u \neq 0$, et F est l'endomorphisme de Frobenius sur G_a^N c'est-à-dire l'élévation à la puissance q.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). 11G09.
Manuscrit reçu le 18 novembre 1993.

Nous utiliserons aussi le fait que $\Phi(t)$ est également une matrice $N \times N$ à coefficients dans $\overline{k}_\infty\{\tau\}$ (τ étant le Frobenius sur G_a). Un sous-t-module H de E sera un sous-groupe algébrique connexe de G_a^N vérifiant $\Phi(t)(H) \subset H$.

Le premier T-module considéré fut le module de Carlitz défini en dimension 1 par $\Phi(T) = TF^0 - F$. De nos jours le terme module de Carlitz désigne le module isomorphe au précédent et défini par $\Phi_C(T) = TF^0 + F$.

2. Quelques propriétés des hauteurs

On dispose sur $\mathbb{P}^N(\overline{k})$ de la hauteur de Weil usuelle. Si L est une extension finie de k de degré m, la hauteur d'un point $P = (x_0, \cdots, x_N)$ de $\mathbb{P}^N(L)$ est donnée par :

$$h(P) = \sum_w \frac{d(w)\max_{0 \le i \le N}[-w(x_i)]}{m},$$

où la somme est étendue à toutes les places de $L, d(w)$ désigne le degré résiduel en la place w , normalisée par $w(L) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. Cette hauteur est indépendante du corps L choisi comme le montrent les propriétés usuelles des valuations (cf. [L]).

On définit la hauteur d'un élément $(x_1, \cdots, x_N)$ de $G_a^N(\overline{k})$ comme étant celle du point projectif de coordonnées $(1, x_1, \cdots, x_N)$. C'est-à-dire on plonge G_a^N dans $\mathbb{P}^N$ et on considère la hauteur de Weil relative à ce plongement.

On se place maintenant sur un t-module E de dimension N, dont on note Φ l'homomorphisme associé, et on suppose qu'il existe un plus petit entier $n > 0$ tel que dans l'écriture de :

$$\Phi(t^n) = b_{0,n}F^0 + \cdots + b_{d,n}F^d,$$

le coefficient $b_{d,n}$ soit inversible.

On pose dorénavant $t' = t^n$, et on note que q^d est le maximum des degrés des polynômes définissant $\Phi(t')$.

Le théorème suivant (démontré dans [D1]) établit l'existence d'une hauteur canonique sur un t-module analogue à celle de Néron-Tate sur une variété abélienne.

THÉORÈME 0. *Il existe une fonction* $\widehat{h}$ *de* $G_a^N(\overline{k})$ *dans* $\mathbb{R}$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

1) *Pour tout polynôme* P *de* $\mathbf{F}_q[t']$, *de degré* $r \geq 0$ *et tout* α *de* $G_a^N(\overline{k}) : \widehat{h}[\Phi(P)(\alpha)] = q^{dr}\widehat{h}(\alpha)$.
2) $\widehat{h} - h$ *est une fonction bornée sur* $G_a^N(\overline{k})$.
3) $\widehat{h}(\alpha + \beta) \leq \widehat{h}(\alpha) + \widehat{h}(\beta)$.
4) $\widehat{h}$ *est l'unique fonction vérifiant la propriété 2) et la propriété 1 pour un polynôme de* $\mathbf{F}_q[t']$ *de degré* $r > O$.
5) *Pour tout couple de réels* $C, C' > 0$ *il n'y a qu'un nombre fini de points* α *dans* $(G_a)^N(\overline{k})$ *définis sur une extension de* k *de degré* $\leq C'$ *et vérifiant* $\widehat{h}(\alpha) \leq C$.

Remarque : Le théorème 0 ne dit rien sur $\widehat{h}[\Phi(P)(\alpha)]$ quand P est dans $\mathbf{F}_q[t] \backslash \mathbf{F}_q[t']$. En modifiant cette hauteur on peut avoir un peu mieux. Posons :

$$\overline{h}(\alpha) = q^{(1-n)d/n} \sum_{i=1}^{n} q^{(i-1)d/n} \widehat{h}[\Phi(t^{n-i})(\alpha)].$$

THÉORÈME 1.

a) $\overline{h}[\Phi(t)(\alpha)] = q^{d/n}\overline{h}(\alpha)$.
b) *Si* P *est de degré* r *dans* $\mathbf{F}_q[t] : \overline{h}[\Phi(P)(\alpha)] \leq (r+1)q^{dr/n}\overline{h}(\alpha)$.
c) *Soit* $\omega = q^d q^{(1-n)d/n} \sum_{i=1}^{n} q^{(i-1)d/n}$, *il existe un réel* $C_1 > 0$ *tel que :* $\widehat{h} \leq \overline{h} \leq \omega\widehat{h} + C_1$.

