Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **8** *(1996), 397–412*

Nombres normaux

par Anne BERTRAND-MATHIS

Résumé. Nous rassemblons divers résultats sur les nombres normaux et en déduisons de nouveaux résultats.

Abstract. We gather various results on normal numbers and deduce new results.

I - Trois notions de normalité

Soit β un nombre réel fixé stritctement supérieur à 1. On peut définir la notion de nombre normal dans une base β de trois façons différentes : la définition classique, la normalité “au sens des chiffres”, et la normalité géométrique. La définition classique est la suivante : nous dirons qu'un nombre réel x est normal dans la base β si la suite $(x\beta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un ; nous appellerons $B(\beta)$ l'ensemble de ces nombres.

La définition de la normalité géométrique est similaire mais se place dans des tores de dimension supérieure à 1 ; si β est algébrique de degré r nous dirons que x est géométriquement normal en base β lorsque la suite $(x\beta^n, x\beta^{n+1}, \dots, x\beta^{n+r-1})_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}^r$ est équirépartie modulo un ; si β est transcendant nous dirons que x est géométriquement normal en base β si la suite $(x\beta\neg^{n}, x\beta\neg^{n+1}, \dots)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo un dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est à dire si pour tout $i \in \mathbb{N}$ la suite $(x\beta^n, x\beta^{n+1}, \dots, x\beta^{n+i})_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un dans $\mathbb{R}^{i+1}$; dans les deux cas nous appellerons $T(\beta)$ l'ensemble des nombres géométriquement normaux en base β. Lorsque β est un nombre entier algébrique dont l'équation minimale sur $\mathbb{Z}$ est $\beta^r = a_r\beta^{r-1} + \cdots + a_1$, la suite $(x\beta^n, \dots, x\beta^{n+r-1})_{n\geq 0}$ n'est autre que la suite $S_\beta^n((x, x\beta, \dots, x\beta^{r-1}))_{n\geq 0}$ itérée du point $(x, x\beta, \dots, x\beta^{r-1})$ du tore $[0,1[^r$, par la transformation S_β de $[0,1[^r$ dans lui-même :

$$S_\beta(y_1, \dots, y_r) = (y_2, \dots, y_r,\ a_1y_1 + \cdots + a_ry_r).$$

Lorsque β est transcendant $(x\beta^n, x\beta^{n+1}, \dots)$ est le $n^{\text{ème}}$ itéré de $(x, x\beta, \dots)$ par le shift sur $[0,1[^{\mathbb{N}}$: $S(y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$ (le cas où β est

Manuscrit reçu le 28 Février 1996

algébrique, mais pas entier algébrique, est le seul cas dans lequel aucune transformation ne s'impose de façon naturelle). On peut donc utiliser la théorie ergodique pour étudier les suites $(x\beta^n, \ldots, x\beta^{n+r-1})_{n\geq 0}$ comme on le fait pour étudier $B(p)$ lorsque p est entier naturel ; $(xp^n)_{n\geq 0}$ est alors l'itérée de x par la transformation $x \longrightarrow \{px\}$ de $[0,1[$ dans lui-même, tandis que si β n'est pas entier naturel, $(x\beta^n)_{n\geq 0}$ ne s'obtient pas par itération.

La "normalité des chiffres" est un peu plus compliquée à définir et s'appuie sur la transformation $x \longrightarrow \{\beta x\}$ de $[0,1]$ dans lui-même. Soit $x \in [0,1]$. Nous pouvons mettre x sous la forme $x = \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \ldots$ avec la condition suivante : pour tout $K \geq 1, \varepsilon_K \in \mathbb{N}$ et $\frac{\varepsilon_{K+1}}{\beta^{K+1}} + \frac{\varepsilon_{K+2}}{\beta^{K+2}} + \cdots < \frac{1}{\beta^K}$ (sinon on prendrait un ε_K plus grand) ; on a toujours $\varepsilon_K \leq \beta$ et le "développement en base β" obtenu est unique ([R], [P]). L'ensemble des β-développements des nombres de $[0,1[$ ainsi obtenus forme un sous shift du full-shift sur $\{0, 1, \ldots, [\beta]\}^{\mathbb{N}}$ et prend le nom de β-shift.

Il admet une unique mesure μ_β d'entropie maximale $\ln \beta$ (voir Rényi, Parry, Hofbauer et un "survey" dans [B.M1]) ; nous dirons que x admet un β-développement normal si la suite des chiffres $(\varepsilon_i)_{i\geq 0}$ de son β-développement est répartie selon la mesure μ_β. Notons que si L_β est la transformation de $[0,1[$ dans lui-même : $x \longrightarrow \{\beta x\}$; alors

$$L_\beta^n x = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{\beta^2} + \cdots .$$

L'application L_β conserve une unique mesure $\dot\mu_\beta$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, qui est la mesure telle que pour tout intervalle $[a,b]$ de $[0,1[$:

$$\dot\mu([a,b]) = \mu(\{(\varepsilon_i)_{i\geq 1} \ ; \ (\varepsilon_i)_{i\geq 1} \text{ appartient au } \beta\text{-shift et}$$
$$\frac{\varepsilon_1^\beta}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots \in [a,b])\}).$$

Ainsi $x \in [0,1[$ est à β-développement normal si la suite $(L_\beta^n x)_{n\geq 0}$ est $\dot\mu_\beta$-répartie dans $[0,1[$.

