Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **7** *(1995), 191–218*

Nouveaux aspects de la transcendance

par Patrice PHILIPPON

1. Introduction

La théorie des nombres transcendants connait une évolution constante marquée ces dernières années par plusieurs tendances nouvelles. L'objet de ce texte est en partie (§§2 et 3) de présenter quelques unes de ces nouveautés en action. La question que nous avons choisie pour ce faire est celle de l'axiomatisation des démonstrations de transcendance. Ce problème a déjà été abordé par divers auteurs et nous nous référons à [15] comme point de repère.

Les aspects nouveaux sur lesquels nous mettons l'accent sont les suivants : extension de la théorie à de nouveaux cadres, suppression du principe des tiroirs et l'explosion des applications de la méthode de Mahler. Nous illustrons dans la suite de ce paragraphe ces trois aspects en y rattachant quelques résultats récents qui nous ont séduit. Bien évidemment on ne prendra pas cette présentation pour un panorama, et la plupart des nouveaux résultats méritant d'être mentionnés n'y figure pas. Heureusement, M.Waldschmidt s'est livré avec succès à l'exercice difficile du "survey" et c'est l'esprit tranquille que nous pouvons renvoyer le lecteur à [32] pour une vision plus complète des activités dans le domaine. En particulier, nous nous restreignons à la transcendance proprement dite et parlerons peu des applications à l'approximation et aux équations diophantiennes.

Le premier aspect considéré ici trouve sa justification dans le remarquable développement de la théorie sur les modules de Drinfeld. Il s'agit de transcendance sur des corps finis pour des objets riches de structures. Après avoir rattrappé la théorie classique, les résultats dans ce domaine correspondent maintenant à des problèmes ouverts dans le cas classique.

Le deuxième aspect est l'introduction par M.Laurent d'une nouvelle approche des fonctions auxiliaires qui sont au cœur de la transcendance. On peut ainsi reprendre et simplifier toutes les démonstrations de transcendance connues (la méthode ne fonctionne pas encore pour l'indépendance

Manuscrit reçu le 27 février 1994, version définitive le 28 juin 1994.

algébrique), mais c'est pour les résultats quantitatifs que l'apport semble le plus intéressant.

Le troisième aspect concerne la méthode de Mahler et ses applications. Il s'avère que les fonctions considérées par K.Mahler et pour lesquelles sa méthode s'applique, apparaissent dans des contextes très variés (aussi bien mathématiques que physiques). Chaque nouvelle application demande une extension de la méthode qui semble loin d'être épuisée.

Je remercie L.Denis, K.Nishioka et M.Waldschmidt pour m'avoir indiqué plusieurs erreurs dans une première version de ce texte.

a) Extension des méthodes et résultats à de nouvelles situations.

La théorie des nombres transcendants s'est d'abord attachée à montrer que certains nombres complexes sont transcendants, des exemples célèbres sont e (Hermite, 1873), π (Lindemann, 1882). On s'est également intéressé à la transcendance de nombres p-adiques (Mahler, 1935) et, plus récemment, à celle de séries sur le corps des fractions rationnelles à coefficients dans un corps fini (Wade, 1941). Les succès de ces différentes études proviennent en grande partie de structures algébriques sous-jacentes (opérateurs, équations différentielles, ...).

La situation générale qui relève de la transcendance est la suivante. On a un anneau de base A muni d'une "structure arithmétique", un sur-anneau C muni d'une "structure analytique", et une rigidité entre les structures arithmétique et analytique sur A (inégalité de la taille). Nous précisons au paragraphe 2 ce que nous entendons par structures arithmétique et analytique et nous montrons au paragraphe 3 comment ceci conduit à des résultats de transcendance. Des exemples fondamentaux sont donnés par les situations classiques, $A = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Q}$ et $C = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}_p$, $A = \mathbf{F}_q[T]$ et $C = \mathbf{F}_q((1/T))$, mais aussi par les corps de type fini sur $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{F}_q[T]$ et les corps de séries formelles.

Dans le cas $A = \mathbf{F}_q[T]$ et C la complétion d'une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q((1/T))$ pour la topologie $\frac{1}{T}$-adique, la recherche d'opérateurs conduit au cadre des modules de Drinfeld. On peut voir ces objets comme les réseaux de C (*i.e.* les A-modules discrets, de type fini dans C). A un tel réseau Λ de rang d on associe une fonction entière sur C:

$$e_\Lambda(z) = z.\prod_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq 0}}\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$$

qui satisfait $e_\Lambda(az) = \Psi_\Lambda(a)(e_\Lambda(z))$ pour tout $a \in A$ où on note $\Psi_\Lambda(a) := a.\mathrm{Id} + a_1.\tau + \cdots + a_m.\tau^m$ avec τ le Frobenius $z \mapsto z^q$ et $m = d.d^\circ_T a$.

Notons $K = \mathrm{Frac}(A) = \mathbf{F}_q(T)$ et $\overline{K}$ la clôture algébrique de K dans C, si pour tout $a \in A$ on a $a_1, \ldots, a_m \in \overline{K}$ on dit que Ψ_Λ est défini sur $\overline{K}$. L'ensemble $R_\Lambda := \{u \in C; u\Lambda \subset \Lambda\}$ est un A-module de rang fini $r \mid d$ et l'homomorphisme Ψ_Λ se prolonge à R_Λ.

Par exemple, dans son étude des valeurs spéciales en $n = 1, 2, \ldots$ de la fonction zêta $\zeta(n) := \sum\limits_{\substack{a \in A \\ a \text{unitaire}}} \frac{1}{a^n}$ L. Carlitz (1935) introduit la fonction exponentielle

$$\mathrm{e}(z) = \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{D_h}.z^{q^h}$$

où $D_0 := 1$, et $D_h := (T^{q^h} - T).D_{h-1}^q$ $(h \geq 1)$. C'est la fonction associée au module $A.(T - T^q)^{\frac{1}{q-1}} \pi_q \subset C$ où $\pi_q := \prod_{h \geq 1} \left(1 - \frac{T^{q^h} - T}{T^{q^{h+1}} - T}\right)$.

L.I. Wade (1941) a montré la transcendance (sur K) de π_q, plus récemment Jing Yu (1985) a généralisé cet énoncé et obtenu divers analogues, pour les valeurs des fonctions e_Λ aux points algébriques sur K, de résultats classiques. Il établit également un analogue du théorème de Baker, dont il déduit la transcendance (sur K) des valeurs $\zeta(n)$ pour tout $n > 0$ et $\zeta(n)/\pi_q^n$ pour $n \not\equiv 0(q-1)$ (voir [36]).

Théorème (Jing Yu). *Avec les notations ci-dessus, si Ψ_Λ est défini sur $\overline{K}$ et si $u_1, \ldots u_s \in C$ satisfont $\mathrm{e}_\Lambda(u_i) \in \overline{K}$ et sont linéairement indépendants sur R_Λ, alors $1, u_1, \ldots, u_s$ sont linéairement indépendants sur $\overline{K}$.*

L'opérateur de dérivation $\partial/\partial T$ permet de dériver les nombres (par exemples les coefficients de Taylor des fonctions e_Λ). L. Denis a ainsi obtenu des énoncés de transcendance et de petits degrés de transcendance pour les dérivées des valeurs des fonctions e_Λ. Il montre encore [11] que, si $q \neq 2$, les nombres $\mathrm{e}(1)$ et π_q sont algébriquement indépendants et, si $q \geq 4$, les nombres $\mathrm{e}(\pi_q)$ et π_q le sont aussi.

Toujours dans le cadre des petits degrés de transcendance (*i.e.* degrés 2 ou 3) P.G. Becker, W.D. Brownawell et R. Tubbs (1992) ont démontré un analogue du théorème de Gel'fond. A. Thiery [29] prouve un analogue de l'indépendance algébrique de $\pi, \Gamma(1/4)$ (*resp.* $\pi, \Gamma(1/3)$), avec la fonction Gamma définie par D. Thakur. Thiery obtient aussi un analogue du théorème de Lindemann-Weierstrass :

THÉORÈME (Thiery). *Avec les notations ci-dessus, si Ψ_Λ est défini sur $\overline{K}$ et $u_1, \ldots, u_s \in \overline{K}$ sont linéairement indépendants sur R_Λ, alors au moins sr/d des nombres $\mathrm{e}_\Lambda(u_1), \ldots, \mathrm{e}_\Lambda(u_s)$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{K}$.*

Enfin mentionnons que Y. Hellegouarch [16] introduit une notion de module de Drinfeld généralisé en remplaçant $\mathbf{F}_q$ et son Frobenius par un automorphisme σ sur un corps quelconque. Il étudie dans ce cadre les propriétés de transcendance par la méthode de Wade-Dubovitskaia.

b) Suppression du principe des tiroirs.

Les démonstrations de transcendance passent depuis l'origine de la théorie par la construction d'une fonction auxiliaire soumise à diverses contraintes linéaires. Cette construction peut se faire de façon explicite, comme par exemple les approximants de Padé, ou via la résolution d'un système linéaire par le principe des tiroirs. M. Laurent (1989, *voir* [18]) a montré qu'on peut éviter la résolution du système linéaire et travailler directement sur les mineurs de ce système, vus comme déterminants d'interpolation ou alternants suivant le cas. Il a ainsi redémontré le théorème de Gel'fond-Schneider, le théorème des six exponentielles ... M.Waldschmidt [33] a retrouvé par cette méthode le théorème de Pólya et nous l'utiliserons aussi au paragraphe 3 dans notre cadre général. Signalons que le théorème des six exponentielles est à l'origine du théorème du sous-groupe algébrique développé par D.Roy et M.Waldschmidt [27].

La méthode des déterminants d'interpolation présente l'avantage de minimiser la chaîne des estimations et prend toute sa force dans les questions quantitatives. Ainsi M.Laurent, M.Mignotte et Y.V.Nesterenko [19] ont donnés par cette méthode une minoration de formes linéaires rationnelles de deux logarithmes très fine. On note h la hauteur logarithmique absolue.

THÉORÈME (Laurent, Mignotte, Nesterenko). *Soient α_1, α_2 des nombres algébriques multiplicativement indépendants, b_1, b_2 des entiers et posons $\Lambda = b_1 \log \alpha_1 + b_2 \log \alpha_2$ alors*

$$\log|\Lambda| \geq -31.D^4.\max\Big(\frac{1}{2} + \log\big(\frac{|b_1|}{D\log A_2} + \frac{|b_2|}{D\log A_1}\big); \frac{21}{D}; \frac{1}{2}\Big)^2 .\log A_1.\log A_2$$

où, pour $i = 1, 2$, $\log A_i = \max\big(h(1,\alpha_i), \frac{|\log \alpha_i|}{D}, \frac{1}{D}\big)$ et $D = [\mathbf{Q}(\alpha_1,\alpha_2) : \mathbf{Q}]$.

