Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **7** *(1995), 133–141*

Problème de diviseurs exponentiels et entiers exponentiellement sans facteur carré

par Jie Wu

1. Introduction

Dans tout l'article, la lettre p, avec ou sans indice, désigne un nombre premier. Nous disons que d est un *diviseur exponentiel* de l'entier $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k}$ (décomposition canonique de n) si $d = p_1^{\mu_1} \cdots p_k^{\mu_k}$, où $\mu_j | \nu_j$ $(1 \leq j \leq k)$. Désignons par $\tau^{(e)}(n)$ le nombre de ces diviseurs de l'entier n, avec la convention $\tau^{(e)}(1) = 1$. Il est intéressant d'étudier des analogues de la fonction de diviseurs $\tau(n)$ dans le cas $\tau^{(e)}(n)$. Pour le problème de l'ordre maximal, Erdős (cf. [5]) a obtenu

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \tau^{(e)}(n) \cdot \log_2 n}{\log n} = \tfrac{1}{2} \log 2, \tag{1.1}$$

où $\log_k$ désigne la k-ième itérée de la fonction logarithme. Par analogie au problème de diviseurs de Dirichlet, Subbarao [5] a considéré le problème de diviseurs exponentiels, c'est–à–dire l'évaluation de la fonction sommatoire de $\tau^{(e)}(n)$:

$$D^{(e)}(x) := \sum_{n \leq x} \tau^{(e)}(n).$$

Par la méthode du contour d'intégration, il a établi la relation asymptotique

$$D^{(e)}(x) = A_1 x + E(x), \tag{1.2}$$

où

$$A_1 := \prod_p \left(1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \{\tau(\nu) - \tau(\nu - 1)\} p^{-\nu}\right) \quad \text{et} \quad E(x) \ll x^{1/2} \log x.$$

Il a formulé un problème ouvert : chercher l'ordre exact de $E(x)$.

Le premier objet de cet article est de démontrer le Théorème 1 suivant, qui répond à la question ci-dessus de Subbarao.

Manuscrit reçu le 10 Décembre 1993, version définitive le 11 avril 1994.

Théorème 1. *Sous les notations précédentes, on a pour* $x \geq 10$

$$D^{(e)}(x) = A_1 x + A_2 x^{1/2} + O\big(x^{2/9} \log x\big)$$

avec

$$A_2 := \prod_p \bigg(1 + \sum_{\nu=5}^{\infty} \big\{\tau(\nu) - \tau(\nu-1) - \tau(\nu-2) + \tau(\nu-3)\big\} p^{-\nu/2}\bigg).$$

Nous disons qu'un entier $n > 1$ est *sans facteur carré exponentiellement*, si dans sa décomposition canonique chaque exposant est sans facteur carré. Par convention, l'entier 1 est considéré comme sans facteur carré exponentiellement. Désignons par $q^{(e)}(n)$ la fonction caractéristique de ces entiers et définissons $Q^{(e)}(x) := \sum_{n \leq x} q^{(e)}(n)$, qui est le nombre des entiers sans facteur carré exponentiellement n'excédant pas x. Subbarao [5] a initialement étudié cette fonction et a établi, à l'aide d'un résultat très général de Delange [1], la relation asymptotique :

$$Q^{(e)}(x) = Bx + O\big(x^{1/2}\big) \tag{1.3}$$

avec

$$B := \prod_p \bigg(1 + \sum_{\nu=4}^{\infty} \big\{\mu(\nu)^2 - \mu(\nu-1)^2\big\} p^{-\nu}\bigg),$$

où $\mu(\nu)$ est la fonction de Möbius.

Le deuxième objet de ce travail est de démontrer le Théorème 2 suivant, qui améliore considérablement le terme d'erreur dans (1.3).

Théorème 2. *Sous les notations précédentes, on a pour* $x \geq 10$

$$Q^{(e)}(x) = Bx + O\big(x^{1/4} \exp\big\{-C_1 N(x)\big\}\big)$$

où C_1 *est une constante positive effective et* $N(x) := (\log x)^{3/5} (\log_2 x)^{-1/5}$.