Remarque. pour $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1[$ on peut développer x de deux façons : soit on écrit $x = [x] + \{x\}$ et on développe $\{x\}$ en base β, soit on écrit pour $x \geq 0$

$$x = \varepsilon_{-K}\beta^k + \varepsilon_{-K+1}\beta^{K-1} + \cdots + \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \cdots$$

avec pour tout $h \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_h \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{l=h+1}^{\infty} \varepsilon_l \beta^{-l} < \beta^{-h}$ et pour $x \leq 0$ on développe $-x$.

Il n'y a guère de raison pour préférer l'une à l'autre ; en général les deux méthodes donnent des ensembles normaux distincts (sauf dans le cas où $\beta \in \mathbb{N}$ ou bien est un Pisot ([B.M1]).

Nous choisirons la seconde pour fixer les idées et nous appellerons $N(\beta)$ l'ensemble des nombres réels qui ont développement normal en base β.

Bien sûr lorsque β est dans $\mathbb{N}$ ces trois notions se confondent et $\dot{\mu}_\beta$ est la mesure de Lebesgue.

Pour tout β, presque tous (au sens de la mesure de Lebesgue ou, ce qui revient au même, de la mesure $\dot{\mu}_\beta$) x est dans $B(\beta)$ et $T(\beta)$. Ceci est une conséquence du fait qu'étant donné une suite croissante strictement vers l'infini $(u_n)_{n\geq 0}$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ la suite $(xu_n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un et que la suite $(y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^r)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}^n$ est équirépartie modulo un si et seulement si pour tout r-uplet $a_1, \ldots, a_r$ d'entiers non tous nuls la suite $(a_1 y_n^1 + \cdots + a_r y_n^r)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un (voir [K.N] ou [W]) ; une application du théorème ergodique montre que presque tout x de $[0, 1[$ admet un β-développement normal et on en déduit aisément que presque tout x de $\mathbb{R}$ est dans $N(\beta)$.

Nous souhaitons ici rassembler et confronter un certain nombre de résultats d'origines variées sur les ensembles $N(\beta), T(\beta)$ et $B(\beta)$ et déduire les théorèmes A, B et C des résultats déjà connus.

Dans la suite nous dirons que deux nombres θ et β sont équivalents ($\theta \sim \beta$) s'il existe p et $q \in \mathbb{N}$ tels que $\theta^p = \beta^q$; si ce n'est pas le cas nous dirons que β et θ ne sont pas équivalents ($\beta \not\approx \theta$).

II - $B(\beta)$

Les résultats suivants sont classiques :

Théorème 1. *Si $p > 1$ est un entier naturel alors :*

(1) (Maxfield, Niven et Zuckerman) *: pour tout $h \in \mathbb{N}, B(p^h) = B(p)$.*

(1 bis) (Cassel, Schmidt, Pearce et Keane, Feldman et Smorodinsky).

Soient p et q deux entiers naturels strictement supérieurs à 1 non équivalents. Alors :

$$B(p) \neq B(q)$$

et la dimension de Hausdorff de $B(p) \setminus B(q)$ est 1.

(2) (Van der Corput) *Pour tout $h \in \mathbb{N}$ et tout entier naturel $p > 1$*

$$\frac{1}{h} B(p) = B(p).$$

(3) *Pour tout $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ et p entier naturel > 1 :*

$$B(p) + \frac{r}{s} = B(p).$$

(3 bis) *Si $1 < p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$B(p) + \alpha = B(p) \Longleftrightarrow \alpha \text{ est un nombre déterministe.}$$

(Voir [Ra] pour la démonstration et la définition d'un nombre déterministe.)

(4) *Soit $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction de sélection (i.e. une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) vérifiant $\sup \frac{\tau(n)}{n} < \infty$).*

Soit $p > 1$ un entier naturel : les conditions suivantes sont équivalentes :

. *$x \in B(p) \Longrightarrow$ la suite $(xp^{\tau(n)})_{n \geq 0}$ est équirépartie modulo un.*

. . *τ est une fonction déterministe.*

Voir [K] pour la démonstration et la définition des fonctions déterministes.

La preuve que Maxfield donne de (1) est basée sur l'examen des chiffres du p-développement de x ; celle de Niven et Zuckerman consiste à estimer des moyennes de type “sommes de Fejer” avec une grande subtilité ; remarquons que l'application du théorème ergodique donne immédiatement les assertions (1), (2) et (3), ainsi que celle du théorème de Van der Corput sur $\frac{x}{h}$ (la preuve du théorème A qui figure ci-dessous indique la marche à suivre).

Les assertions (3 bis) et (4) se montrent en utilisant les résultats de Pinsker et Furstenberg-Kamae sur la disjonction des processus.

L'assertion (1 bis) a été montrée par Schmidt et Cassel, au moyen d'ensembles de Cantor, puis par Pearce et Keane ; le preuve de Pearce et Keane peut s'étendre un peu, par exemple au cas où $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q \in \mathbb{N}$. Feldman et Smorodinsky ont donné une preuve plus simple de ce résultat, basée sur l'équirépartition de la suite $n\frac{\ln p}{\ln q}$ lorsque $p \not\cong q$. La dimension de Hausdorff de $B(p) \setminus B(q)$ n'est pas toujours étudiée par les auteurs cités mais elle se déduit aisément de leurs démonstrations.