Ce type d'énoncé est très utile dans l'étude de certaines équations diophantiennes. D'autres énoncés très utiles dans ce contexte sont les minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques. Depuis les travaux de N.Hirata [17] on sait que ces minorations sont de la même qualité que dans le cas des logarithmes usuels, mais il restait à obtenir une version totalement explicite. C'est ce qu'a fait S.David (1993).

Soient K un corps de nombres, E une courbe elliptique d'équation $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$, $(g_2, g_3 \in K)$. On note $j = j(\tau) = \frac{12^3 g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$ l'invariant modulaire de E avec $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ dans un domaine fondamental du demi-plan de Poincaré tel que $|\tau| \geq 1$, $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(\tau) < \frac{1}{2}$. On note encore $\hat{h}$ la hauteur de Néron-Tate sur E et on pose $h_E := \max(1, h(1, j), h(1, g_2, g_3))$.

Soient $\beta_0, \ldots, \beta_n \in \overline{\mathbf{Q}}$ et $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{C}$ tels que $p_i = \exp_E(u_i) \in E(\overline{\mathbf{Q}})$, on pose $\Lambda = \beta_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$. Soit D le degré sur $\mathbf{Q}$ d'un corps de nombres contenant $\beta_0, \ldots, \beta_n$ et sur lequel les points $p_1, \ldots, p_n$ sont rationnels, on se donne des réels $B, A_1, \ldots, A_n$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \log A_i &\geq \max\bigl(h_E, \hat{h}(p_i), \frac{3\pi |u_i|^2}{D|\omega_1|^2 Im\tau}\bigr) \\ \log B &\geq \max\bigl(\mathrm{e} h_E, h(\beta_0), \ldots, h(\beta_n)\bigr) \\ \log B &\geq \frac{1}{D}. \log A_i \ . \end{aligned}$$

Théorème (David [8]). *Avec les notations ci-dessus, si* $\Lambda \neq 0$ *alors* $\log |\Lambda|$ *est minoré par*

$$\begin{aligned} - c(n).D^{2n+2}.\bigl(\log B + \log D + 1\bigr).\bigl(\log\log B + \log D + h_E + 1\bigr)^{n+1} \\ . \log A_1 \ldots \log A_n \end{aligned}$$

où $c(n) = 2.10^{7n+8}.\bigl(\frac{2}{\mathrm{e}}\bigr)^{2n^2}.(n+1)^{4n^2+10n}$.

S.David a aussi donné une première application de cette minoration pour obtenir une version explicite (pour les courbes elliptiques) du théorème d'isogénie de Masser et Wüstholz [21]. N.Tzanakis (1992) a également utilisé cette minoration pour déterminer tous les points entiers de la courbe $Y^2 = (X + 337)(X^2 + 337^2)$ par exemple.

Un autre aspect des questions quantitatives réside dans les mesures de transcendance et d'indépendance algébrique (M.Ably [1], D.Caveny [7]) et les hypothèses techniques (S.Delaunay [9]).

Signalons pour conclure cette section les récentes minorations de formes linéaires de logarithmes p-adiques obtenues par Yu Kunrui [37], Dong Ping-ping [18]. Ces minorations fournissent le premier résultat connu en direction de la conjecture *abc* (R.Tijdeman, C.L.Stewart et Yu Kunrui, *voir* [28]).

c) Applications de la méthode de Mahler.

La méthode de Mahler s'applique aux fonctions (d'une variable) satisfaisant des équations fonctionnelles algébriques pour une transformation algébrique de la variable. La méthode s'étend aux fonctions de plusieurs variables comme l'ont montré K.Mahler, puis J.Loxton et A.van der Poorten [20]. En revanche, tandis que la méthode fournit de bons résultats d'indépendance algébrique pour le cas d'une variable (K.Nishioka [24]), ceux-ci restent insatisfaisants dans le cas de plusieurs variables. Nous indiquons au paragraphe 3 comment les différentes méthodes utilisées en transcendance (Gel'fond, Schneider et Mahler) peuvent être regroupées sous les mêmes principes mais en jouant différemment sur les paramètres.

Les équations fonctionnelles de la méthode de Mahler apparaissent dans beaucoup de contextes très variés, par exemple la théorie des automates, l'étude des systèmes dynamiques ... Nous allons décrire ici une très jolie application à l'étude de l'ensemble de Mandelbrot obtenue par Becker (1992).

Soit T une transformation méromorphe d'un voisinage U d'un point ω de la sphère de Riemann $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, fixant ω et algébrique sur $\mathbf{Q}(z)$. Soit $\alpha \in U$, algébrique (sur $\mathbf{Q}$), la transformation T donne par itération une suite de points et on suppose $T^i\alpha \to \omega$, $T^i\alpha \neq \{\omega, \infty\}$ pour $i \in \mathbf{N}$.

On considère une fonction f holomorphe sur U, transcendante sur $\mathbf{C}(z)$, à développement de Taylor algébrique en ω et satisfaisant une équation fonctionnelle

$$P(z, f(z), f(Tz)) \equiv 0 \quad (z \in U)$$

où P est un polynôme à coefficients algébriques.

PROPOSITION (Becker [4]). *Avec les notations ci-dessus, il existe $a(T,P) > 0$ tel que, si $P(T^i\alpha, f(T^i\alpha), Z) \not\equiv 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ et si $\mathrm{ord}_\omega(T(z) - \omega) > a(T,P)$, alors $f(\alpha)$ est transcendant.*

En particulier, soient $p, q \in \overline{\mathbf{Q}}[z]$ de même degré $d \geq 2$, f une fonction transcendante, holomorphe au voisinage de l'infini, satisfaisant $f(p(z)) = q(f(z))$ et $\alpha \in U$ tel que $\underbrace{p \circ \cdots \circ p(\alpha)}_{k\text{fois}} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ alors $f(\alpha) \notin \overline{\mathbf{Q}}$.

Le cas $d = 2$ se ramène essentiellement à $p_c(z) = z^2 + c$ et $q(z) = z^2$. L'ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}$ est le complémentaire des points c tels que

$$\underbrace{p_c \circ \cdots \circ p_c(0)}_{k\text{fois}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ .$$

A.Douady et D.Hubbard ont montré que $\mathcal{M}$ est connexe en construisant une application conforme Φ de son complémentaire sur le complémentaire du disque unité de $\mathbf{C}$

$$\Phi : \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \setminus \mathcal{M} \to \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \setminus \overline{D} \ .$$

Après normalisation on peut écrire $\Phi(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots$ à l'infini et vérifier que pour tout $c \in \mathbf{C}$ il existe une fonction φ_c holomorphe au voisinage de l'infini, satisfaisant $\varphi_c(p_c(z)) = q(\varphi_c(z))$. De plus, φ_c est transcendante si et seulement si $c \neq 0, -2$ et $\Phi(c) = \varphi_c(c)$ dès que $c \in \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \setminus \mathcal{M}$. Comme $0, -2 \in \mathcal{M}$ on en déduit

Corollaire (Becker). *Pour tout $\alpha \notin \mathcal{M}$ algébrique, $\Phi(\alpha) \notin \overline{\mathbf{Q}}$.*

L'étude des mesures de transcendance et d'indépendance algébrique par la méthode de Mahler a été l'objet de nombreuses recherches (Nesterenko [22], Becker [3], Nishioka [25], Töpfer [30]). Amou [2] a également démontré par la méthode de Mahler des résultats d'indépendance algébrique de valeurs en des points transcendants.

2. Schéma abstrait pour les méthodes de transcendance

Le but de ce paragraphe est de formaliser les principales méthodes de transcendance connues, y compris en caractéristique finie, de sorte à faire apparaître leur tronc commun. De façon concrète, nous traitons au paragraphe suivant des valeurs algébriques de fonctions analytiques, dans l'esprit de [15]. L'outil essentiel est le principe de Schwarz qui lie la croissance d'une fonction analytique à la masse de ses zéros.

a) Anneaux diophantiens.

Soit A un anneau que nous supposerons toujours commutatif, unitaire, intègre de corps des fractions K et nœthérien, on note A^* les unités de A. Nous appelons *pseudo-valeur absolue* W sur A une application $A \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ satisfaisant $W(0) = 0, W(xy) = W(x)W(y)$ et $W(x + y) \leq W(x) + W(y)$. L'ensemble des $x \in A$ tels que $W(x) = 0$ est un idéal premier I_W de A,

A/I_W est un anneau intègre et nous noterons $\mathrm{Frac}(A/I_W)$ son corps des fractions. Nous reprenons les notions d'anneaux taillé et diophantien de [26].

Nous appellerons *taille* T sur A la donnée d'une famille $(W_j; j \in J)$ de pseudo-valeurs absolues indexée par un ensemble J muni d'une mesure ν, telle que, pour $x_1, \ldots, x_k \in A$, l'intégrale

$$\log T(x_1, \ldots, x_k) := \int_J \log \max(W_j(x_1); \ldots; W_j(x_k)).d\nu(j)$$

soit définie à valeur dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, on pose $\eta(T) := \int_J \eta(W_j).d\nu(j) = \log_2 T(1, 2)^{(\dagger)}$ où $\eta(W_j) = 0$ si W_j est ultramétrique et sinon $\eta(W_j)$ est l'unique réel $\eta > 0$ tel que $W_j(x) = |\iota(x)|^\eta$ pour tout $x \in K$ et pour un isomorphisme convenable ι de $\mathrm{Frac}(A/I_{W_j})$ sur un sous-corps de $\mathbf{C}$ (ici, $|\cdot|$ est la valeur absolue ordinaire de $\mathbf{C}$); *cf.* N. Bourbaki [6] , § 6.4, théorème 2. Nous dirons encore que l'anneau A est *taillé*, nous noterons $\overline{T}(x_1, \ldots, x_k) := T(1, x_1, \ldots, x_k)$ et nous considèrerons une taille indifféremment comme une famille de pseudo-valeurs absolues ou comme une fonction sur A.