Preuve. a) clair.

b) La sous additivité de $\widehat{h}$ entraîne celle de $\overline{h}$, on utilise alors la propriété du a).

c) $\Phi(t^{n-i})$ est représenté par des polynômes de degré inférieur à q^d d'où $h(\Phi(t^{n-i})(\alpha)) \leq q^d h(\alpha) + C$ (c.f.[L] lemma 1.6 §4). On utilise alors la majoration entre la hauteur canonique et la hauteur de Weil.

Au paragraphe suivant on utilise cette hauteur pour montrer que certains systèmes d'équations diophantiennes n'ont qu'un nombre fini de solutions.

3. Equations de Fermat

Soit Φ_C le module de Carlitz. Le problème de Fermat introduit par D. Goss dans [G1] est de trouver pour tout $a \in A$ de degré r, les triplets (x, y, z) d'éléments de A tels que :

$$(a,1) \qquad y^{q^r} \Phi_C(a)(x/y) = z^p.$$

Ou de manière plus homogène :

$$(a,1)_h \qquad y^{q^r} \Phi_C(a)(x/y) = z^{q^r}$$

D. Goss a entre autre prouvé que si a est irréductible et régulier (cf [G1]), de degré > 1 alors pour $q \neq 2$, (a,1) et donc (a, $1)_h$ n'a pas de solution avec $x, y, z \in A$ et $xyz \neq 0$. Puis il a montré que si (ab,1) (resp. (ab, $1)_h$) possède une solution avec $xyz \neq 0$, alors il en est de même pour $(a, 1)$ et $(b, 1)$ (resp. pour (a,1)$_h$ et (b,1)$_h$).

Ces propriétés sont analogues à celle de l'équation $x^n - y^n = z^n$. La construction initiale de cette analogie repose sur la remarque qu'une éventuelle solution satisfait

$$y^n((x/y)^n - 1) = z^n;$$

Les racines de $w^n - 1 = 0$, sont les racines de l'unité dont l'analogie avec les points de torsion (i.e. les racines de $\Phi(a)x = 0$), a conduit D. Hayes à l'analogue de la théorie cyclotomique (c.f. [H]). Notons enfin que l'exposant n du problème de Fermat classique peut être vu comme une valeur absolue, ce qui justifie les puissances q-ièmes dans l'équation homogène.

Rappelons que ce problème a été résolu dans [D2] et qu'en particulier il n'y a aucune solution avec $xyz \neq 0$ dès que $\deg(a) \geq 2$ et $p \neq 2$. On s'intéresse ici au problème en dimension supérieure, considéré également par D. Goss ([G2]) et on va améliorer les résultats de finitude obtenu dans [D2] grâce aux nouvelles propriétés de la hauteur obtenues précédemment.

Notation : Pour toute matrice B, on notera $B^{(q)}$ la matrice obtenue en élevant à la puissance q tous les ceofficients de B.

Définition 1[A-T]. *Soit g un entier naturel ≥ 1, la puissance tensorielle g-ième du module de Carlitz est le t-module de dimension g déterminé par l'homomorphisme Φ_g tel que :*

$$\Phi_g(t)(x_1, \cdots, x_g) = (Tx_1 + x_2, \cdots, Tx_{g-1} + x_g, Tx_g + (x_1)^q).$$

On définit alors a_0 et a_1 par : $\Phi_g(t) = a_0 F^0 + a_1 F$. On a vu dans [D1] qu'on pouvait écrire :

$$\Phi_g(t^g) = a_{0,1}F^0 + a_{1,1}F,$$

où $a_{1,1}$ est triangulaire inférieure et n'a que des 1 sur la diagonale.