La méthode de démonstration des Théorèmes 1 et 2 est différente et plus simple que celle de Subbarao. Nous étudions d'abord les séries de Dirichlet associées à $\tau^{(e)}(n)$ et à $q^{(e)}(n)$. Une telle étude nous permet de décomposer $\tau^{(e)}(n)$, $q^{(e)}(n)$ en produit convolution de plusieurs fonctions arithmétiques plus maniables, pouvant être estimées assez précisément de manières diverses. Puis, par application simple du principe de l'hyperbole de Dirichlet, nous obtenons les relations asymptotiques souhaitées de $D^{(e)}(x)$ et $Q^{(e)}(x)$.

Notations. Dans tout l'article, la lettre s désigne une variable complexe. Les nombres réels σ et τ sont implicitement définis par la relation $s = \sigma + i\tau$. Désignons par $\zeta(s)$ la fonction de Riemann. Nous notons ε un nombre positif arbitrairement petit et $M_1(\varepsilon)$, $M_2(\varepsilon)$ sont des constantes positives dépendant seulement de ε. La partie entière et la partie fractionnaire du nombre réel x sont désignées respectivement par $[x]$ et $\{x\}$. Enfin nous notons $C_1, C_2, C_3, \cdots$ des constantes positives effectives.

Remerciement. Le Professeur H. Menzer nous indique que le terme d'erreur $O\big(x^{2/9}\log x\big)$ dans le Théorème 1 peut être amélioré à $O\big(x^{1057/4785+\varepsilon}\big)$ pour tout $\varepsilon > 0$, si l'on utilise un résultat de Graham et Kolesnik [2] sur $D(1,2,x)$ (cf. (2.4) ci-dessous). Nous le remercions de cette information.

2. Démonstration du Théorème 1

Comme nous avons dit au paragraphe 1, nous étudions d'abord la série de Dirichlet associée à $\tau^{(e)}(n)$. Le lemme suivant fournit, sur cette série, les informations dont nous avons besoin.

Lemme 1. *On a pour $\sigma > 1$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau^{(e)}(n) n^{-s} = \zeta(s)\zeta(2s)\mathcal{F}(s) \tag{2.1}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(s) &:= \prod_p \Big(1 + \sum_{\nu=5}^{\infty} \big\{\tau(\nu) - \tau(\nu-1) - \tau(\nu-2) + \tau(\nu-3)\big\} p^{-\nu s}\Big)\\ &=: \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}.\end{aligned}$$

De plus, pour tout $\sigma > \frac{1}{5}$, la série de Dirichlet $\mathcal{F}(s)$ est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| n^{-\sigma} \ll \big(\sigma - \tfrac{1}{5}\big)^{-1}. \tag{2.2}$$

Démonstration. Il est clair que $\tau^{(e)}(n)$ est une fonction multiplicative et $\tau^{(e)}(p^\nu) = \tau(\nu)$ pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geq 1$. D'où nous déduissons, grâce au produit eulérien, la formule (2.1).

Nous allons ensuite démontrer la majoration (2.2). Il est patent que $f(n)$ est une fonction multiplicative et

$$f(p) = f(p^2) = f(p^3) = f(p^4) = 0,$$
$$f(p^\nu) = \tau(\nu) - \tau(\nu-1) - \tau(\nu-2) + \tau(\nu-3) =: \tau^*(\nu) \quad (\nu \geq 5),$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| n^{-\sigma} = \prod_p \left(1 + \sum_{\nu=5}^{\infty} |\tau^*(\nu)| p^{-\nu\sigma}\right) =: \zeta(5\sigma)\mathcal{W}(\sigma)$$

où

$$\mathcal{W}(\sigma) := \prod_p \left(1 + \sum_{\nu=6}^{\infty} \{|\tau^*(\nu)| - |\tau^*(\nu-5)|\} p^{-\nu\sigma}\right)$$

avec la convention $\tau^*(1) = \tau^*(2) = \tau^*(3) = \tau^*(4) = 0$. Evidemment ce produit infini est absolument convergent pour tout $\sigma > \frac{1}{6}$. Cela établit bien la majoration (2.2).