Soit V une sous-famille d'une taille T sur A, composée uniquement de pseudo-valeurs absolues ultramétriques discrètes. Nous dirons que T est *locale (de facteur V)* si elle satisfait

$$\text{(L)} \quad \forall x_1, \ldots, x_k \in A, T(x_1, \ldots, x_k) \leq \max\{T(x_1); \ldots; T(x_k)\}. V(x_1, \ldots, x_k)$$

Nous dirons que T est *globale (de facteur V)* si elle satisfait

(G1) $T(u) = 1$ dès que $u \in A^*$;

$$\text{(G2)} \quad \exists \gamma(T) \in \mathbf{R}_{>0}, \forall x_1, \cdots, x_k \in A \backslash \{0\}, \exists u \in A^* \quad \overline{T}(ux_1, \cdots, ux_k) \leq \gamma(T).TV(x_1, \cdots, x_k).$$

Nous dirons que deux tailles T et T' sont *équivalentes* s'il existe des réels $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$c_1. \log T \leq \log T' \leq c_2. \log T \ .$$

Nous dirons que T et T' sont *strictement équivalentes* pour un facteur commun V s'il existe un réel $c_0 > 0$ tel que

$$|\log T - \log T'| \leq c_0. \log V \ .$$

$^{(\dagger)}\log_2$ désigne le logarithme en base 2.

Remarquons que si on dispose d'un nombre fini de tailles $(T_1, \dots, T_s)$ sur A, la réunion de ces tailles forme une nouvelle taille correspondant au produit $T = T_1 \dots T_s$. Il est pourtant préférable dans certains cas de considérer séparément ces tailles. C'est cette situation que nous envisageons ci-dessous.

Rappelons encore que l'anneau A est dit *presque factoriel* si c'est un anneau de Krull dont le groupe des classes de diviseurs est de torsion (*voir* R. Fossum [13], § 6, p.33-34).

Soit $\Psi : (\mathbf{R}_{\geq 0})^s \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, l'anneau A sera dit *faiblement diophantien* si c'est un anneau de Krull, taillé et muni d'une valeur absolue distinguée $|.|$, non triviale, satisfaisant une *inégalité de la taille (de type Ψ)*

$$\forall x \in A \setminus \{0\}, \quad -\Psi(\log \overline{T}_1(x), \dots, \log \overline{T}_s(x)) \leq \log |x| \leq \log \overline{T}(x)$$

où $\log \overline{T}(x) = \log \overline{T}_1(x) + \cdots + \log \overline{T}_s(x)$.

Un anneau faiblement diophantien sera dit *diophantien* s'il est presque factoriel et taillé par une taille globale.

Les exemples fondamentaux d'anneaux diophantiens sont $A = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Q}$ en distinguant la valeur absolue ordinaire ou une valeur absolue p-adique, et $A = \mathbf{F}_q[T]$ pour la valeur absolue distinguée $q^{d^\circ_T}$.

Si A est (faiblement) diophantien et $z_1, \dots, z_d$ sont algébriquement indépendants sur K, alors $A[z_1, \dots, z_d]$ est taillé et (faiblement) diophantien dès que $z_1, \dots, z_d$ satisfont à l'inégalité de la taille (*i.e.* à une mesure d'indépendance algébrique).

Si A est diophantien alors K est aussi un anneau diophantien (en fait, un corps avec formule du produit dans un sens un peu plus général que [14], § 14.3).

b) Fonctions analytiques.

On se donne un sur-anneau C de A (commutatif, unitaire, intègre, nœthérien) muni d'une extension de la valeur absolue distinguée $|.|$ de A, non discret et complet pour cette extension. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $x, z \in C^n$, $R \in \mathbf{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ on posera $|x| := \max(|x_i|; i = 1, \dots, n)$, $B_n(x, R) := \{z \in C^n; |x - z| < R\}$ la boule de rayon R, centrée en x et $\overline{B}_n(x, R) := \{z \in C^n; |x - z| \leq R\}$ la boule bordée correspondante. Si $n = 1$ on notera simplement $B(x, R)$ et $\overline{B}(x, R)$ ces boules. On notera $\eta_0 := \eta(|\cdot|)$ et on supposera, sans perte de généralité, $\eta_0 = 0$ ou $= 1$ suivant que $|\cdot|$ est ultramétrique ou non. Lorsque $\eta_0 = 1$ on fixe un isomorphisme ι de C sur un sous-corps de $\mathbf{C}$ tel que pour tout $x \in C$ on ait $|x| = |\iota(x)|$ où le second terme est la valeur absolue ordinaire de $\iota(x)$ dans $\mathbf{C}$ (*cf.* [6], §6.4, théorème 2).

Une fonction $f : B_n(x,R) \to C$ est dite *analytique dans* $B_n(x,R)$ s'il existe une série $\sum_{i\in\mathbf{N}^n} c_i.z^i \in C[[z]]$ ($z^i := z_1^{i_1}\dots z_n^{i_n}$) de *rayon de convergence* $\geq R$ (*i.e.* $-\limsup_{\|i\|\to\infty}\frac{1}{\|i\|}.\log|c_i| \geq \log R$; $\|i\| = i_1+\dots+i_n$) telle que pour tout $z\in B_n(0,R)$ on ait

$$f(x+z) = \sum_{i\in\mathbf{N}^n} c_i.z^i \quad .$$

Comme C n'est pas discret, cette série, si elle existe, est unique et est appelée *série de Taylor* de f en x et $f\equiv 0$ (*i.e.* $\forall i\in\mathbf{N}^n$, $c_i = 0$) si et seulement si $f(y) = 0$ pour tout $y\in B_n(x,R)$. Si $R=\infty$ on dit encore que f est *entière*. Si $\eta_0 = 1$ la série $\sum_{i\in\mathbf{N}^n}\iota(c_i).z^i$ définit une fonction $\iota(f)_x$ analytique dans $\mathcal{B}(0,r)^n$ où $\mathcal{B}(0,r)$ est la boule de rayon $r<R$ centrée à l'origine de $\mathbf{C}$.

Pour $r<R$, on pose

$$M_x(f,r) = \begin{cases} \sup\limits_{i\in\mathbf{N}^n}(|c_i|r^{\|i\|}) & \text{si } |\cdot| \text{ est ultramétrique,}\\ \sup\limits_{z\in\mathcal{B}_n(0,r)} |\iota(f)_x(z)| & \text{sinon.}\end{cases}$$

En fait, on vérifie facilement que dans le cas ultramétrique

$$M_x(f,r) = \sup_{z\in\mathcal{B}(0,r)^n} |f(x+z)|$$

où $\mathcal{B}(0,r)$ désigne maintenant la boule de rayon r centrée à l'origine de la clôture intégrale de C dans une clôture algébrique de son corps des fractions.

Soit $\omega : [0,R[\to \mathbf{R}_{>0}$ croissante, on dit que f est de *type* $\leq\omega$ si pour tout $0\leq r<R$ on a $\log M_x(f,r)\leq\omega(r)$. On vérifie facilement

$$M_x(fg,r)\leq M_x(f,r).M_x(g,r)$$

$$M_x(f+g,r)\leq \begin{cases}\max(M_x(f,r);M_x(g,r)) \text{ si } |\cdot| \text{ est ultramétrique}\\ M_x(f,r)+M_x(g,r) \text{ sinon.}\end{cases}$$

On a aussi clairement $|f(y)|\leq M_x(f,r)$ dès que $y\in B_n(x,r)$.

Nous serons amenés à considérer une fonction f analytique sur un produit $B_{n_1}(x_1,R_1)\times\dots\times B_{n_L}(x_L,R_L)$ (*i.e.* satisfaisant

$$-\lim\sup_{\|i\|\to\infty}\frac{1}{\|i\|}.(\log|c_i| + |i_1|\log R_1+\dots+|i_L|\log R_L)\geq 0$$

si $R_1, \ldots, R_L < \infty$). Et nous noterons dans ce cas

$$M_x(f, r_1, \ldots, r_L) := \begin{cases} \sup\limits_{i \in \mathbf{N}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{N}^{n_L}} (|c_i|.r_1^{|i_1|} \ldots r_L^{|i_L|}) \text{ si } |\cdot| \text{ est ultramétrique,} \\ \sup\limits_{z_i \in \mathcal{B}_{n_i}(0, r_i)} |\iota(f)(z_1, \ldots, z_L)| \qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

On introduit les *dérivations divisées*, pour $t \in \mathbf{N}^n$ on pose

$$D_t f(x+z) = \sum_{\substack{i \in \mathbf{N}^n \\ i \geq t}} c_i \binom{i}{t} z^{i-t} \quad , \qquad \left(\binom{i}{t} := \binom{i_1}{t_1} \ldots \binom{i_n}{t_n} \right) \ ,$$

où c_i sont les coefficients de Taylor de f en x. Cette série définit une fonction $D_t f$ analytique dans $B_n(x, R)$ (car $|c_i \binom{i}{t}| \leq |c_i|.i_1^{\eta_0 t_1} \ldots i_n^{\eta_0 t_n}$).

Remarquons que si $0 < r' < r < R$, et $|y - x| \leq r - \eta_0 r'$ alors la série

$$\begin{aligned} \sum_{t \in \mathbf{N}^n} D_t f(y).z^t &= \sum_{t \in \mathbf{N}^n} \Big(\sum_{i \geq t} c_i . \binom{i}{t} .(y-x)^{i-t} \Big) .z^t \\ &= \sum_{i \in \mathbf{N}^n} c_i .(z + y - x)^i \end{aligned}$$

définit une fonction analytique dans $B_n(y, r')$ qui coïncide avec $f(y+z)$. En particulier, f est analytique dans $B_n(y, r')$ et on vérifie

$$M_y(f, r') \leq M_x(f, r) \ .$$

On dit que f a un *zéro d'ordre* $\geq T$ en x si et seulement si

$$\forall t \in \mathbf{N}^n \ , \|t\| < T, \quad D_t f(x) = 0 \ .$$

En particulier, $f \equiv 0$ si et seulement si $\forall t \in \mathbf{N}^n \ , D_t f(x) = 0$.

Soit $\pi_n : \mathbf{N}^n \times C^n \to C^n$ la seconde projection, on appellera *ensemble pondéré de* C^n un sous-ensemble fini S de $\mathbf{N}^n \times C^n$ tel que, pour $z \in C^n$, la fibre $S \cap \pi_n^{-1}(z)$ soit vide ou de la forme $\{t \in \mathbf{N}^n ; \ \frac{t_1}{m_1(z)} + \cdots + \frac{t_n}{m_n(z)} < 1\}$. On appellera *support de* S, noté $\mathrm{Supp}(S)$, l'ensemble $\pi_n(S) \subset C^n$ et, pour $z \in \mathrm{Supp}(S)$, *multiplicité de* z *dans* S, notée $\mathrm{m}_S(z)$ ou $\mathrm{m}(z)$, le multiindice $(m_1(z), \ldots, m_n(z)) \in (\mathbf{N}^*)^n$. On notera $\mathrm{card}(S)$ le *cardinal* de l'ensemble S, si $n = 1$ on a $\mathrm{card}(S) = \sum_{z \in \mathrm{Supp}(S)} \mathrm{m}_S(z)$.