On va en déduire le lemme suivant :

LEMME 1. *Pour tout entier $h \geq 1$,*

a) *Il existe des matrices $a_{i,h}(0 \leq i \leq h)$ vérifiants :*

$$\Phi_g(t^{gh}) = a_{0,h}F^0 + \cdots + a_{h-1,h}F^{h-1} + a_{h,h}F^h,$$

où $a_{h,h}$ est triangulaire inférieure et n'a que des 1 sur la diagonale ;

b) *Pour tout entier $i, 1 \leq i \leq g-1$ on a :*

$$\Phi_g(t^{gh+i}) = b_{0,i,h}F^0 + \cdots + b_{h,i,h}F^h + b_{h+1,i,h}F^{h+1},$$

où $b_{h+1,i,h}$ est triangulaire inférieure, n'a des termes non nuls qu'éventuellement sur les i plus petites diagonales et a uniquement des 1 sur la i-ième.

Preuve : a) Comme $\Phi_g(t^{gh}) = \Phi_g(t^g)\Phi_g(t^{g(h-1)}), a_{h,h} = a_{1,1}(a_{h-1,h-1})^q$ ce qui entraîne la conclusion du a) car l'ensemble des matrices triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale est stable par produit.

b) Dans cette preuve on notera simplement $b_{u,i}$ pour $b_{u,i,h}$. Comme $\Phi_g(t^{gh+1}) = \Phi_g(t)\Phi_g(t^{gh})$, on déduit du a) que $b_{h+1,1}$ a uniquement le terme 1 sur la plus petite diagonale inférieure et que $b_{h,1}$ a toutes ses diagonales supérieures d'ordre > 2 nulles et n'a que des 1 sur celle d'ordre exactement 2. On a enfin les relations de récurrence :

$$b_{h,i} = a_0(b_{h,i-1}) + a_1(b_{h-1,i-1})^{(q)};$$

$$b_{h+1,i} = a_0(b_{h+1,i-1}) + a_1(b_{h,i-1})^{(q)}.$$

On montre alors par récurrence sur i que $b_{h,i}$ a toutes ses diagonales supérieures d'ordre $\geq i+1$ nulles, n'a que des 1 sur celle d'ordre exactement i et que $b_{h+1,i}$ est triangulaire inférieure, n'a de termes non nuls qu'éventuellement sur les i plus petites diagonales et a uniquement des 1 sur la i-ème.

Soient $X = (x_1, \cdots, x_g), Z = (z_1, \cdots, z_g)$ et y des indéterminées. L'analogue du problème de Fermat pour les puissances tensorielles g-ièmes du module de Carlitz est le problème suivant ([G2]) : pour tout $a \in A$, on pose $r = [(deg(a) - 1)/g] + 1$ déterminer les éventuels $x_1, \cdots, x_g, z_1, \cdots, z_g, y$ de A tels que :

$$(a,g) \qquad y^{q^r} \Phi_g(a)(X/y) = Z^p.$$

Et on a une version plus homogène :

$$(a,g)_h \qquad y^{q^r} \Phi_g(a)(X/y) = Z^{q^r}.$$

Les solutions de la seconde équation conduisent évidemment à des solutions de la première.

Remarque. Il suffit de chercher les éventuelles solutions vérifiant $pgcd(x_1, \cdots, x_g, y) = 1$.

On note h_g la hauteur canonique sur le module $\Phi_g(t^g)$ (plus précisément le module déterminé par $\Phi_g(t')$ où $t' = t^g$), $\overline{h_g}$ la hauteur correspondante du théorème 1 et ω le nombre défini dans ce même théorème. On prouve alors :

THÉORÈME 2. *Si $p > g$ et $deg\ a \geq 2g + 1 + gLog_q g$ alors l'équation (a, g) n'a qu'un nombre fini de solutions avec $pgcd(x_1, \cdots, x_g, y) = 1$.*

Preuve. Par hypothèse $deg(a) = u > g$, écrivons la division euclidienne de $u - 1$ par g : $u = gh + 1 + i$ où $0 \leq i \leq g - 1$. On a alors $r = h + 1$.

Posons $a = \varepsilon_u t^u + \cdots + \varepsilon_0$, où les ε_i sont dans F_q. Comme Φ_g est un homomorphisme d'anneau de A vers les endomorphismes algébriques de $(G_a)^g(\overline{k})$:

$$\Phi_g(a) = [\varepsilon_u \Phi_g(t^{gh+1}) + \cdots + \varepsilon_i]\Phi_g(t^i) + \varepsilon_{i-1}\Phi_g(t^{i-1}) + \cdots + \varepsilon_0.$$

Ecrivons alors la relation (a, g) sous la forme :

$$(1) \qquad \Phi_g(a)(X/y) = Z^p / y^{q^{h+1}}.$$

On voit le terme de gauche de la relation précédente comme une expression polynomiale à coefficients matriciels en $\Phi_g(t^i)(X/y)$.