Nous somme, maintenant, en mesure de démontrer le Théorème 1.

La relation (2.1) du Lemme 1 nous autorise d'écrire

$$\tau^{(e)}(n) = \sum_{d|n} \tau(1,2;d) f\left(\frac{n}{d}\right), \tag{2.3}$$

où la fonction arithmétique $\tau(1,2;n)$ est définie par la relation

$$\zeta(s)\zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(1,2;n) n^{-s} \quad (\sigma > 1).$$

En posant

$$D(1,2;x) := \sum_{n \leq x} \tau(1,2;n),$$

nous avons la formule asymptotique

$$D(1,2;x) = \zeta(2)x + \zeta\left(\tfrac{1}{2}\right)x^{1/2} + O\left(x^{2/9}\log x\right). \tag{2.4}$$

Ce résultat se trouve dans [4] et une démonstration complète peut être trouvée dans le livre de Ivić [3].

D'après (2.2)–(2.4), il suit

$$\begin{aligned} D^{(e)}(x) &= \sum_{m\le x} f(m) D\Big(1,2;\frac{x}{m}\Big) \\ &= x\zeta(2)\sum_{m\le x}\frac{f(m)}{m} + x^{1/2}\zeta\big(\tfrac12\big)\sum_{m\le x}\frac{f(m)}{m^{1/2}} + O\big(x^{2/9}\log x\big). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Par (2.2), nous obtenons

$$\sum_{m\le x}|f(m)| \ll x^{2/9}\sum_{m\le x}|f(m)|m^{-2/9} \ll x^{2/9},$$

d'où un calcul élémentaire montre que

$$\sum_{m\le x}\frac{f(m)}{m} = \mathcal{F}(1) + O\big(x^{-7/9}\big),$$

$$\sum_{m\le x}\frac{f(m)}{m^{1/2}} = \mathcal{F}\big(\tfrac12\big) + O\big(x^{-5/18}\big).$$

En reportant ces estimations dans (2.5), il vient

$$D^{(e)}(x) = \zeta(2)\mathcal{F}(1)x + \zeta\big(\tfrac12\big)\mathcal{F}\big(\tfrac12\big)x^{1/2} + O\big(x^{2/9}\log x\big).$$

Cela établit bien le Théorème 1.

3. Démonstration du Théorème 2

Pour la série de Dirichlet associée à $q^{(e)}(n)$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2. *On a pour* $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{(e)}(n)n^{-s} = \zeta(s)\zeta(4s)^{-1}\mathcal{G}(s) \tag{3.1}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(s) &:= \prod_p\Big(1+\sum_{\nu=4}^{\infty}\big\{\mu(\nu)^2-\mu(\nu-1)^2\big\}p^{-\nu s}\Big)\big(1-p^{-4s}\big)^{-1} \\ &=: \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\sigma > \frac{1}{5}$, la série de Dirichlet $\mathcal{G}(s)$ est absolument convergente et pour tous $\varepsilon > 0$ et $\sigma \geq \frac{1}{5} + \varepsilon$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g(n)| n^{-\sigma} \ll_{\varepsilon} 1. \tag{3.2}$$

Démonstration. Nous pouvons facilement constater que $q^{(e)}(n)$ est une fonction multiplicative et que pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geq 1$ nous avons $q^{(e)}(p^{\nu}) = \mu(\nu)^2$. Cela implique la formule (3.1), grâce au produit eulérien.