Si $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_d)$ sont des fonctions analytiques dans $B_n(x, R)$ et $\mathrm{Supp}(S) \subset B_n(x, R)$, on pose

$$|S| := \max(\ |z|;\ z \in \mathrm{Supp}(S)\ )$$

$$\mathrm{m}(S) := \max(\ m_i(z);\ i = 1, \ldots, n,\ z \in \mathrm{Supp}(S)\ )$$

$$\mathbf{f}(S) = 0 \Leftrightarrow \forall z \in \mathrm{Supp}(S)\ ,\ \ \forall t \in S \cap \pi_n^{-1}(z)\ ,\ \ \forall i = 1, \ldots, d, \quad D_t f_i(z) = 0$$

$$\mathbf{f}(S) \subset A \Leftrightarrow \forall z \in \mathrm{Supp}(S)\ ,\ \ \forall t \in S \cap \pi_n^{-1}(z)\ ,\ \ \forall i = 1, \ldots, d, \quad D_t f_i(z) \in A$$

et, pour $h, k \in \mathbf{N}$, on note $D_k \mathbf{f}^h(S)$ la famille

$$\left\{ \prod_{j=1}^{h} D_{t_j} f_{i_j}(z);\ z \in \mathrm{Supp}(S),\ t_1 + \cdots + t_h \in S \cap \pi_n^{-1}(z), \right.$$
$$\left. \|t_1 + \cdots + t_h\| \leq k,\ 1 \leq i_j \leq d \right\}\ .$$

Si S et S' sont deux ensembles pondérés on notera $S \cup S'$ l'ensemble pondéré de support $\mathrm{Supp}(S) \cup \mathrm{Supp}(S')$ où $z \in \mathrm{Supp}(S \cup S')$ est affecté de la multiplicité $\max(\mathrm{m}_S(z); \mathrm{m}_{S'}(z))$. Si $S' \subseteq S$, on notera $S \setminus S'$ le sous-ensemble pondéré de S tel que $z \in \mathrm{Supp}(S)$ soit affecté de la multiplicité $\mathrm{m}_S(z) - \mathrm{m}_{S'}(z)$. Ainsi, si $\mathbf{f}(S) = \mathbf{f}(S') = 0$ (*resp.* $\mathbf{f}(S), \mathbf{f}(S') \subset A$) on a $\mathbf{f}(S \setminus S') = \mathbf{f}(S \cup S') = 0$ (*resp.* $\mathbf{f}(S \setminus S'), \mathbf{f}(S \cup S') \subset A$).

Un ensemble pondéré sera dit *uniformément pondéré* si tous les éléments de son support ont même multiplicité égale à $(\mathrm{m}(S), \ldots, \mathrm{m}(S))$. Une fonction analytique s'annule sur un ensemble uniformément pondéré S si elle a un zéro d'ordre $\geq \mathrm{m}(S)$ en chaque point de $\mathrm{Supp}(S)$. On montre que dans tout ensemble pondéré S de C, il existe un sous-ensemble uniformément pondéré de cardinal $\geq \frac{\mathrm{card}(S)}{5 \log(\mathrm{m}(S)+1)}$.

Si S est un ensemble pondéré de C on lui associe l'ensemble pondéré $S^{(n)}$ de C^n suivant. On a $\mathrm{Supp}(S^{(n)}) = \mathrm{Supp}(S)^n$, $|S^{(n)}| = |S|$ et, si $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathrm{Supp}(S^{(n)})$, on pose $\mathrm{m}_{S^{(n)}}(z) = (\mathrm{m}_S(z_1), \ldots, \mathrm{m}_S(z_n))$.

c) Principe de Schwarz et zéros.

Nous établissons dans cette section le principe de majoration analytique qui permet de passer des fonctions à leurs valeurs. On rapprochera ces résultats de [33], §2 . Soit $y \in B(0, r)$, on pose $\varphi_{y,r}(z) := \frac{z-y}{(1-(z\overline{y}/r^2))^{\eta_0}}$ (si $\eta_0 = 1$ on identifie C avec un sous-corps de $\mathbf{C}$ via l'isomorphisme ι et $\overline{y}$ désigne le complexe conjugué de y dans $\mathbf{C}$). En tout cas $\varphi_{y,r}$ est analytique dans $B(0, r)$ et $M_0(\varphi_{y,r}, r) = r$, tandis que si $r' \leq r$ on a (*cf.* [33],§2, lemme 1 pour le cas $\eta_0 = 1$)

$$M_0(\varphi_{y,r}, r') \leq \begin{cases} \max(r', |y|) \text{ si } \ |\cdot| \text{ est ultramétrique,} \\ \dfrac{r^2(r' + |y|)}{r^2 + r'|y|} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Remarquons d'abord que, si $n = 1$, f est une fonction analytique dans $B(0,R)$ et $|y| < r < R$, alors $f(z) - f(y) = (z-y).g(z)$ où g est une fonction analytique dans $B(0,R)$ uniquement déterminée. En effet,

$$\begin{aligned} f(z) - f(y) &= \sum_{i\in\mathbf{N}} c_i.(z^i - y^i) \\ &= (z-y).\sum_{i\in\mathbf{N}} c_i.(z^{i-1} + \cdots + y^{i-1}) \\ &= (z-y).\sum_{i\in\mathbf{N}}\big(\sum_{j>i} c_j.y^{j-i-1}\big).z^i \ , \end{aligned}$$

et donc $M_0(g,r) \leq M_0(f,r)/r$ si $\eta_0 = 0$. Quitte à modifier la fonction g lorsque $\eta_0 = 1$ on peut écrire $f(z) - f(y) = \varphi_{y,r}(z).g(z)$ et on vérifie en tout cas $M_0(g,r) \leq r^{-1}.(M_0(f,r) + \eta_0|f(y)|)$. Plus généralement, pour n quelconque, $f(z) - f|_{z_n=y} = \varphi_{y,r}(z_n).g(z)$ où g est analytique dans $B_n(0,R)$ et $M_0(g,r) \leq r^{-1}.(M_0(f,r) + \eta_0 M(f|_{z_n=y}, r))$.

Lemme 1. *Soit f une fonction analytique dans $B_n(0,R)$, $0 < r < R$ et $S = \{y_1, \ldots, y_N\} \subset \mathbf{N}\times B(0,r)$ un ensemble pondéré de $B(0,r)$ de cardinal N. Il existe des fonctions $c_0, \ldots, c_{N-1}$ analytiques dans $B_{n-1}(0,R)$ et g_N analytique dans $B_n(0,R)$ telles que*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i(z_1,\ldots,z_{n-1}).\prod_{j=1}^{i}\varphi_{\pi_1(y_j),r}(z_n) + g_N(z).\prod_{j=1}^{N}\varphi_{\pi_1(y_j),r}(z_n) \ .$$

De plus, le uplet $(c_0, \ldots, c_{N-1}, g_N)$ est unique et

$$\begin{aligned} M_0(c_i,r) &\leq M_0(f,r).(r/2^{\eta_0})^{-i}, \quad (i = 0,\ldots,N-1), \\ M_0(g_N,r) &\leq M_0(f,r).(r/2^{\eta_0})^{-N} \ . \end{aligned}$$

Démonstration. Rappelons qu'on note π_1 la projection $\mathbf{N}\times C \to C$. On procède par récurrence sur N en écrivant $g_0 = f$ et, pour $N \geq 0$, $g_N(z) = g_N|_{z_n=\pi_1(y_{N+1})} + \varphi_{\pi_1(y_{N+1}),r}(z_n).g_{N+1}(z)$ et on pose $c_N(z_1,\ldots,z_{n-1}) = g_N|_{z_n=\pi_1(y_{N+1})}$. Pour l'unicité on vérifie que si $f \equiv 0$ alors

$$\begin{aligned} c_0 = f|_{z_n=\pi_1(y_1)} \equiv 0 \Rightarrow g_1 \equiv 0 \Rightarrow c_1 = g_1|_{z_n=\pi_1(y_2)} \equiv 0 \Rightarrow \ldots \\ \cdots \Rightarrow c_{N-1} = g_{N-1}|_{z_n=\pi_1(y_N)} \equiv 0 \Rightarrow g_N \equiv 0 \ . \end{aligned}$$

Pour les majorations on procède à nouveau par récurrence sur N, comme $\pi_1(y_{N+1}) \in B(0,r)$ on a

$$M_0(c_N,r) = M_0(g_N|_{z_n=\pi_1(y_{N+1})}, r) \leq M_0(g_N,r) \ .$$

Et, d'après la remarque précédant l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} M_0(g_{N+1},r) &\leq (M_0(g_N,r)+\eta_0 M_0(c_N,r)).r^{-1} \\ &\leq M_0(f,r).(r/2^{\eta_0})^{-N-1} \end{aligned}$$

avec l'hypothèse de récurrence.□

Principe de Schwarz *Soit f une fonction analytique dans $B_n(0,R)$, $0<r'<r<R$ et S un ensemble uniformément pondéré de $B(0,r')$, de cardinal N. On pose $E_{r,r'}=\frac{r'}{r}.\left(\frac{2r^2}{r^2+r'^2}\right)^{\eta_0}\in]0,1[$ et on suppose que f s'annule sur $S^{(n)}$, alors*

$$M_0(f,r')\leq M_0(f,r).E_{r,r'}^N.2^{\eta_0(n-1)(N+1)} \quad .$$

De plus, si $y\in B_n(0,r')$ et $t\in \mathbf{N}^n$, alors

$$|D_t f(y)|\leq M_0(f,r).E_{r,r'}^N.\left(\frac{1}{r'-\eta_0|y|}\right)^{\|t\|}.2^{\eta_0(n-1)(N+1)} \quad .$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n\geq 1$. On ordonne $\mathrm{Supp}(S)$, puis S via l'ordre lexicographique sur $\mathbf{N}\times\mathrm{Supp}(S)$, notons $S=\{y_1,\ldots,y_N\}$ l'ensemble ordonné de façon croissante ainsi obtenu et, pour $i=1,\ldots,N$, posons $S_i=\{y_1,\ldots,y_{N-i}\}$. Rappelons qu'on note π_1 la projection $\mathbf{N}\times C\to C$. Notons encore S'_i l'ensemble uniformément pondéré de C de support $\mathrm{Supp}(S)$ et multiplicité $\mathrm{m}(S)-[\frac{i\mathrm{m}(S)}{N}]$, on vérifie que $S'_{i+1}\subset S_i\subset S'_i$, $\mathrm{card}(S'_i)\geq N-i$ et $\mathrm{m}_{S\setminus S_i}(\pi_1(y_{N-i}))=\mathrm{m}_{S\setminus S'_i}(\pi_1(y_{N-i}))=[\frac{i\mathrm{m}(S)}{N}]$. Si f est analytique dans $B_n(0,R)$ on écrit, grâce au lemme 1 appliqué à la famille $\{y_N,\ldots,y_1\}$,