Avec les notations du lemme 1, le seul coefficient de $[\Phi_g(t^i)(X/y)]^{q^{h+1}}$ est $b_{h+1,1,h}$, et celui de $[\Phi_g(t^i)(X/y)]^{q^h}$ est $B_h := \varepsilon_u b_{h,1,h} + \varepsilon_{u-1} a_{h,h} + \varepsilon_{u-2} b_{h,g-1,h-1} + \cdots + \varepsilon_{u-g} b_{h,1,h-1}$.

Notons dorénavant par un $'$ la dérivation d/dT sur $\mathbf{F}_q[T]$. D'après le lemme 1 $(b_{h+1,1,h})' = 0$. Le lemme 9 de [D2] nous dit que $(\varepsilon_u b_{h,1,h})'$ est triangulaire inférieure et inversible, le lemme 1 ci-dessus nous dit que $(\varepsilon_{u-1} a_{h,h} + \varepsilon_{u-2} b_{h,g-1,h-1} + \cdots + \varepsilon_{u-g} b_{h,1,h-1})'$ est triangulaire inférieure de diagonale nulle. La dérivée du coefficient en $[\Phi_g(t^i)(X/y)]^{q^h}$ est donc une matrice inversible.

La dérivée de l'équation (1) donne une équation :

$$\Psi(t)[\Phi_g(t^i)(X/y)] = ((\varepsilon_{i-1}\Phi_g(t^{i-1}) + \cdots + \varepsilon_0)(X/y))' \tag{2}$$

où $\Psi(t)$ est un t-module de rang h qui possède une hauteur canonique h_Ψ.

On montre par récurrence sur i que pour $1 \leq i \leq g-1, \Phi_g(t^i)(X) = B_i X + C_i X^{(q)}$ avec $h(B_i) = i$ et $h(C_i) = (i-1)q$. Prenons alors la hauteur h_Ψ des deux membres de l'égalité (2) :

$$q^h h_\Psi[\Phi_g(t^i)(X/y)] = h_\Psi(\varepsilon_0(X/y)' + B(X/y) + C(X/y)^q),$$

où B, C sont à coefficients dans A de degré $\leq gq$. La comparaison avec la hauteur de Weil donne :

$$q^h h[\Phi_g(t^i)(X/y)] \leq (q^h + 1)c_\Psi + qh(X/y) + c_2,$$

puis la comparaison avec la hauteur de Φ_g :

$$q^h h_g[\Phi_g(t^i)(X/y)] \leq (1 + q^h)c_\Psi + (q + q^h)c_g + qh_g(X/y) + c_2.$$

Le théorème 1,c) nous dit alors que $\omega h_g \geq \overline{h}_g - C_1$ et le théorème 1,a) entraîne alors :

$$q^{h+i/g}\overline{h}_g(X/y) \leq q\omega h_g(X/y) + c,$$

enfin comme $\overline{h}_g \geq h_g$, on obtient une majoration de $h_g(X/y)$ dès que $q^{h-1+i/g} > \omega$. Le théorème O 5) montre alors qu'il y n'a qu'un nombre fini de couples (X, y) possibles et donc un nombre fini de Z satisfaisant l'équation.

L'inégalité $q^{h-1+i/g} > \omega$ est satisfaite dès que :

$$[(deg a - 1)/gl] + i/g - 1 \leq 1/g + (g-1)/g + Log_q g,$$

$$deg\ a \leq 2g + 1 + gLog_q g.$$

Remarque. Les estimations précédentes montrent aussi que si $deg(a)$ est assez grand la hauteur canonique d'une solution est arbitrairement petite. Or la hauteur d'un point d'ordre infini à coordonnées dans k est minorée par une constante strictement positive (c.f. Théorème 0,5), on en déduit que si $deg(a)$ est assez grand les seules solutions rationnelles éventuelles sont des points d'ordre fini. Comme l'arbitre l'a remarqué, cette dernière propriété peut aussi partiellement se déduire (pour l'équation homogène) du résultat de finitude du théorème 2 et d'un argument similaire à celui employé par Y. Hellegouarch ([He] proposition p.78, φ_n devant être remplacé par un homogénéïsé de $\Phi_g(n)$). Cependant ces solutions en un autre sens que précédemment "triviales" restent à déterminer. Notons enfin que la définition de la puissance tensorielle est vraiment utilisée dans la preuve ci-dessus mais que d'autres exemples de résultats de finitude se trouvent dans $[D2]$.