Brown, Moran et Pollington ([B.M.P]) ont redémontré (1 bis) et traité le problème pour des bases non entières, en utilisant des produits de Riesz et de mesures non invariantes. Ils obtiennent des résultats très généraux et significatifs.

Une question posée par Mendès France ([M.F2]) était la suivante : a-t-on $\theta \sim \beta \Longrightarrow B(\theta) = B(\beta)$? En particulier est-ce vrai si θ et β sont des nombres de Pisot ? La réponse est non :

Théorème 2. (Brown, Moran, Pollington, 1993, 1995, Bertrand, 1986)
(1) Si q est un entier supérieur à 1 alors

$$B(\beta) = \frac{1}{q} B(\beta)$$

si est seulement s'il existe un entier K tel que ou bien $\beta^K \in \mathbb{N}$, ou bien $\beta^K + \beta^{-K} \in \mathbb{N}$.

(2) $B(\beta^s) \subset B(\beta^r)$ pour $r \neq s$, si et seulement s'il existe un entier positif K tel que ou bien $\beta^K \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}(\beta^r) \subset \mathbb{Q}(\beta^s)$, ou bien $\beta^K + \beta^{-K} \in \mathbb{Z}$ et s divise r.

(3) Si $B(\lambda) = B(\theta)$, alors il existe $\beta > 1$ et des entiers r et s tels que $\xi = \beta^r$ et $\theta = \beta^s$ et β, r et s vérifient (2).

Enfin $B(\beta) = B(\theta)$ si et seulement si $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\theta)$, $\ln \beta / \ln \theta \in \mathbb{Q}$ et s'il existe un entier K tel que $\beta^K \in \mathbb{N}$ (par exemple $\sqrt{10}$ et $10\sqrt{10}$).

L'essentiel de ces démonstrations ([B.M.P] et [M.P]) utilise des produits de Riesz et des mesures non invariantes.

Remarque. (1) montre par exemple que $B(\sqrt{2})$ est inclus dans $B(2)$; mais on ne sait toujours pas si $\sqrt{2}$ est normal en base 2 (Mendès et Rauzy conjecturent l'un qu'il l'est, et l'autre qu'il ne l'est pas). Profitons en pour rappeler que bien que pour presque tout β la suite $(\beta^n)_{n \geq 0}$ soit équirépartie modulo un, on ne connait aucun exemple d'un tel β.

Définition. *Soit A l'ensemble des nombres réels $\beta > 1$ tels que*

ou bien il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\beta^K \in \mathbb{N}$

ou bien il existe K et $a \in \mathbb{N}$ tels que $\beta^K \pm \beta^{-K} = a$

Les nombres de la classe A sont les racines K^e des entiers naturels et les racines K^e des entiers quadratiques de norme ± 1, lesquels sont des nombres de Pisot ; les racines K^e d'un Pisot sont des Pisot tant que leur degré sur $\mathbb{Q}$ reste inchangé et cessent de l'être dès que ce degré augmente.

Le fait que si $\beta \in A$, alors $\frac{1}{q}B(\beta) = B(\beta)$ et $B(\beta) \subset B(\beta^q)$ vient du :

THÉORÈME 3. *([B.M5, Th. 4]).*

Soit β un nombre réel de la classe A ; si la suite $(\{x\beta^n\})_{n\geq 0}$ est répartie modulo un selon une mesure γ dont les coefficients de Fourier γ_n tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini, alors elle est équirépartie modulo un (c'est en particulier le cas si la mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue).

Ce résultat est encore vrai si γ est une mesure associée à la suite $\{x\beta^n\})_{n\geq 0}$ (c'est-à-dire une mesure adhérente, au sens de la convergence faible, à la suite de mesures $\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\delta_{\{x\beta^n\}}\right)_{N\geq 1}$, ce qui, par suite probablement d'une inattention de l'auteur, ne figure pas dans l'énoncé original : une telle mesure est la mesure de Lebesgue dès que ses coefficients de Fourier tendent vers 0 à l'infini. La preuve se fait avec des méthodes liées au théorème de Van der Corput.

Des théorèmes 2 et 3 nous déduisons le :

THÉORÈME A. *Soit $\beta > 1$ un nombre réel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) β appartient à la classe A.

(2) L'unique mesure associée à une suite $(\{x\beta^n\})_{n\geq 0}$ dont les coefficients de Fourier tendent vers 0 à l'infini est la mesure de Lebesgue.

(3) L'unique mesure associée à une suite $(\{x\beta^n\})_{n\geq 0}$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue est la mesure de Lebesgue.

Les nombres de la classe A possèdent donc une analyse harmonique tout à fait particulière. La mesure de Lebesgue se comporte comme une mesure ergodique invariante, bien qu'elle ne soit pas la mesure invariante d'une transformation liée à β. Ceci a sans doute un rapport avec les remarques de Host sur les mesures conservatives ([H]).