$$f(z)=\sum_{i=0}^{N-1} c_i(z_1,\ldots,z_{n-1}).\prod_{j=1}^{i}\varphi_{\pi_1(y_{N-j+1}),r}(z_n)+g(z).$$

$$\prod_{j=1}^{N}\varphi_{\pi_1(y_{N-j+1}),r}(z_n)$$

où g est analytique dans $B_n(0,R)$ et $c_0,\ldots,c_{N-1}$ sont des fonctions de $(z_1,\ldots,z_{n-1})$ analytiques dans $B_{n-1}(0,R)$. On vérifie de plus, pas à pas, que chaque fonction c_i s'annule sur $S_i'^{(n-1)}$ (si $n=1$ on a simplement $c_0=\cdots=c_{N-1}=0$). Il suffit d'appliquer, pour $i=0,\ldots,N-1$, à l'expression ci-dessus la dérivée divisée $D_{(0,\ldots,0,[\mathrm{im}(S)/N])}$ et de poser $z_n = \pi_1(y_{N-i})$. On déduit de l'hypothèse de récurrence avec $n-1$ que, pour $i = 0, \ldots, N-1$,

$$M_0(c_i, r') \leq M_0(c_i, r).E_{r,r'}^{N-i}.2^{\eta_0(n-2)(N+1)} \quad ,$$

et d'après le lemme 1

$$M_0(c_i, r) \leq M_0(f, r).(r/2^{\eta_0})^{-i} \quad ,$$
$$M_0(g, r') \leq M_0(g, r) \leq M_0(f, r).(r/2^{\eta_0})^{-N} \quad .$$

D'où, étant donné que $M_0(\varphi_{y,r}, r') \leq r.E_{r,r'}$ si $|y| \leq r'$,

$$\begin{aligned} M_0(c_i(z_1, \ldots, z_{n-1}).\prod_{j=1}^{i} \varphi_{\pi_1(y_{N-j+1}),r}(z_n), r') & \\ \leq M_0(c_i, r').\prod_{j=1}^{i} M_0(\varphi_{\pi_1(y_{N-j+1}),r}, r') & \\ \leq M_0(f, r).E_{r,r'}^{N}.2^{\eta_0((n-2)(N+1)+i)} & \quad , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_0(g(z).\prod_{j=1}^{N} \varphi_{\pi_1(y_{N-j+1}),r}(z_n), r') &\leq M_0(g, r').\prod_{j=1}^{N} M_0(\varphi_{\pi_1(y_{N-j+1}),r}, r') \\ &\leq M_0(f, r).E_{r,r'}^{N}.2^{\eta_0 N} \quad . \end{aligned}$$

On conclut en combinant ces estimations entre elles. Pour la seconde partie on écrit

$$\begin{aligned} |D_t f(y)| &\leq M_y(f, r' - \eta_0|y|).(r' - \eta_0|y|)^{-\|t\|} \\ &\leq M_0(f, r').(r' - \eta_0|y|)^{-\|t\|} \quad . \end{aligned}$$

□

Corollaire 2. *Soit f une fonction analytique sur $B_{n_1}(0, R_1) \times \cdots \times B_{n_L}(0, R_L)$, et pour $i = 1, \ldots, L$ soient $0 < r_i' < r_i < R_i$, S_i un ensemble uniformément pondéré de $B(0, r_i')$, de cardinal N_i, $y_i \in B_{n_i}(0, r_i')$ et $t_i \in \mathbf{N}^{n_i}$. On suppose que pour $i = 1, \ldots, L$ la fonction $D_{(t_1,\ldots,t_{i-1},0,\ldots,0)} f$ s'annule sur*

$$\{y_1\} \times \cdots \times \{y_{i-1}\} \times S_i^{(n_i)} \times B_{n_{i+1}}(0, r_{i+1}') \times \cdots \times B_{n_L}(0, r_L') \quad ,$$

alors $|D_{(t_1,\dots,t_L)}f(y_1,\dots,y_L)|$ *est majoré par*

$$M_0(f;r_1,\dots,r_L).\prod_{i=1}^{L}\Big(E_{r_i,r_i'}^{N_i}.\Big(\frac{1}{r_i'-\eta_0|y_i|}\Big)^{\|t_i\|}.2^{\eta_0(n_i-1)(N_i+1)}\Big)\quad ,$$

où $E_{r_i,r_i'}=\frac{r_i'}{r_i}.\Big(\frac{2r_i^2}{r_i^2+r_i'^2}\Big)^{\eta_0}$.

Démonstration. Rappelons que, quitte à identifier C à un sous-corps de $\mathbf{C}$ lorsque $\eta_0=1$, $M_0(f;r_1,\dots,r_L)$ est égal à $\sup_{z_i\in\mathcal{B}_{n_i}(0,r_i)}|f(z_1,\dots,z_L)|$ où $\mathcal{B}_{n_i}(0,r_i)$ désigne la boule de rayon r_i centrée à l'origine d'un sur-anneau convenable de C. Considérons les fonctions

$$f_i:=D_{(t_1,\dots,t_{i-1},0,\dots,0)}f|_{z_1=y_1,\dots,z_{i-1}=y_{i-1}}\quad ,$$

on a $f_1=f$ et $f_{L+1}=D_{(t_1,\dots,t_L)}f(y_1,\dots,y_L)$. Pour

$$x\in\mathcal{B}_{n_{i+1}}(0,r_{i+1})\times\cdots\times\mathcal{B}_{n_L}(0,r_L)$$

posons

$$f_{i,x}(z_i):=f_i|_{z_{i+1}=x_{i+1},\dots,z_L=x_L},$$

ainsi

$$M_0(f_i;r_i,\dots,r_L)=\sup_x M_0(f_{i,x};r_i).$$

Notre hypothèse entraîne que $f_{i,x}$ s'annule sur $S_i^{(n_i)}$ et donc par le principe de Schwarz

$$|D_{t_i}f_{i,x}(y_i)|\le M_0(f_{i,x};r_i).E_{r_i,r_i'}^{N_i}.\Big(\frac{1}{r_i'-\eta_0|y_i|}\Big)^{\|t_i\|}.2^{\eta_0(n_i-1)(N_i+1)}\quad .$$

Mais $D_{t_i}f_{i,x}(y_i)=f_{i+1}(x_{i+1},\dots,x_L)$ et donc

$$M_0(f_{i+1};r_{i+1},\dots,r_L)\le$$
$$M_0(f_i;r_i,\dots,r_L).E_{r_i,r_i'}^{N_i}.\Big(\frac{1}{r_i'-\eta_0|y_i|}\Big)^{\|t_i\|}.2^{\eta_0(n_i-1)(N_i+1)}\quad .$$

Le résultat s'obtient en multipliant ces inégalités entre elles. □

Estimation des zéros. *Soit f une fonction analytique $\not\equiv 0$ dans $B_n(0,R)$ de type $\le\omega$. Soit $S_1\subset S_2\subset\dots$ une suite d'ensembles uniformément pondérés de $B(0,R)$ avec $|S_i|\le r_i<R$, $(i\ge1)$. Si f s'annule sur $\bigcup_{i\ge1}S_i^{(n)}$ on a*

$$\sup_{i\ge1}\Big(\frac{card(S_i).\log E_{r_i,|S_i|}^{-1}-\eta_0(n-1)(card(S_i)+1)-\omega(r_i)}{\max(1,\log|S_i|^{-1})}\Big)<\infty\quad .$$

Démonstration. Soit ν l'ordre en 0 de f, on applique le principe de Schwarz avec $r' = |S_i|$ et $r = r_i$, qui montre pour tout $i \geq 1$

$$0 < |D_\nu f(0)|.(r')^\nu \leq M_0(f, r') \leq \mathrm{e}^{\omega(r_i)}.E_{r,r'}^{\mathrm{card}(S_i)}.2^{\eta_0(n-1)(\mathrm{card}(S_i)+1)} \quad ,$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(S_i).\log E_{r_i,|S_i|}^{-1} - \eta_0(n-1)(\mathrm{card}(S_i)+1) - \omega(r_i) \\ \leq \nu.\max(1, \log|S_i|^{-1}) - \log|D_\nu f(0)| \quad .\end{aligned}$$

□

d) Déterminants d'interpolation.

Soient $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions analytiques dans $B_n(0, R)$, $0 < r < R$ et $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ une suite d'ensembles uniformément pondérés de $B_n(0, r)$. Suivant la méthode de M.Laurent (*cf.* [18] ou [33]), nous fixons un entier $D \geq 1$ et considérons le déterminant d'interpolation des monômes de degrés $\leq D$ en les fonctions f_i, vu comme fonction analytique sur $B_n(0, R)^L$ ($L := \binom{D+d}{d}$), précisément

$$f(z_1, \ldots, z_L) := |f_1^{\alpha_1} \ldots f_d^{\alpha_d}(z_\beta)|_{\substack{\|\alpha\| \leq D \\ \beta = 1, \ldots, L}} \quad .$$

On a

$$D_{(t_1,\ldots,t_L)} f(z_1, \ldots, z_L) := \left|D_{t_\beta}(f_1^{\alpha_1} \ldots f_d^{\alpha_d})(z_\beta)\right|_{\substack{\|\alpha\| \leq D \\ \beta = 1, \ldots, L}} \quad .$$

Nous voulons majorer la taille de $D_{(t_1,\ldots,t_L)} f(y_1, \ldots, y_L)$ lorsque $y_\beta \in S_{i_\beta}$ ($\beta = 1, \ldots, L$). Nous commençons par estimer les dérivées pour α et β fixés individuellement.

Rappelons que si f, g sont des fonctions analytiques dans $B_n(x, R)$ et $0 < r < R$ alors $M_x(f+g, r) \leq \max\bigl(M_x(f, r); M_x(g, r)\bigr)$ si $|\cdot|$ est ultramétrique et $\leq M_x(f, r) + M_x(g, r)$ sinon, et aussi $M_x(fg, r) \leq M_x(f, r).M_x(g, r)$.