Traitons maintenant le cas $g = -1$. Récemment D. Goss a introduit une notion d'adjoint pour les modules de Drinfeld qui l'a conduit à énoncer l'analogue de l'équation de Fermat pour l'adjoint du module de Carlitz. Nous allons voir que cette équation de Fermat n'a essentiellement pas de solutions non plus.

Définition 2. *L'adjoint du module de Drinfeld :*

$\Phi(T) = \Sigma_{i=0}^{d} a_i F^i$ *est défini par :* $\Phi^*(T) = F^{-d}(\Sigma_{i=0}^{d} (a_{d-i})^{q^i} F^i)$.

Où F^{-1} *désigne l'application* $x \to x^{q^{-1}}$. *Notons que* Φ^* *est maintenant un homomorphisme d'anneau de* A *dans les endomorphismes de la clôture parfaite de* k_∞.

Pour tout $a \in A$ de degré r, l'équation homogène de Fermat pour $g = -1$, est définie par :

$$(a,-1)_h \quad [\Phi_c^*(a)(x/y)y]^{q^r} = z^{q^r}.$$

Lemme 2. *Pour calculer* $\Phi_c^*(a)$, *il suffit de changer* q *en* q^{-1} *dans l'expression de* $\Phi_c(a)$.

Preuve. Comme Φ_c^* est un homomorphisme d'anneau, il suffit de le faire pour T et dans ce cas : $\Phi_c^*(T)x = Tx + x^{q^{-1}}$.

Théorème 3. *Si* $deg(a) \geq 2, q \geq 3$, *alors l'équation* $(a,-1)_h$ *n'a pas de solution non triviale dans* A.

Preuve. Comme pour les cas $g \geq 0$, on peut supposer $(x, y) = 1$. Le terme de degré en T maximal dans $\Phi_c(a)$ est grâce au lemme 2 de [D2] de degré $< q^d$. Par conséquent le lemme 2 ci-dessus entraîne que tous les termes de l'équation $(a, -1)_h$ sauf x/y sont des puissances de q, donc x/y est une puissance de q. On peut donc écrire $x/y = (x_1/y_1)^q$ où x_1 et y_1 sont dans A et sont premiers entre eux. Prenons alors la racine q-ième de chaque terme de l'équation. On voit encore grâce au lemme 2 ci-dessus et à celui de [D2] que le seul terme non somme de puissances q-ièmes est $x_1/y_1 + T(x_1/y_1)^q$ sa dérivée est donc nulle. D'où $(x_1' y_1 - x_1 y_1')/(y_1)^2 + (x_1/y_1)^q = 0$, si $q > 2$, y_1 doit diviser x_1, donc $y_1 = 1$ et donc $x_1 = O$.

Remarque. Dans le cas $q = 2$, il y a ici des solutions non triviale comme c'était le cas pour $(a, 1)_h$. Par exemple, on vérifie que le triplet $(1, (T+1)^2, 1)$ est une solution du cas $a = T^2$.

Appendice 1, majoration de la différence entre la hauteur canonique et la hauteur de Weil

Dans ce qui suit on notera $\sup\limits_{\alpha \in (G_a)^N(\overline{k})} |\overline{h}(\alpha) - h(\alpha)|$ la borne supérieure de la différence entre la hauteur de Weil et la hauteur canonique pour le t-module E associé à Φ. On donne ici une majoration pour $\gamma(\Phi)$ dans l'esprit des bornes entre hauteurs de Néron-Tate et de Weil sur une courbe elliptique (obtenues par Zimmer dans [Z].

Dans le cas des modules de Drinfeld, les estimations que l'on obtient pour $\gamma(\Phi)$ tendent vers zéro quand q tend vers l'infini :

THÉORÈME 4. *Soit $\Phi(t) = a_0 F^0 + \cdots + a_d F^d$ un t-module de dimension 1 :*

$$|\overline{h} - h| \leq \frac{(q^d/(q^d - 1))}{q - 1} h(a_0, \cdots, a_d, 1/a_0, \cdots, 1/a_d);$$

(où on convient de retirer $1/a_i$ dans l'expression de droite si a_i est nul).