Nous allons démontrer la majoration (3.2). Il est clair que $g(n)$ est une fonction multiplicative et

$$g(p) = g(p^2) = g(p^3) = g(p^4) = 0, \tag{3.3}$$

$$1 + \sum_{\nu=5}^{\infty} g(p^{\nu}) z^{\nu} = \left(1 + \sum_{\nu=4}^{\infty} \left\{\mu(\nu)^2 - \mu(\nu-1)^2\right\} z^{\nu}\right) \left(1 - z^4\right)^{-1}. \tag{3.4}$$

En remarquant que le membre de droite dans (3.4) est holomorphe dans le disque $|z| < 1$, la formule de Cauchy implique

$$\left|g(p^{\nu})\right| \leq M_1(\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-\nu} \quad (\nu \geq 5)$$

avec

$$M_1(\varepsilon) := \max_{|z| \leq 1-\varepsilon} \left| \left(1 + \sum_{\nu=4}^{\infty} \left\{\mu(\nu)^2 - \mu(\nu-1)^2\right\} z^{\nu}\right) \left(1 - z^4\right)^{-1} \right|.$$

Il vient grâce à (3.3) pour tous $\varepsilon > 0$ et $\sigma \geq \frac{1}{5} + \varepsilon$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |g(n)| n^{-\sigma} &\leq \prod_p \left(1 + M_1(\varepsilon) \sum_{\nu=5}^{\infty} \left((1-\varepsilon)p^{\sigma}\right)^{-\nu}\right) \\ &\leq \prod_p \left(1 + M_2(\varepsilon) p^{-5\sigma}\right) \ll_{\varepsilon} 1, \end{aligned}$$

où nous avons déjà supposé que ε est assez petite telle que $(1-\varepsilon)2^{1/5+\varepsilon} > 1$. Cela achève la démonstration du Lemme 2.

Par la formule (3.1) du Lemme 2, nous pouvons écrire

$$q^{(e)}(n) = \mathbf{1} * h(n) \quad \text{et} \quad h(n) := \mu_4 * g(n) \quad (n \geq 1), \tag{3.5}$$

où $\mu_4(n)$ est défini par la relation

$$\zeta(4s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_4(n) n^{-s} \quad \big(\sigma > \tfrac{1}{4}\big).$$

Puisque $\zeta(4s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-4s} \quad \big(\sigma > \frac{1}{4}\big)$, nous avons bien

$$\mu_4(n) = \begin{cases} \mu(l) \text{ si } n = l^4, \\ \\ \quad 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour les fonctions sommatoires de $h(n)$ et $|h(n)|$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 3. *Sous les notations précédentes, on a alors pour $x \geq 10$*

$$\sum_{n\leq x} h(n) \ll x^{1/4} \exp\big\{- C_2 N(x)\big\}, \tag{3.6}$$

$$\sum_{n\leq x} |h(n)| \ll x^{1/4}. \tag{3.7}$$

Démonstration. En posant

$$M_4(x) := \sum_{n\leq x} \mu_4(n) \quad \text{et} \quad G(x) := \sum_{n\leq x} g(n),$$

le principe de l'hyperbole de Dirichlet nous permet d'écrire pour tout $y \in [5, \frac{1}{2}x]$

$$\begin{aligned} \sum_{n\leq x} h(n) &= \sum_{n\leq y} \mu_4(n) G\Big(\frac{x}{n}\Big) + \sum_{n\leq x/y} g(n) M_4\Big(\frac{x}{n}\Big) - M_4(y) G\Big(\frac{x}{y}\Big) \\ &=: E_1 + E_2 - E_3. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nous avons d'abord (cf. [3], Theorem 12.7)

$$M_4(x) = \sum_{n\leq x^{1/4}} \mu(n) \ll x^{1/4} \exp\big\{- C_3 N(x)\big\}. \tag{3.9}$$

Par ailleurs, la relation (3.2) implique

$$\sum_{n\le x}|g(n)| \le x^{9/40}\sum_{n\le x}|g(n)|n^{-9/40} \ll x^{9/40}. \tag{3.10}$$