Estimation des dérivées. *Soient $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions analytiques dans $B_n(0, R)$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbf{N}$. Si $z \in B_n(0, r)$, $0 < r < R$ et $t \in \mathbf{N}^n$ on a*

$$M_0(f_1^{\alpha_1} \ldots f_d^{\alpha_d}, r) \leq M_0(f_1, r)^{\alpha_1} \ldots M_0(f_d, r)^{\alpha_d} \quad .$$

Si de plus $f_1(z),\ldots,f_d(z)\in A$, on a également

$$\overline{T}(D_t(f_1^{\alpha_1}\ldots f_d^{\alpha_d})(z))\leq(\|\alpha\|+1)^{\eta\|t\|}.\overline{T}(D_{\|t\|}\mathbf{f}^{\|\alpha\|}(z))\ .$$

Nota Bene: On a défini la famille $D_{\|t\|}\mathbf{f}^{\|\alpha\|}(z)$ d'éléments de A au *b).*

Démonstration. La première inégalité suit de la remarque ci-dessus. Pour la seconde on écrit

$$D_t(f_1^{\alpha_1}\ldots f_d^{\alpha_d})=\sum_{\substack{t'_1+\cdots+t'_{\|\alpha\|}=t\\ t'_1,\ldots,t'_{\|\alpha\|}\in\mathbf{N}^n}}D_{t'_1}f_1\ldots D_{t'_{\|\alpha\|}}f_d\ ,$$

et, pour chaque pseudo-valeur absolue W de la famille définissant la taille,

$$W(D_t(f_1^{\alpha_1}\ldots f_d^{\alpha_d})(z))$$

est majoré par

$$W\Big(\sum_{\substack{t'_1+\cdots+t'_{\|\alpha\|}=t\\ t'_1,\ldots,t'_{\|\alpha\|}\in\mathbf{N}^n}}1\Big).\max_{\substack{t'_1+\cdots+t'_{\|\alpha\|}=t\\ t'_1,\ldots,t'_{\|\alpha\|}\in\mathbf{N}^n}}\big(W(D_{t'_1}f_1(z))\ldots W(D_{t'_{\|\alpha\|}}f_d(z))\big)\ .$$

On majore $W\Big(\sum_{\substack{t'_1+\cdots+t'_{\|\alpha\|}=t\\ t'_1,\ldots,t'_{\|\alpha\|}\in\mathbf{N}^n}}1\Big)$ par $(\|\alpha\|+1)^{\|t\|\eta(W)}$ et on fait le produit des inégalités obtenues. $\square$

COROLLAIRE 3. *Avec les notations du début du paragraphe et $0<r_i<R$ pour $i=1,\ldots,L$, on a*

$$M_0(f;r_1,\ldots,r_L)\leq L!^{\eta_0}\prod_{\beta=1}^{L}\max(M_0(f_1,r_\beta);\ldots;M_0(f_d,r_\beta))^D\ ,$$

$$\overline{T}\big(D_{(t_1,\ldots,t_L)}f(z_1,\ldots,z_L)\big)\leq\prod_{\beta=1}^{L}\big(L(D+1)^{\|t_\beta\|}\big)^\eta.\overline{T}\big(D_{\|t\|}\mathbf{f}^D(z_\beta)\big)\ .$$

Démonstration. On développe les déterminants et on majore terme à terme avec l'estimation des dérivées précédente.$\square$

3. Un résultat général

Nous appliquons maintenant les principes développés dans le paragraphe précédent aux valeurs algébriques de fonctions analytiques. Notre résultat généralise ceux de [15]. Mais contrairement à [26] nous n'obtiendrons un énoncé que dans le cas d'une inégalité de la taille avec Ψ linéaire. Ceci provient du fait que nous utilisons la méthode des déterminants d'interpolation de [18], [33]. En revanche nous ne ferons pas d'hypothèse supplémentaire sur le corps C, tandis que dans [26] on supposait C localement compact (et même un peu plus).

Nous établissons notre résultat dans le cadre des anneaux diophantiens, qui englobe aussi bien les cas des corps de nombres que des corps de fonctions sur des courbes sur un corps fini ... Ceci donne une démonstration unifiée de résultats allant du théorème de Hermite-Lindemann à la transcendance de valeurs de la fonction exponentielle de Carlitz.

D'autre part, nous présentons dans un même énoncé les méthodes de Gel'fond, Schneider et Mahler, montrant qu'elles dérivent des mêmes principes en jouant différemment sur les paramètres.

Nous explicitons au *c)* quelques applications classiques de notre théorème.

a) Enoncé du résultat.

On se donne un anneau faiblement diophantien A et un sur-anneau C de A, infini, muni d'une extension de la valeur absolue distinguée $|.|$ de A, non discret et complet pour cette extension. On note T la taille sur A et on suppose dans toute la suite que l'inégalité de la taille est satisfaite avec Ψ linéaire, $\Psi(X) = aX$, $(a \geq 0)$.

Avec ces notations on peut énoncer:

THÉORÈME 4. *Soient $R \in \overline{\mathbf{R}}_{>0}$, $\omega : [0, R[\to \mathbf{R}_{>0}$ croissante, $d, n \in \mathbf{N}^*$, $d > n$ et $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_d)$ une famille de fonctions analytiques dans $B_n(0, R) \subset C^n$, algébriquement indépendantes sur A, de types $\leq \omega$.*

Soient $q \in \mathbf{N}^*$ et $N, m, r', r, \phi, \kappa : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_{>0}$ des fonctions, on suppose N croissante, $1 \leq m \leq N$, $r' \leq r < R$, $\phi, \kappa \geq 1$ et qu'il existe une suite d'ensembles pondérés $\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ de C telle que, pour $i \geq 1$, $\mathbf{f}(S_i^{(n)}) \subset A$, $m(S_i \setminus S_{i-1}) \leq m(i-1)$, $|S_i \setminus S_{i-1}| < r'(i-1)$ et, pour $h, k \geq 0$, $\log \overline{T}(D_k \mathbf{f}^h(S_i^{(n)} \setminus S_{i-1}^{(n)})) \leq h\phi(i) + \kappa(k)$. On suppose que, pour $i \geq 1$, il existe une suite d'ensembles uniformément pondérés $S_1', S_2', \ldots$

telle que $S'_i \subset S_i \cap B(0, r'(i))$ *et* $\mathrm{card}(S'_i) = N(i)$. *Pour* $i \geq 0$ *on note*

$$E(i) = \frac{r'(i)}{r(i)}.\Big(\frac{2r(i)^2}{r(i)^2 + r'(i)^2}\Big)^{\eta_0} \quad , \quad E'(i) = \frac{|S_{i+1}|}{r(i)}.\Big(\frac{2r(i)^2}{r(i)^2 + |S_{i+1}|^2}\Big)^{\eta_0} \quad ,$$

et on pose

$$p_i(X) := p_{1,i}.X + p_{2,i}.\log(X+1) + p_{3,i} \quad ,$$

avec

$$p_{1,i} = a\Phi(i+1) + \omega(r(i)) \ ,$$

$$p_{2,i} = a\eta(m(i) + d) + \eta_0 d \ ,$$

$$p_{3,i} = a\kappa(m(i)) + \eta_0(n-1)(N(i)+1) \\ - m(i).\log\min(1, r'(i) - \eta_0|S_{i+1} \setminus S_i|).$$

Si

$$(\ddagger) \quad \frac{\mathrm{card}(S_{i+1}).\log E'(i)^{-1} - \eta_0(n-1)(\mathrm{card}(S_{i+1})+1) - \omega(r(i))}{\max(1, \log|S_{i+1}|^{-1})} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

alors il existe $j \geq 1$ *tel que*

$$N(j).\log E(j)^{-1} \leq p_j(2dq\mathrm{card}(S_1)^{n/d}) + 2^{-dq/2}.p_0(2dq\mathrm{card}(S_1)^{n/d}) \ .$$

b) Démonstration du résultat.

Soit D un entier tel que $L = \binom{D+d}{d} > \mathrm{card}(S_1)^n$, on reprend les notations du §2.d. On choisit $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_L$ minimaux pour l'ordre lexicographique de sorte qu'il existe $x_\beta \in \mathrm{Supp}(S_{i_\beta}^{(n)} \setminus S_{i_\beta - 1}^{(n)})$ et $t_\beta \in \mathbf{N}^n$, $\|t_\beta\| < \mathrm{m}(S_{i_\beta})$ pour $\beta = 1, \ldots, L$ tels que

$$D_{(t_1,\ldots,t_L)} f(x_1, \ldots, x_L) \neq 0 \ .$$

L'existence de $(i_1, \ldots, i_L)$ est assurée par l'estimation des zéros (§2.c) et la condition ($\ddagger$). En effet, sinon la matrice

$$(D_t(f_1^{\alpha_1} \ldots f_d^{\alpha_d})(x))_{\substack{(t,x)\in\cup_{i\geq 1} S_i^{(n)} \\ \|\alpha\| \leq D}}$$

est de rang $< L$ et on construirait par l'algèbre linéaire une fonction analytique $\not\equiv 0$ dans $B_n(0, R)$ s'annulant sur $\cup_{i \geq 1} S_i^{(n)}$, contredisant l'hypothèse

($\ddagger$). Par la minimalité de notre choix on vérifie que, pour $\beta = 1, \ldots, L$, la fonction $D_{(t_1,\ldots,t_{\beta-1},0,\ldots,0)} f$ s'annule sur

$$\{y_1\} \times \cdots \times \{y_{\beta-1}\} \times S^{(n)}_{i_\beta - 1} \times B_n(0, r'_{\beta+1}) \times \cdots \times B_n(0, r'_L) \ .$$

En effet, i_β est le plus petit indice tel que la matrice

$$\left(D_{t_k}(f_1^{\alpha_1} \ldots f_d^{\alpha_d})(x_k)\right)_{\substack{k=1,\ldots,\beta \\ \|\alpha\| \le D}}$$

soit de rang maximal β. C'est-à-dire que pour tout $(t, x) \in S^{(n)}_{i_\beta - 1}$ la matrice correspondante avec (t, x) à la place de (t_β, x_β) est de rang $< \beta$, et ainsi quels que soient $z_i \in B_n(0, r'_i)$ $(i = \beta + 1, \ldots, L)$ et $(t, x) \in S^{(n)}_{i_\beta - 1}$,

$$D_{(t_1,\ldots,t_{\beta-1},t,0,\ldots,0)} f(x_1, \ldots, x_{\beta-1}, x, z_{\beta+1}, \ldots, z_L) = 0 \ .$$

On remarque aussi que les éléments (t_β, x_β) $(\beta = 1, \ldots, L)$ sont deux à deux distincts.