S'aventurant dans une direction différente, en liaison avec les travaux de R. Lyons et D. Rudolph sur les mesures simultanément invariantes par

$T : x \to \{px\}$ et $T_q : x \to \{qx\}$, B. Host ([H]) fournit une preuve d'un résultat de Kamae :

THÉORÈME 4. *Soit $(f_K)_{K\geq 0}$ la suite de Fibonacci $f_0 = f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geq 2$.*

Soit $p > 1, \mu$ une mesure de probabilité invariante, ergodique et d'entropie strictement positive pour $T : x \to px$.

Alors pour μ-presque tout x la suite $(f_K x)_{K\geq 0}$ est équirépartie modulo un.

En reprenant la preuve de B. Host et en utilisant le lemme suivant :

LEMME.
(1) Soit θ un nombre de Pisot de polynôme minimal $x^r = a_1 x^{r-1} - \cdots - a_r$, et soit $\alpha = c_1 + c_2\theta + \cdots c_r\theta^{r-1}$ un élémént non nul de $\mathbb{Z}[\theta]$; alors la trace t_n de $\alpha\theta^n$ vérifie la relation de récurrence $t_n = a_1 t_{n-1} + \cdots + a_r t_{n-r}$, appartient à $\mathbb{Z}$ et $\lim(\alpha\theta^n - t_n) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi $(x\theta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un si et seulement si $(xt_n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un.

(2) x appartient à $T(\theta)$ si et seulement si pour toute suite non nulle $(f_K)_{K\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$f_K = a_1 f_{K-1} + \cdots + a_r f_{K-r}$$

la suite $(xf_K)_{K\geq 0}$ est équirépartie modulo un.

(La trace de $\alpha\theta^n$ désigne la somme des conjugués sur $\mathbb{Q}$ de $\alpha\theta^n$).

On peut montrer le :

THÉORÈME B. *Soit $\beta > 1$ vérifiant $\beta^2 = a\beta + b$ où $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$ et $a > |b|$ (ce qui a lieu si et seulement si β est un nombre de Pisot quadratique).*

Soit p un nombre entier premier avec b, μ une mesure de probabilité invariante, d'entropie positive pour $T : x \to px$.

Alors μ-presque tout x est dans $B(\beta)$ et $T(\beta)$ et μ ne peut être invariante par rapport à la transformation : $x \to [\beta x]$.

III - $N(\beta)$ et $T(\beta)$

Les rapports entre $N(\beta), T(\beta)$ et $B(\beta)$ sont assez flous ; bien sûr $T(\beta) \subset B(\beta)$; nous verrons qu'en général l'inclusion inverse est fausse. Pour presque tout β l'inclusion $T(\beta) \subset N(\beta)$ est fausse ; en effet pour presque tout $\beta > 1$ la suite $(\beta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un, et si c_0 , $c_1, \ldots, c_r$ sont $r+1$ entiers relatifs non tous nuls alors pour presque tout $\beta > 1$ (au sens de la mesure de Lebesgue la suite $(c_0\beta^n + c_1\beta^{n+1} + \cdots + c_r\beta^{n+r})_{n>0}$ est équirépartie modulo et 1 (donc aussi $1/\beta$) est dans $T(\beta)$ pour presque tout β, mais $1/\beta$ n'est jamais normal au sens des chiffres en base β ; il vient que pour presque tout β

$$B(\beta) \not\subset N(\beta)$$

$$T(\beta) \not\subset N(\beta)$$

La transformation S_β étant ergodique on montre que :

THÉORÈME 5. *Si β est algébrique, pour $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$ et $p \in \mathbb{N}$*

$$\alpha T(\beta) = T(\beta) \text{ et } T(\beta) \subset T(\beta^p)$$

De plus si les degrés de β et β^p sont les mêmes

$$T(\beta^p) = T(\beta).$$

Lorsque β est transcendant tout ce que l'on peut dire est que pour $p \in \mathbb{N}$: $T(\beta) \subset T(\beta^p)$ ce qui est vrai aussi si β est algébrique avec $\deg \beta \neq \deg \beta^p$.

Dans le cas où β est un nombre de Pisot :

THÉORÈME 6. *([B.M1]) et ([B.M6])*

Soit β un nombre de Pisot. Alors

(1) $N(\beta) = T(\beta) \subset B(\beta)$.

(2) Si $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}(\beta), \alpha N(\beta) = N(\beta)$.

(3) $N(\beta) + \alpha = N(\beta)$ si et seulement si α est déterministe en base β.

(4) Soit τ une suite strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- *τ est déterministe*
- *Si $x \in T(\beta)$ alors la suite $(x\beta^{\tau(n)})_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un.*

(5) Si $p \in \mathbb{N}$ alors $N(\beta^p) = N(\beta)$ mais si θ et β sont deux nombres de Pisot non équivalent alors $N(\theta) \neq N(\beta)$ (la dimension de Hausdorff de

$N(\theta) \setminus N(\beta)$ est égale à 1) ; et de même $T(\beta) \neq T(\theta)$ (et $B(\beta) \not\subset B(\theta)$ d'après le théorème 2).

(6) β étant toujours un nombre de Pisot et $\theta > 1$ étant un nombre entier algébrique non équivalent à β ou transcendant : $T(\theta) \not\subset T(\beta)$ (et la dimension de Hausdorff de $T(\theta) \setminus T(\beta)$ vaut 1).

Kamae à montré que $B(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \setminus T(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ est non vide.