Preuve. Commençons par minorer $\widehat{h} - h$. Pour toute place v déterminons un réel H_v tel que, pour tout $x \in \overline{k}$:

$$\max(0, -v(\Phi(t)(x)) \geq q^d \max(0, -v(x)) + H_v.$$

Si $v(x) \geq 0, H_v = 0$ convient. On suppose $v(x) < 0$, le terme de droite de l'inégalité précédente est donc $-q^d v(x) + H_v$. Comme v est une valuation :

$$v(\Phi(t)(x)) \geq \min_{0 \leq i \leq d} (v(a_i) + q^i v(x)),$$

avec égalité quand le minimum est atteint pour une seule valeur de l'indice. Si ce minimum est atteint pour une seule valeur i_0, en utilisant $v(a_{i_0}) + q^{i_0}v(x) \leq v(a_d) + q^d v(x)$, on montre que $H_v = -v(a_d)$ convient. Quand le minimum est atteint pour au moins deux indices distincts i et j, on a alors :

$$v(a_i) - v(a_j) = (q^j - q^i)v(x)$$

il suffit que H_v satisfasse l'inégalité :

$$0 \geq -q^d v(x) + H_v,$$

ou encore :

$$(q^d/(q^j - q^i))(v(a_i) - v(a_j)) \geq H_v.$$

En définitive il suffit de prendre pour H_v un minorant de :

$$\min_{0 \leq i \leq j \leq d}(0, -v(a_d), (q^d/(q^j - q^i))(v(a_i) - v(a_j))).$$

Ce terme est plus grand que :

$$\min_{0 \leq i \leq j \leq d}(0, -v(a_d), (q^d/(q-1)) \min[v(a_i), -v(a_j)]) \geq$$

$$-(q^d/(q-1)) \max(0, -v(1/a_d), -v(a_j), -v(1/a_j)).$$

D'où l'on tire :

$$h(\Phi(t)x) \geq q^d h(x) - (q^d/(q-1))h(a_0, \cdots, a_d, 1/a_0, \cdots, 1/a_d).$$

On considère alors ces inégalités avec x remplacé par $\Phi(t^n)(x)$ et on somme sur n. La minoration vient alors de $\overline{h} = \lim_n .h(\Phi(t^n)x)/q^n$. Majorons $\overline{h} - h$. Pour toute place v, on sait :

$$-v(\Phi(t)(x)) \leq \max_{0 \leq i \leq d}(-v(a_i) - q^i v(x)),$$

d'où

$$\max(0, -v(\Phi(t)(x)) \leq \max_{0 \leq i \leq d}(0, -v(a_i)) + \max(0, -q^d v(x)),$$

et on obtient une inégalité moins contraignante que pour la minoration, d'où la conclusion du lemme.

Remarque. Si tous les a_i sont dans $\overline{\mathbf{F}}_q$ on a $\overline{h} = h$. Un coup d'oeil sur les points de torsion montre que cette condition est nécessaire et suffisante pour que la hauteur canonique soit égale à la hauteur de Weil. Indiquons également une propriété relative à l'action du Frobenius.

Proposition 1. *Désignons par* $\Phi(t) = a_0F^0 + \cdots + a_dF^d$, *un* t-*module, par* $\Phi^{(p)}(t) = (a_0)^pF^0 + \cdots + (a_d)^pF^d$ *le* t-*module obtenu en élevant à la puissance* p *tous les coefficients du* t-*module précédent et par* $\widehat{h}_\Phi$ *et* $\widehat{h}_{\Phi^{(p)}}$ *les hauteurs canoniques respectives de ces* t-*modules. Pour tout* $\alpha\epsilon G_a^N(\overline{k})$:

$$\widehat{h}_{\Phi^{(p)}}(\alpha^p) = p\widehat{h}_\Phi(\alpha).$$

Preuve. $h(\Phi^{(p)}(t) \circ \Phi^{(p)}(t) \cdots \circ \Phi^{(p)}(t)(\alpha^p)) = ph(\Phi(t) \circ \Phi(t) \cdots \circ \Phi(t)(\alpha))$; car $[\Phi(t)(\alpha)]^p = \Phi^{(p)}(t)(\alpha^p)$. Pour tout t-module Ψ admettant une hauteur canonique, la formule $\widehat{h}_\Psi(x) = \lim_{n\to\infty} q^{-nr}h(\Psi(T^n)(x))$ voir le théorème 1 de [D1]) donne le résultat.