Le corollaire 2 et la première inégalité du corollaire 3, avec $S_\beta = S'_{i_\beta - 1}$, $r'_\beta = r'(i_\beta - 1)$, $r_\beta = r(i_\beta - 1)$ et $N_\beta = N(i_\beta - 1)$, entraînent que $|D_{(t_1,\ldots,t_L)} f(x_1, \ldots, x_L)|$ est majoré par

$$L!^{\eta_0} \prod_{\beta=1}^{L} \max(M_0(f_1, r_\beta); \ldots; M_0(f_d, r_\beta))^D . E^{N_\beta}_{r_\beta, r'_\beta} . \Big(\frac{1}{r'_\beta - \eta_0 |x_\beta|}\Big)^{\|t_\beta\|} . \\ 2^{\eta_0 (n-1)(N_\beta + 1)}$$

$$\le \prod_{\beta=1}^{L} (L.2^{(n-1)(N(j_\beta)+1)})^{\eta_0} .\ \mathrm{e}^{D\omega(r(j_\beta))} . E(j_\beta)^{N(j_\beta)} \\ . \min\big(1, r(j_\beta) - \eta_0 |S_{i_\beta} \setminus S_{j_\beta}|)^{-m(j_\beta)}\big)$$

où on a posé $j_\beta = i_\beta - 1$. On remarque que si $i_\beta = 1$ alors $N_\beta = N(0) = 0$.

D'un autre côté le corollaire 3 donne la majoration

$$\overline{T}(D_{(t_1,\ldots,t_L)} f(x_1, \ldots, x_L)) \le \prod_{\beta=1}^{L} (L.(D+1)^{m(j_\beta)})^{\eta} .\ \mathrm{e}^{D\Phi(j_\beta) + \kappa(m(j_\beta))}$$

car $\log \overline{T}(D_{\|t_\beta\|}\mathbf{f}^D(x_\beta)) \leq D\Phi(i_\beta) + \kappa(m(j_\beta))$ $(\beta = 1, \ldots, L)$. En utilisant l'inégalité de la taille on obtient, vu que $\Psi(X) = aX$ est linéaire et $L \leq (D+1)^d$,

$$\sum_{\beta=1}^{L} \Big(p_{j_\beta}(D) + N(j_\beta). \log E(j_\beta) \Big) \geq 0 \ .$$

Mais $L > \mathrm{card}(S_1)^n$ et le nombre d'indices β tels que $i_\beta = 1$ est majoré par $\mathrm{card}(S_1^{(n)}) \leq \mathrm{card}(S_1)^n$, on peut donc écrire

$$\sum_{\substack{1 \leq \beta \leq L \\ i_\beta \neq 1}} \Big(p_{j_\beta}(D) + \lambda p_0(D) + N(j_\beta). \log E(j_\beta) \Big) \geq 0$$

avec $\lambda := \frac{\mathrm{card}(S_1)^n}{L - \mathrm{card}(S_1)^n}$. En particulier, il existe β tel que $i_\beta \neq 1$ et

$$p_{j_\beta}(D) + \lambda p_0(D) + N(j_\beta). \log E(j_\beta) \geq 0 \ .$$

On applique ce qui précède à la situation multiple suivante. On considère les dq fonctions de dn variables

$$f_1(z_{\ell,1}, \ldots, z_{\ell,n}), \ldots, f_d(z_{\ell,1}, \ldots, z_{\ell,n}); \ \ell = 1, \ldots, q \ .$$

On vérifie que pour $D = 2dq.\mathrm{card}(S_1)^{n/d}$ on a

$$L = \binom{D + dq}{dq} \geq \big(\frac{D}{dq}\big)^{dq} \geq (2^{dq/2} + 1).\mathrm{card}(S_1)^{nq}$$

d'où $\lambda \leq 2^{-dq/2}$. La conclusion obtenue ci-dessus se réécrit donc, en posant $j := j_\beta = i_\beta - 1$,

$$N(j). \log \min E(j)^{-1} \leq p_j(2dq\mathrm{card}(S_1)^{n/d}) + 2^{-dq/2}.p_0(2dq\mathrm{card}(S_1)^{n/d}) \ ,$$

ce qui démontre le théorème 4.

c) Quelques applications.

Le théorème 4 est bien un énoncé de transcendance! Plus précisément il permet de montrer que, sous certaines conditions, des fonctions ne peuvent pas prendre des valeurs en des points donnés dans un anneau diophantien. La transcendance s'obtient en faisant varier l'anneau parmi toutes les clôtures intégrales dans les extensions finies du corps des fractions d'un anneau diophantien fixé. On notera que sur ce point on impose une restriction par rapport aux théorèmes de [15], qui autorisent une variation de l'anneau au sein de leurs énoncés. En revanche, nous allons montrer que notre théorème contient à la fois les méthodes de Schneider, Gel'fond et Mahler.

Pour établir ces corollaires on raisonnera par l'absurde en supposant les fonctions algébriquement indépendantes et prenant leurs valeurs en certains points dans un anneau diophantien. On précisera les paramètres d, n, R, ω, q, N, Φ, m, r, r' ... de la situation et on dérivera une contradiction de la conclusion du théorème 4.

Méthode de Schneider - Dans cette méthode on joue sur la croissance de $N(i)$, montrons le corollaire 2.2 de [15].

Corollaire 5. *Soient K un corps de nombres, $f_1, \dots, f_d$ des fonctions analytiques dans le disque $\mathcal{B}(0,1)$ du plan complexe, ℓ et ϱ des réels satisfaisant $\ell(d-1) > d(\varrho+2)$. Pour tout entier $i \geq i_0$ avec i_0 suffisamment grand, soit $S_i \subset \overline{\mathcal{B}}(0, 1-2/i)$ de cardinal $\geq i^\ell$. Si, pour $\alpha = 1, \dots, d$ et pour tout $i \geq i_0$, $M_0(f_\alpha, 1-1/i) \leq i^\varrho$ et les fonctions f_α prennent en tout point de S_i des valeurs dans K de hauteurs $\leq i^\varrho$ alors elles sont algébriquement dépendantes sur K.*

Démonstration. On a $A = K$, $a = [K : \mathbf{Q}]$, $\eta = 1$, $C = \mathbf{C}$, $\eta_0 = 1$, $n = 1$ et $R = 1$. On a d fonctions et pour les ensembles on prend $S'_i = S_i$, vu comme un ensemble uniformément pondéré de multiplicité 0. On choisit $\omega(1-\frac{1}{x}) = x^\varrho$, $N(x) = x^\ell$, $\Phi(x) = x^\varrho$, $r'(x) = 1 - \frac{2}{x}$, $r(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $q = 1$ et $m = 0$. On a alors $\log_2 E(x) \approx \frac{-1}{2x^2}$ et la condition (‡) est satisfaite car $\ell > \frac{d}{d-1}(\varrho+2) > \varrho + 2$. Par cette même inégalité $\ell > \frac{d}{d-1}(\varrho+2)$ la conclusion du théorème 4 est impossible et donc les fonctions $f_1, \dots, f_d$ doivent être nécessairement algébriquement dépendantes.$\square$

On démontre pareillement l'analogue p-adique de ce corollaire, en remplacant $\mathbf{C}$ par $\mathbf{C}_p$ et $\eta_0 = 0$.

Lorsqu'on suppose les fonctions $f_1, \dots, f_d$ entières ou si on peut imposer que la fonction r/r' reste supérieure à une constante > 1, alors il suffit de demander la condition $\ell(d-1) > d\varrho$. On retrouve ainsi le théorème 2.2.1 de [31] (avec $\varrho_1 = \dots = \varrho_d = \varrho$) ou dans le cas p-adique la proposition 2, §3.1 de [5]. Ces énoncés contiennent, par exemple, les théorèmes des six exponentielles complexe et p-adique respectivement.

Le même énoncé est valable dans le cas de caractéristique finie, c'est le théorème 4.1 de [34].

COROLLAIRE 6. *Soient K une extension finie de $\mathbf{F}_q[T]$, $f_1, \dots, f_d$ des fonctions entières sur la complétion C d'une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q((1/T))$, ℓ et ϱ des réels satisfaisant $\ell(d-1) > d\varrho$. Pour tout entier $i \geq i_0$ avec i_0 suffisamment grand, soit $S_i \subset B(0, q^i)$ de cardinal $\geq q^{i\ell}$. Si, pour $\alpha = 1, \dots, d$ et pour tout $i \geq i_0$, $\log_q M_0(f_\alpha, q^i) \leq q^{i\varrho}$ et les fonctions f_α prennent en tout point de S_i des valeurs dans K de tailles $\leq q^{i\varrho}$ alors elles sont algébriquement dépendantes sur K.*

Démonstration. On a $A = K$, $a = [K : \mathbf{F}_q[T]]_s$ le degré séparable de l'extension K, $\eta = 0$, $\eta_0 = 0$, $n = 1$ et $R = \infty$. On a encore d fonctions et pour les ensembles on prend $S'_i = S_i$, vu comme un ensemble uniformément pondéré de multiplicité 0. On choisit $\omega(x) = x^\varrho \log_2 q$, $N(x) = q^{x\ell}$, $\Phi(x) = q^{x\varrho}$, $r'(x) = q^x$, $r(x) = 2r'(x)$, $q = 1$ et $m = 0$. On a alors $\log_2 E(x) = -1$ et la condition (‡) est satisfaite car $\ell > \frac{d}{d-1}\varrho > \varrho$. Par l'hypothèse $\ell > \frac{d}{d-1}\varrho$ la conclusion du théorème 4 est à nouveau impossible et donc les fonctions $f_1, \dots, f_d$ doivent être algébriquement dépendantes.□

Ce résultat contient les analogues du théorème des six exponentielles sur les modules de Drinfeld (*cf.* [34], théorème 4.2).

Méthode de Gel'fond - Dans cette méthode on joue sur la multiplicité $m(i)$, montrons le résultat suivant.

COROLLAIRE 7. *Soient A un anneau diophantien satisfaisant une inégalité de la taille avec $\Phi(X) = aX$, $f_1, \dots, f_d$ des fonctions entières, algébriquement indépendantes sur C de types $\omega(x) \leq x^\varrho$. Si S est un ensemble fini de points de C sur lequel les fonctions f_α ainsi que leurs dérivées prennent des valeurs dans A telles que $\log_2 \overline{T}(D_k \mathbf{f}^h(S)) \leq c.k.\log_2 k + c'.(k+h)$ pour des réels $c, c' \in \mathbf{R}_{>0}$, alors S a au plus $a\varrho.\frac{cd+\eta}{d-1}$ éléments.*

Démonstration. On a $n = 1$, $R = \infty$ et pour les ensembles on prend $S_i = S'_i$ l'ensemble uniformément pondéré de support S et multiplicité $i + i_0$ avec i_0 fixé arbitrairement grand. On choisit $q = 1$, $\omega(x) = x^\varrho$, $m(i) = i + i_0$, $N(i) = (i+i_0).\mathrm{card} S$, Φ, r' constantes, $r(i) = (i+i_0)^{(d-1)/d\varrho}$ et $\kappa(i) = c.(i+i_0)\log_2(i+i_0) + c'.(i+i_0)$. On a alors $\log_2 E(x) \approx \frac{d-1}{d\varrho}.\log_2(i+i_0)$ et la condition (‡) est satisfaite. La conclusion du théorème 4 s'énonce

$$\Big(\frac{d-1}{d\varrho}\mathrm{card}(S) - a(c + (\eta/d))\Big).(i+i_0).\log_2(i+i_0) \ll (i+i_0) \ .$$

On en déduit en faisant tendre i_0 vers l'infini $(d-1)\mathrm{card}(S) \leq a\varrho(cd+\eta)$.□

Dans le cas $A = K$ un corps de nombres et $C = \mathbf{C}$ ce résultat s'applique aux anneaux de fonctions $K[f_1, \dots, f_t]$ stables par l'opérateur de dérivation

$\frac{d}{dz}$ (voir [31], lemme 3.3.2), et redonne en particulier les théorèmes de Hermite-Lindemann et Gel'fond-Schneider.