En utilisant (3.9) et (3.10), un calcul élémentaire montre

$$E_1 \ll x^{9/40}\sum_{n\le y}|\mu_4(n)|n^{-9/40} \ll x^{9/40}\sum_{l\le y^{1/4}} l^{-9/10} \ll x^{9/40}y^{1/40},$$

$$E_2 \ll x^{1/4}\exp\big\{-C_3N(y)\big\}\sum_{n\le x/y}|g(n)|n^{-1/4} \ll x^{1/4}\exp\big\{-C_3N(y)\big\},$$

$$E_3 \ll y^{1/4}\exp\big\{-C_3N(y)\big\}(x/y)^{9/40} \ll x^{9/40}y^{1/40}.$$

En reportant dans (3.8) et en prenant $y = x\exp\big\{-C_4N(x)\big\}$, nous obtenons

$$\sum_{n\le x} h(n) \ll x^{1/4}\exp\big\{-C_2N(x)\big\}.$$

Ensuite nous allons démontrer (3.7). Nous avons grâce à la définition de μ_4 et à (3.2)

$$\sum_{n\le x}|h(n)| \le \sum_{d\le x}|g(d)|\sum_{m\le x/d}|\mu_4(m)| \le x^{1/4}\sum_{d\le x}|g(d)|d^{-1/4} \ll x^{1/4}.$$

Cela établit bien la majoration (3.7).

Nous somme, maintenant, en mesure de complèter la démonstration du Théorème 2.

La formule (3.5) et le principe de l'hyperbole de Dirichlet nous permettent d'écrire pour tout $y\in[5,\frac{1}{2}x]$

$$\begin{aligned} Q^{(e)}(x) &= \sum_{n\le y} h(n)\left[\frac{x}{n}\right] + \sum_{n\le x/y}\sum_{m\le x/n} h(m) - \left[\frac{x}{y}\right]\sum_{n\le y} h(n) \\ &=: E_1 + E_2 - E_3. \end{aligned} \tag{3.12}$$

D'une part, nous avons d'après (3.7) et (3.8) du Lemme 4

$$\begin{aligned} E_1 &= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n} - x\sum_{n>y}\frac{h(n)}{n} - \sum_{n\le y} h(n)\left\{\frac{x}{n}\right\} \\ &= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n} + O\big(xy^{-3/4}\exp\big\{-C_2N(y)\big\} + y^{1/4}\big). \end{aligned} \tag{3.13}$$

D'autre part, la majoration (3.7) du Lemme 4 implique

$$\begin{aligned} E_2 &\ll \sum_{n\le x/y} \big(x/n\big)^{1/4} \exp\big\{-C_2 N(x/n)\big\} \\ &\ll xy^{-3/4}\exp\big\{-C_2N(y)\big\}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$E_3 \ll xy^{-3/4}\exp\big\{-C_2N(y)\big\}. \tag{3.15}$$

En reportant (3.13) – (3.15) dans (3.12), il vient

$$Q^{(e)}(x) = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n} + O\big(xy^{-3/4}\exp\big\{-C_2N(y)\big\} + y^{1/4}\big).$$

Pour le choix $y = x\exp\{-C_5N(x)\}$, nous obtenons

$$Q^{(e)}(x) = Bx + O\big(x^{1/4}\exp\big\{-C_1N(x)\big\}\big).$$

Cela achève la démonstration du Théorème 2.

Bibliographie

[1] H. Delange, *Sur certaines fonctions additives à valeur entiers*, Acta Arith., **16**, (1969/70), 195–206.

[2] S.W. Graham and G.A. Kolesnik, *On the difference between consecutive squarefree numbers*, Acta Arith **49** (1988), 435–447.

[3] A. Ivić, *The Riemann zeta-function*, John Wiley & New York, 1985.

[4] H.E. Richert, *On the difference between consecutive squarefree numbers*, J. London Math. Soc. (2) **26** (1951), 16–20.

[5] M.N. Subbarao, *On some arithmetic convolutions*, in *The Theory of Arithmetic Functions*, Lecture Notes in Mathematics No.**251**, 247 – 271, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

Jie Wu
Laboratoire de Mathématiques
Institut Elie Cartan – URA 750
Université Henri Poincaré, Nancy 1
F-54506 Vandoeuvre–lès–Nancy

e-mail : wujie@iecn.u-nancy.fr