Les théorèmes 2 et 4 permettent de prouver le :

Théorème C.

(1) Soit β un nombre transcendant ou entier algébrique n'appartenant pas à la classe A. Alors

$$B(\beta) \not\subset T(\beta).$$

Lorsque β est entier algébrique il existe une mesure ν sur $[0,1[^{\deg\beta}$, invariante par la transformation du tore T_β associée à la matrice compagnon de β, distincte de la mesure du Lebesgue, et dont la distribution marginale sur $[0,1[$ est la mesure de Lebesgue.

(2) Lorsque β est un nombre de Pisot quadratique (c'est-à-dire appartenant à la classe A), alors pour tout entier $p > 1$

$$T(\beta) = T(\beta^p) \neq B(\beta^p).$$

Pour ce même entier p, il existe une mesure S_{β^p}-invariante sur $[0,1[^2$ distincte de la mesure de Lebesgue dont la distribution marginale sur $[0,1[$ est la mesure de Lebesgue ; l'une de ces mesures au moins est ergodique par rapport à S_{β^p} est étrangère à la mesure de Lebesgue.

Si β est un Pisot quadratique dont une racine est encore un Pisot, alors $B(\beta) \neq T(\beta)$; mais nous ne savons pas conclure lorsque aucune des racines K^{eme} de β n'est un Pisot (c'est le cas par exemple de $(1+\sqrt{5})/2$). De même si β est la racine K^{eme} d'un entier naturel nous ne savons pas si $T(\beta) = B(\beta)$ ou non.

Remarquons que l'indépendance des chiffres dans x induit pour presque tout β l'équirépartition de la suite $(x\beta^n)_{n\geq 0}$ alors que si β est un nombre de Pisot elle l'empêche. Bien sûr, si $\beta \notin \mathbb{N}$ la mesure de Parry n'est pas "à chiffres indépendants" et si le β-développement de x est "à chiffres indépendants" x n'est pas dans $N(\beta)$.

THÉORÈME 7. (Mendès France)

(1) Soit $\beta > 1$ un nombre réel tel que la suite $(x\beta^n)_{n\geq 0}$ soit dense modulo un (ceci est vrai pour presque tout β).

Soit $K = \{x \in [0,1], x = \sum \frac{\varepsilon_i}{\beta^i}, \varepsilon_i = 0$ ou $1\}$ muni de la mesure ν qui associe au cylindre $c_{a_1\cdots a_K} = \{x; x = \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots\ ;\ \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_K = a_1 \cdots a_K\}$ la mesure $\frac{1}{2^K}$; alors ν-p.p. la suite $(x\beta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un.

(2) Soit $\beta > 2$ un nombre de Pisot et K et ν comme au 1. Alors ν-p.p. $(x\beta^n)_{n\geq 0}$ n'est pas équirépartie modulo un.

IV - Démonstrations des théorèmes A, B, C.

Preuve du théorème A.

Soit β un nombre réel > 1, soit $x \in B(\beta)$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{x}{q}\beta^n = \frac{1}{q}(\{x\beta^n\} + [x\beta^n]) = \frac{\{x\beta^n\}}{q} + \frac{c_n}{q} + d_n$$

$$\text{où } [x\beta^n] = d_n q + c_n \text{ avec } c_n < q.$$

Modulo un :

$$\frac{x}{q}\beta^n = \frac{\{x\beta^n\}}{q} + \frac{c_n}{q}.$$

Soit $[a,b[$ un intervalle de $[0,1[$

$$\{\frac{x\beta^n}{q}\} \in [a,b[\Longleftrightarrow \{x\beta^n\} \in [qa, qb[\text{ et } c_n = 0 \text{ ou bien}$$

$$\{x\beta^n\} \in [qa + \frac{1}{q}, qb + \frac{1}{q}[\text{ et } c_n = q-1$$

$$\vdots$$

ou encore

$$\{x\beta^n\} \in [qa + \frac{q-1}{q}, qb + \frac{q-1}{q}[\text{ et } c_n = 1.$$

La fréquence avec laquelle $(\frac{x}{q}\beta^n)_{n\geq 0}$ tombe dans $[a,b[$ modulo un est majorée par la fréquence avec laquelle $x\beta^n$ tombe dans

$$[qa, qb[\cup [qa + \frac{1}{q}, qb + \frac{1}{q}[\cup \cdots \cup\ [qa + \frac{q-1}{q}, qb + \frac{q-1}{q}[$$

c'est-à-dire par $q(b-a)$; $(\frac{x}{q}\beta^n)_{n\geq 0}$ est donc répartie selon une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si donc $\frac{1}{q}B(\beta) \not\subset B(\beta)$, c'est qu'il existe $x \in B(\beta)$ et $\frac{x}{q} \notin B(\beta)$. Ainsi $(\{\frac{x}{q}\beta^n\})_{n\geq 0}$ admet une mesure de répartition absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue d'après ce qui précède, mais pas égale à la mesure de Lebesgue. Or d'après le théorème 2 si $\beta \notin A, \frac{1}{q}B(\beta) \not\subset B(\beta)$: non (1) $\Longrightarrow$ non (3) et (3) $\Longrightarrow$ (1).

D'après le théorème 3, (1) $\Longrightarrow$ (2) ; or (3) d'où les équivalences.