Remarque. La considération du t-module $\Phi^{(p)}$ permet parfois d'enlever des hypothèses indésirables d'inséparabilité, par exemple dans des problèmes de transcendance ([D3]). Pourtant ici, nous ne sommes pas parvenu en utilisant la propriété précédente à enlever l'hypothèse de séparabilité dans l'analogue du résultat de Dobrowolski établi dans [D1] sur le module de Carlitz (minoration de la hauteur d'un point non de torsion en fonction du degré du corps).

Appendice 2, application au calcul de l'ordre de fonctions exponentielles

On suppose que le t-module E admet une exponentielle $\exp_E$ (voir [A]) et satisfait les conditions du théorème 0. La notion suivante est souvent utilisée dans les démonstrations de transcendance.

Définition 3. *Soit* f *une fonction de* $(G_a)^N((\overline{k}_\infty))$ *dans lui-même et* $\Gamma(S) = \{\sum a_i\gamma_i$, *où* $a_i\epsilon F_q[t]$, *deg* $a_i \leq S$ *et* $\exp(\gamma_i)\epsilon(\overline{k})^N\}$. *On dira que* f *est d'ordre arithmétique* $\leq \rho$, *si il existe une constante* C_O *telle que pour tout* $u\epsilon\Gamma(S)$:

$$h(u) \leq C_Oq^{\rho S}$$

Proposition 2. *Soit* $\Gamma(S)$ *comme dans la définition 3, il existe un réel* $C > O$ *tel que pour tout* u *dans* $\Gamma(S)$:

$$h(u) \leq C(S+1)q^{dS/n} \max_{0\leq i\leq v}[h(\exp(\gamma_i)] + C.$$

(autrement dit $\exp_E$ *est d'ordre arithmétique* $\leq d/n + \varepsilon$).

Preuve. On utilise le théorème 1, b) pour $\overline{h}$, puis on se ramène à h par les majorations du c) de ce même théorème.

Appendice 3, problèmes ouverts

De nombreux problèmes célèbres de géométrie diophantienne ontleur analogue sur les modules de Drinfeld. On se place ici sur un module de Drinfeld Φ de rang d sur $\mathbf{F}_q[T]$ défini sur $\overline{k}$:

$\Phi(T) = TF^O + \cdots + a_d F^d$, où les a_i sont dans $\overline{k}$ et $a_d \neq O$. Commençons par la conjecture de Lang sur les courbes elliptiques qui minore la hauteur de Néron-Tate d'un point d'ordre infini par la hauteur de l'invariant j_E de la courbe elliptique.

Un module isomorphe à Φ est de la forme $u\Phi u^{-1}$ où $u \in \overline{k}$.

Posons $S(i) = 1 + q + \cdots + q^i$, alors les quantités :

$$\frac{a_1^{S(d-1)}}{a_d}, \cdots, \frac{a_{d-1}^{S(d-1)}}{a_d^{S(r-1)}}, \cdots, \frac{a_{d-1}^{S(d-1)}}{a_{d-1}^{S(d-1)}},$$

qu'on notera $A_1, \cdots, A_r, \cdots, A_{d-1}$ sont invariantes par isomorphismes. On peut alors considérer la hauteur de $h(A_1, \cdots, A_r, \cdots, A_{d-1})$ comme celle d'une classe d'isomorphisme de module de Drinfeld de rang d et poser le problème :

PROBLÈME 1. *Soit K une extension finie de k, montrez qu'il existe $c(K) > O$, telle que pour tout $P \in G_a(K)$ vérifiant $\widehat{h}_\Phi(P) > O$, on ait :*

$$\widehat{h}_\Phi(P) \geq c(K) h(A_1, \cdots, A_r, \cdots, A_{d-1}).$$

Le problème de minorer la hauteur d'un point d'ordre infini en fonction du degré de K sur k a été abordé dans ([D1]) où une hypothèse de type "multiplication complexe" permet d'obtenir des résultats non triviaux mais ne semblant pas être les meilleurs possibles. On peut demander :

PROBLÈME 2. *Soit K une extension finie de k, de degré D, montrez qu'il existe $c_\Phi > O$, telle que pour tout $P \in G_a(K)$ et vérifiant $\widehat{h}_\Phi(P) > O$, on ait :*

$$\widehat{h}_\Phi(P) \geq \frac{C_\Phi}{D}.$$

Une réponse affirmative à cette question vient d'être donnée par l'auteur dans [D5] pour le module de Carlitz (et quelques autres) quand P possède au moins un conjugué dans k_∞.