Dans le cas de caractéristique finie, le résultat s'applique aux E_q-fonctions (cf. [34]) et on retrouve le théorème 4.1 de [35].

Méthode de Mahler - Dans cette méthode on joue sur le rayon $r'(i)$, montrons le résultat suivant.

COROLLAIRE 8. *Soient K un corps de nombres et f une fonction analytique dans le disque $\mathcal{B}(0,1)$ du plan complexe. Soit $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ une suite de nombres de K dans $\mathcal{B}(0,1)$. Si* $\log|\alpha_i| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} -\infty, f(\alpha_i) \in K$ $(i \geq 1)$ *et*

$$\sup_{i\geq 1}\Big(\frac{h(1,\alpha_i,f(\alpha_i))}{-\log|\alpha_i|}\Big) < \infty \ ,$$

alors, la fonction f est algébrique sur $K(z)$.

Démonstration. On a $A = K$, $a = [K : \mathbf{Q}]$, $\eta = 1$, $C = \mathbf{C}$, $\eta_0 = 1$, $n = 1$ et $R = 1$. On considère les fonctions $z, f(z)$, $d = 2$ et pour $i \geq 1$ les ensembles pondérés $S_i := \{(M,0),(1,\alpha_{i_0+1}),\ldots,(1,\alpha_{i+i_0})\}$ et $S_i' = \{(M,0)\}$ où M, i_0 sont des entiers fixés arbitrairement grands de sorte que $M \gg \sup_{i\geq 1}\Big(\frac{h(1,\alpha_i,f(\alpha_i))}{-\log|\alpha_i|}\Big)^2$ et $\log_2|\alpha_{i_0}|^{-1}$ soit assez grand en fonction de M et f. On choisit $q = 1$, ω, r contantes, N constante égale à M, $\Phi(i) = h(1,\alpha_i,f(\alpha_i))$, $r'(i) = 2|\alpha_{i+i_0}|$, $m(0) = M$ et $m(i) = 1$ $(i \geq 1)$. On a alors $\log_2 E(x) \approx \log_2|\alpha_i|$ et la condition (‡) est satisfaite par la première hypothèse. Par la seconde hypothèse et le choix de M la conclusion du théorème 4 est impossible et donc les fonctions $z, f(z)$ doivent être nécessairement algébriquement dépendantes.□

Cet énoncé permet de traiter les fonctions satisfaisant une équation fonctionnelle de la forme $f(z^k) = R(z, f(z))$ avec $R \in K(X,Y)$ (*voir* [15], corollaire 3.3). En revanche, il ne couvre pas le cas des équations fonctionnelles de la forme $P(z, f(z), f(z^k))$ avec $P \in K[X,Y,Z]$ et $d_Z^\circ > 1$ (*voir* §1.c).

Par exemple, pour $a, b \in \mathbf{N}$, $a \geq 2$, $b \geq 3$ les fonctions transcendantes $F_a(z) = \sum_{j\geq 0} z^{a^j}$, satisfaisant l'équation fonctionnelle $F_a(z^a) = F_a(z) - z$, et $E_b(z) = \prod_{j\geq 0}(1 + z^{b^j})$, satisfaisant $E_b(z) = (1+z)E_b(z^b)$, prennent des valeurs transcendantes aux points algébriques de $\mathcal{B}(0,1) \subset \mathbf{C}$.

RÉFÉRENCES

[1] M. ABLY, *Résultats quantitatifs d'indépendance algébrique pour les groupes algébriques*, J. Number Theory **42** (1992), 194–231.

[2] M. AMOU, *Algebraic independence of the values of certain functions at a transcendental number*, Acta Arith. **59** (1991), 71–82.

[3] P.G. BECKER, *Effective measures of algebraic independence of the values of Mahler type functions*, Acta. Arith. **58** (1991), 239–250.

[4] P.G. BECKER, *Transcendence of the values of functions satisfying generalized Mahler type functional equations*, J. Reine Angew. Math. **440** (1993), 111–128.

[5] D. BERTRAND, *Problèmes locaux*, appendice 1 de *Nombres transcendants et groupes algébriques* par M. Waldschmidt, Astérisque 69–70, Soc. Math. France (1979), 163–189.

[6] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Chap. 5 à 7, Masson, 1985.

[7] D. CAVENY, *Quantitative transcendence results associated with Liouville numbers*, Proc. Amer. Math. Soc., **120**, n°2 (1994), 349–357.

[8] S. DAVID, *Minoration de formes linéaires de logarithmes elliptiques*, Mem. Soc. Math. France (Suppl. au n°123), 1995, à paraître.

[9] S. DELAUNAY, *Grands degrés de transcendance, les hypothèses techniques dans le cas exponentiel*, (I), C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **315** (1992), 1333–1336 ; (II), Ibidem **316** (1993), 7–10.

[10] L. DENIS, *Remarques sur la transcendance en carastéristique finie*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **14**, n°4 (1992), 157–162.

[11] L. DENIS, *Indépendance algébrique sur le module de Carlitz*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **317** (1993), 913–915 ; Acta. Arith. **69-1** (1995), 75–89.

[12] DONG PINGPING, *Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombre algébriques p-adiques*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **315** (1992), 103–106.

[13] R. FOSSUM, *The divisor class group of a Krull domain*, Ergeb. Math. Grenzgeb. n°74, Springer, 1973.

[14] M. D. FRIED & M. JARDEN, *Field arithmetic*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (**3**) n°11, Springer, 1986.

[15] F. GRAMAIN, M. MIGNOTTE & M. WALDSCHMIDT, *Valeurs algébriques de fonctions analytiques*, Acta Arith. **47** (1986), 97–121.

[16] Y. HELLEGOUARCH, *Modules de Drinfeld généralisés*, dans *Approximation diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1990*, P. Philippon éd., W. de Gruyter, 1992, 123–164.

[17] N. HIRATA-KOHNO, *Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques*, Invent. Math. **104** (1991), 401–433.

[18] M. LAURENT, *Sur quelques résultats récents de transcendance*, dans *Journées Arithmétiques de Luminy, Juillet 1989*, Astérisque 198–199–200, Soc. Math. France, 1991, 209–230.

[19] M. LAURENT, M. MIGNOTTE & Y.V. NESTERENKO, *Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation*, J. Number Theory, à paraître.

[20] J. LOXTON & A. van der POORTEN, *Transcendence and algebraic independence by a method of Mahler*, dans *Transcendence theory : advances and applications*, A. Baker & D.W. Masser éd., Academic Press, 1977, 211–226.

[21] D.W. MASSER & G. WÜSTHOLZ, *Isogeny estimates for abelian varieties and finiteness theorems*, Ann. of Math. **137** (1993), 407–458.

[22] Y.V. NESTERENKO, *On a measures of the algebraic independence of the values of certain functions*, Math. Sb. **128(170)** (1985), 545–568 = Math. USSR Sb. **56** (1987), 545–567.

[23] Y.V. NESTERENKO, *Measures of algebraic independence of numbers and functions*, dans *Journées Arithmétiques de Besançon, Juin 1985*, Astérisque 147–148, Soc. Math. France, 1987, 141–149.

[24] K. NISHIOKA, *New approach in Mahler's method*, J. Reine Angew. Math **407** (1990), 202–219.

[25] K. NISHIOKA, *Algebraic independence measures of the values of Mahler functions*, J. Reine Angew. Math **420** (1991), 203–214.

[26] P. PHILIPPON, *Transcendance sur les anneaux diophantiens*, dans *Séminaire de Théorie des Nombres de Caen 1992–93*, Publ. Math. Univ. Caen, 1994.

[27] D. ROY & M. WALDSCHMIDT, *Autour du théorème du sous-groupe algébrique*, Canadian Bull. Math. **36**, n°3 (1993), 358–367.

[28] C.L. STEWART & YU KUNRUI, *On the abc conjecture*, Math. Ann. **291** (1991), 225–230.

[29] A. THIERY, *Indépendance algébrique des périodes et quasi-périodes d'un module de Drinfeld*, dans *The arithmetic of functions fields, Proc. Workshop Ohio State Univ. 1991*, D. Goss, D.R. Hayes & M.I. Rosen éd., W. de Gruyter, 1992, 265–284.

[30] T. TÖPFER, *An axiomatization of Nesterenko's method and applications on Mahler functions*, J. Number Theory **49**, n°1 (1994), 1-26 ; (II), Compositio Math. à paraître.

[31] M. WALDSCHMIDT, *Nombres transcendants*, Lecture Notes in Math. **402**, Springer, 1974.

[32] M. WALDSCHMIDT, *Introduction to recent results in transcendental number theory*, MSRI, Berkeley, 1993, preprint n°074.93.

[33] M. WALDSCHMIDT, *Extrapolation et alternants I*, dans *Problèmes Diophantiens 92-93*, Publ. Math. Univ. P. et M. Curie **108** (1994), exposé n°11.

[34] YU JING, *Six exponentials theorems in finite characteristic*, Math. Ann. **272** (1985), 91–98.

[35] YU JING, *Transcendence and Drinfeld modules*, Invent. Math. **83** (1986), 507–517.

[36] YU JING, *Transcendence in finite characteristic*, dans *The arithmetic of functions fields, Proc. Workshop Ohio State Univ. 1991*, D. Goss, D.R. Hayes & M.I. Rosen éd., W. de Gruyter, 1992, 253–264.

[37] YU KUNRUI, *Linear forms in p-adic logarithms*, Acta Math. **53** (1989), 104–186 ; (II), Compositio Math. **74** (1990), 15–113.

Patrice PHILIPPON
Université P. & M. Curie

Problèmes Diophantiens – UMR 9994
Tour 46-56, 5ème ét., case 247
F–75252 Paris Cedex 05
e-mail: pph@mathp6.jussieu.fr