Preuve du théorème B.

Indiquons d'abord pourquoi le lemme est vrai. Les conjugués de β, à savoir $\beta_2,\ldots,\beta_r$ sont en modules inférieurs à 1 et si $\alpha = c_1 + c_2\beta + \cdots + c_2\beta_{r-1}$ alors $\alpha\beta^n$ a pour conjugués les $\alpha_i\beta^{n_i} = (c_1+c_2\beta_i+\cdots+c_r\beta_i^{r-1})\beta_i^n$ où $i = 2,\ldots r,$; comme $\beta^r = a_1\beta^{r-1} + \cdots + a_r, t_n = \alpha\beta^n + \alpha_2\beta_2^n + \cdots + \alpha_r\beta_r^n$ est dans $\mathbb{Z}$ et vérifie $t_n = a_1t_{n-1} + \cdots + a_rt_{n-r}$; de plus $\alpha\beta^n - t_n = \alpha_2\beta_2^n + \cdots + \alpha_r\beta_r^n$ est une suite réelle de limite 0 lorsque n tend vers l'infini : $(\alpha x\beta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un si et seulement si $(xt_n)_{n\geq 0}$ l'est.

Par ailleurs toute suite sur $\mathbb{Z}$ vérifiant $t_n = a_1t_{n-1} + \cdots + a_rt_{n-r}$ s'écrit $\alpha\beta^n + \alpha_2\beta_2^n + \cdots + \alpha_r\beta_r^n$ où $\alpha \in \mathbb{Z}[\beta]$ et $\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ sont conjugués de α ; d'autre part $x \in T(\beta)$ si et seulement si pour tout α non nul $\in \mathbb{Z}[\beta], (\alpha x\beta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un ; ceci montre le (2).

Notons que si $\beta > 1$ vérifie $\beta^2 = a\beta + b$ où $a \in \mathbb{N}$; $b \in \mathbb{Z}$ avec $|b| < a$, alors β est un nombre de Pisot.

La preuve du théorème B se fait comme celle du théorème 3 de ([H]), preuve basée sur une remarque concernant la suite $(f_K)_{K\geq 0}$: pour tout entier naturel non nul a, soient T_n la période de $(af_K)_{K\geq 0}$ modulo p^n, S_n le plus petit entier K tel que $f_K = 0 \mod p^n$, et

$$\Delta_{N,n} = \sum_{j=0}^{p^n-1}(\text{ Card }\{K\ ;\ 0\leq K < N,\ af_K = j \mod p^n\})^2.$$

Alors il existe des constantes C, C_1 et C_2 telles que si n est assez grand

(1) $T_n = Cp^n$

(2) $S_n = C_1p^n$

(3) $\Delta_{T_n,n} \leq C_2 n^h T_n$ où h désigne le nombre de facteurs premiers de p.

Montrons que si $(t_n)_{n\geq 0}$ est une suite sur $\mathbb{Z}$ vérifiant la récurrence $t_K = at_{K-1} + bt_{K-2}$ avec $b \cap p = 1$ (1) et (3) sont vrais si l'on remplace af_K par t_K.

$$\text{Soit } \mathcal{M} \text{ la matrice } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \; ; \; \mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} b & a \\ ba & a^2+b \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \mathcal{M}^K = \begin{pmatrix} bg_{K-1} & g_K \\ bg_K & g_{K+1} \end{pmatrix} \text{ où}$$

$g_0 = 1, g_1 = a$ et si $n \geq 2 g_n = ag_{n-1} + bg_{n-2}$. Ainsi $\begin{pmatrix} t_K \\ t_{K+1} \end{pmatrix} = M^K \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ où $u = t_0$ et $bt_0 + av = t$, (v n'est pas forcément entier mais ce n'est pas gênant).

Considérons un entier p premier avec b (M est donc inversible modulo p) possédant h facteurs premiers.

Pour pouvoir appliquer la démonstration de Host à la suite $(t_K)_{K\geq 0}$, il faut montrer que, $T_1(q)$ désignant la période modulo q de la suite $(t_K)_{K\geq 0}$, $\Delta(q)$ désignant $\sum_{j=0}^{q-1}(\text{Card}\,\{K \; ; \; 0 \leq K < T_1(q) \; ; \; t_K = j \mod q\})^2$ pour n assez grand $T_1(p^n) = C_3(p^n) = C_3 p^n$ pour une certaine constante C_3 et

$$\Delta_{T(p^n),n} \leq C_4 n^h p^n \text{ où } C_4 \text{ est une autre constante.}$$

Les périodes des suites non nulles solutions de $t_K = at_{K-1} + bt_{K-2}$ sont toutes les mêmes (sauf si tous les termes sont multiples de p qu'on met en facteur autant qu'on peut, quitte à modifier la constante C_3) car les suites $(t_K)_{K\geq 0}$ et $(t_{K+1})_{K\geq 0}$ sont deux éléments indépendants du $\mathbb{Z}$ module de dimension 2 formé par ces suites. Il suffit pour montrer que $T_1(p^n) = C_3 p^n$ de montrer que si $T_2(q)$ désigne la période de la suite de matrices $(M^K)_{K\geq 0}$ modulo q, $T_2(p^n) = C_5 p^n$ pour n assez grand, ce qui se fait aisement comme pour la suite $\begin{pmatrix} f_{K-1} & f_K \\ f_K & f_K \end{pmatrix}$ des puissances $K^{\text{èmes}}$ de la matrice de Fibonacci $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} bg_{K-1} & g_K \\ bg_K & g_{K+1} \end{pmatrix}$ à la place.