L'analogue totalement ouvert du problème de Mazur (aussi appelé "Conjecture folklorique") revient lui à compter le nombre de points de torsion dans un corps de degré fixé d'un module de Drinfeld quelconque (de rang d) défini sur ce corps.

PROBLÈME 3. *Soit K une extension finie de k, de degré D, et Φ un module de Drinfeld de rang d défini sur K. Montrez qu'il existe une constante $c(D)$ telle que :*

$$Card(P \in G_a(K)/\widehat{h}_\Phi(P) = O\} \leq c(D).$$

Remarque : Il serait intéressant de voir si les récents résultats de Merel peuvent s'adapter à cette situation. En particulier quand le rang est deux il existe en effet de frappantes analogies entre modules de Drinfeld et courbes elliptiques.

Enfin signalons le problème de Lang-Manin-Mumford, maintenant devenu théorème de Faltings. Pour simplifier, on considère un t-module E de dimension N puissance cartésienne d'un module de Drinfeld, c'est-à-dire que l'action sur G_a^N est l'action diagonale $\Phi_E(T) = (\Phi(T), \cdots, \Phi(T))$.

PROBLÈME 4. *Soit Γ un sous T-module de type fini de E défini sur $\overline{k}$, et l'ensemble des points de division de Γ :*

$$\overline{\Gamma} = \{x \in G_a^N(\overline{k})/\exists a \in A, y \in \Gamma \text{ vérifiant } \Phi_E(a)x = y\}.$$

Alors pour toute variété V de G_a^N, il existe un ensemble fini de sous-T-modules B_i de E et de points t_i tels que :

$$V \cap \overline{\Gamma} = U(B_i + t_i) \cap \overline{\Gamma}.$$

Notons que le cas $\Gamma = O$, est traité dans [D4] pour une puissance du module de Carlitz et modulo des conjectures standards pour les produits de modules de Drinfeld.

BIBLIOGRAPHIE

[A] G. ANDERSON, *t-motives*, Duke Math. J. **53** (1986), 457–502.

[A-T] G. ANDERSON and D. THAKUR, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Annals of Math. **132** (1990), 159–191.

[D1] L. DENIS, *Hauteurs canoniques et modules de Drinfeld*, Math Annalen **294** (1992), 213–223.

[D2] L. DENIS, *Le théorème de Fermat-Goss*, Amer. Math. Soc **343** (1994), 713–726.

[D3] L. DENIS, *Dérivées d'un module de Drinfeld et transcendance*, tapuscript.

[D4] L. DENIS, *Géométrie diophantienne sur les modules de Drinfeld*, Proceedings du "Workshop on function fields" Ohio, D. Goss, D. Hayes, M. Rosen eds., 285–303, 1992.

[D5] L. DENIS, *Problème de Lehmer en caractéristique finie*, à paraître dans Compositio Math. 1995.

[D] V. G. DRINFELD, *Elliptic modules*, Math. USSR-Sb. **23** (1974), 561–592.

[G1] D. GOSS, *On a Fermat Equation Arising in the arithmetic theory of Function Fields*, Math. Annalen **261** (1982), 269–286.

[G2] D. GOSS, *Fermat equations and families*, Abstracts of A.M.S., issue 83, p. 425, October 1992.

[H] D. HAYES, *Explicit class field theory for rational function fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 77–91.

[He] Y. HELLEGOUARCH, *Généralisation d'un théorème de Terjanian*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1989-90, 77–92.

[L] S. LANG, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag 1983.

[Y1] J. YU, *Transcendence and special zeta values in characteristic p*, Annals of Math., 1–23, 1991.

[Z] H. ZIMMER, *On the difference of the Weil height and the Néron-Tate height*, Math. Z. **147** (1976), 35–51.

Laurent Denis
Université Pierre et Marie Curie
UFR 920 "Problèmes diophantiens
4 place Jussieu
Tour 45-46, 5ième étage
75252 Paris France