Définissons de même $S_2(q)$ comme le plus petit entier tel que M^K soit diagonale modulo q (i.e. $g_K \equiv 0 \mod q$) et on vérifie facilement comme pour $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^K$:

$S_2(p^n) = C_5 p^N$ (la présence de b devant la première colonne de M^K ne change rien). Bien sûr $S_2(q)$ divise $T_2(q)$.

Par ailleurs $\Delta_{N,n}$ est, comme dans la preuve de Host, égal à

$$\sum_{d=0}^{T_1(p^n)-1} \text{card } F_d \text{ où } F_d = \{j \;;\; 0 \leq j < T_1(p^n) \;;\; f_j = f_{j+d} \mod p^n\}.$$

L'inégalité $\Delta(p^n) < C_4 n^h p^n$ sera vraie, comme le montre Host, s'il est vrai qu'étant donné $d < T(p^n)$

j et $j + K \in F \Rightarrow K$ est un multiple de $S_2(\prod_{i \in I} p_i^{na_i - r_i})$ où $p = \prod_{i \in I} p_i^{a_i}$;

r'_i est le plus grand entier tel que $T_2(p_i^{r'_i})$ divise d ;

$r_i = \inf(r'_i, na_i)$

et $S_2(q)$ est le plus petit entier tel que $M^{S_2(q)}$ soit diagonale modulo q.

Or si $t_{i+d} = t_i$ et $t_{i+K+d} = t_{i+K}$ alors la suite $s_K = t_{K+d} - t_K$ vérifie la récurrence et $s_i = s_{i+K} = 0$.

Ainsi $(s_K)_{K \geq 0} = \ldots 0, u, aua^2u{+}b \ldots 0u \cdots = u(\ldots 0, 1, a, a^2{+}b \ldots, 0, 1 \ldots)$ et est de la forme ug_K à une renumérotation près. Ainsi $s_h = ug_h = 0 \mod p^n$ et M^h est diagonale (il faut modifier légèrement le raisonnement si p divise u).

Preuve du théorème C.

Lorsque β est algébrique, $\frac{1}{q}T(\beta) = T(\beta)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$ (ceci se voit très simplement car comme précédemment si la suite $(T_K^n(X))_{n \geq 0}$ est répartie selon la mesure de Lebesgue du tore $[0, 1[^{\deg \beta}$, la suite $\frac{1}{q}(T_\beta^n(X))_{n \geq 0}$ n'admet que des mesures de répartitions absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, donc égales à la mesure de Lebesgue puisque celle-ci est ergodique (aucune racine de l'unité n'est valeur propre). Donc si

$$\begin{pmatrix} x\beta^n \\ x\beta^{n+1} \\ \vdots \\ x\beta^{n+\deg \beta - 1} \end{pmatrix}_{n \geq 1} \text{ est équirépartie modulo un, } \begin{pmatrix} \dfrac{x}{q}\beta^n \\ \vdots \\ \dfrac{x}{q}\beta^{n+\deg \beta - 1} \end{pmatrix}_{n \geq 1} \text{ l'est}$$

aussi.

L'assertion : $T(\beta) = B(\beta)$ entraîne donc $\dfrac{1}{q}B(\beta) = B(\beta)$.

La démonstration qui suit s'applique aux nombres transcendants : si $B(\beta) \subset T(\beta)$ alors, comme $T(\beta) \subset T(\beta^p)$ et $T(\beta^p) \subset B(\beta^p)$, on a $B(\beta) \subset B(\beta^p)$ ce qui est impossible d'après le théorème 2, 2).

Or d'après le théorème 2, si β est algébrique et n'appartient pas à A, $\frac{1}{q}B(\beta) \not\subset B(\beta)$. D'où la première assertion : $B(\beta) \neq T(\beta)$.

Soit $x \in B(\beta) \setminus T(\beta)$: $\begin{pmatrix} x\beta^n \\ \vdots \\ x\beta^{n+\deg\beta-1} \end{pmatrix}_{n\geq 0}$ admet au moins une mesure de répartition ν distincte de la mesure de Lebesgue, sinon x serait dans $T(\beta)$; cependant la distribution marginale de ν est la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$.

(2) Selon le théorème 2, $\forall p \neq 1, B(\beta^p) \not\subset T(\beta^p)$ sinon β étant un Pisot, $T(\beta^p) = T(\beta) \subset B(\beta)$ impliquerait $B(\beta) \not\subset B(\beta)$. Ainsi $B(\beta^p) \not\subset T(\beta^p)$ et il existe une mesure ν S_{β^K}-invariante distincte de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^2$ avec une distribution marginale égale à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

Ces mesures ν forment un ensemble convexe ; soit ν_0 un point extrême de ce convexe ; si $\nu_0 = t\nu_1 + (1-t)\nu_2$ où $t \in [0,1[$ et ν_1 et ν_2 sont des mesures T_{β^K}-invariantes ; alors ν_1 et ν_2 ont des distributions marginales sur $[0,1]$ absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Or β^K est encore dans la classe A et donc ν_1 et ν_2 ont pour distribution marginale la mesure de Lebesgue, soi-même. Par contre l'une au moins est distincte de la mesure de Lebesgue et vérifie les mêmes hypothèses que ν qui n'était donc pas si extrême que cela dans l'ensemble des mesures vérifiant ces hypothèses. Les points extrémaux de cet ensemble sont donc des mesures ergodiques, qui sont donc étrangères à la mesure de Lebesgue.

Ce raisonnement n'est pas reproductible si $\beta \notin A$ puisqu'alors il existe des mesures de distribution marginale absolument continues par rapport à Lebesgue mais pas égale à la mesure de Lebesgue.

BIBLIOGRAPHIE

[B.M1] Bertrand-Mathis A., *Développements en base de Pisot et répartition modulo un de la suite* $(\chi\theta^n)_{n\geq 0}$*, langages codés et* θ*-shift*, Bull. Soc. Math. France **114** (1986), 271–323.

[B.M2] Bertrand-Mathis A., *Le* θ*-shift sans peine*, Preprint.

[B.M3] Bertrand-Mathis A., *Répartition modulo un et développements en base θ*, C.R.A.S. **289** (1979), 1–4.

[B.M4] Bertrand-Mathis A., *Nombres normaux dans diverses bases*, Ann. Inst. Fourier **45** (1995), 1205–1222.

[B.M5] Bertrand-Mathis A., *Ensembles intersectifs et récurrence de Poincaré*, Israël, J. of Math **55 n° 2** (1986), 1846–198.

[B.M6] Bertrand-Mathis A., *Applications de la notion d'entropie au développement d'un nombre réel dans une base de Pisot*, Ann. Inst. Fourier de Grenoble **35, 3** (1985), 1–32.

[B.M.P1] Brown G., Moran W. & Pollington A., *Normality to non-integer base*, Acad. Sci. Paris **136 série I** (1993), 1241–1244.

[B.M.P.2] Brown G., Moran W. & Pollington A., *Normality with respect to a basis*, A paraître à Duke Math Journal.

[C] Cassels J.W.S., *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge Tracts In Math. N 45 Cambridge Univ. Press, London (1957).

[F.S] Feldman J. & Smorodinsky M., *Normal numbers from independant process*, Ergod. Th. and Dynam. Syst. **12** (1992), 707–712.

[H] Host B., *Nombres normaux, entropie, translations*, Israel J. of Math. **91 N° 1-3** (1995), 4. 189–428.

[HO] Hofbauer F., *Maximal measures for simple piecewise monotonic transformations*, Z. Wahrschein. Verw. Gebiete **52 n° 3** (1980), 189–198.

[I.S] Ito & Shiokawa, *A construction of β-normal sequences*, J. Math. Soc. japan **27 I** (1973).

[K] Kamae T., *Subsequences of normal sequences*, Israel J. of Math. **16** (1973), 121–149.

[K.N] Kuipers L. & Niederreiter H., *Uniform distribution of sequences*, Wiley, New-York (1974).

[M] Maxfield J., *Normal K-uples*, Pacific J. Math. **3** (1953), 189–196.

[Me] Meyer Y., *Nombres algébriques et analyse harmonique*, Ann. Sci. Ec. norm. Supérieure, 4ème série **3** (1970), 75–110.

[M.F1] Mendès France M., *Thèse*, Israël. Journal d'analyse Math **XX** (1968), 1–56.

[M.F2] Mendès France M., *Les ensembles de Bésineau*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des Nombres, Paris **7** (1975).

[M.P.1] Moran W. & Pollington A., *Normality for almost all bases*, J. Number Theory 54 **2** (1995), 180–189.

[M.P.2] Moran W. & Pollington A., *The discrimination theorem for normality to non integer bases*, Preprint.

[P] Parry W., *On the β-expansions of real numbers*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar **11** (1960), 401–416.

[Po] Pollington A., *The Hausdorff dimension of a set of normal numbers*, Pacific J. Maths **95** (1981), 193–204.

[P.K.] Pearce C.E.M. & Keane M., *Normal numbers*, Journal of Australian Math. Soc. (1988).

[Ra] Rauzy G., *Nombres normaux et processus déterministes*, Acta Arith. **29** (1976), 211–225.

[R] Renyi A., *Representations for real numbers*, Acta. Math. Sci. Hungar. **8** (1957), 447–495.

[S1] Schmidt W., *On normal numbers*, Pacific Journal of Mathematics **10** (1960), 661–672.

[S2] Schmidt W., *Uber die Normalität von Zahlen zu Verschiedenen basen*, Acta. Arithm. **7** (1962), 299–301.

[Sm] Smorodinsky M., *β-shifts are Bernoulli shifts*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar **24** (1973), 273–278.

[T] Takahashi, *Shift with free orbit basis and realisation of one dimensional map*, Osaka J. Math. **20** (1983), 599–629.

[W] Weyl H., *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. eins*, Math. Annalen **77** (1916), 313–352.

Anne BERTRAND-MATHIS
Université de Poitiers
Département de Mathématiques
40, Avenue du Recteur Pineau
F–86022 POITIERS