Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **8** *(1996), 443–447*

Propriétés arithmétiques des solutions de certaines équations fonctionnelles de Poincaré

par Daniel DUVERNEY

Résumé. On étudie certaines propriétés arithmétiques de fonctions analytique f au voisinage de 0, $\sum_0^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n \in \mathbb{Q}$ et f satisfaisant une équation fonctionnelle de Poincaré.

Abstract. We study arithmetic properties of analytic functions at zero $f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ with $a_n \in \mathbb{Q}$ and satisfying Poincaré type functional equations.

1. Introduction

Soit $q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, soit $d \in \mathbb{N}$, et soit :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i x^i, \qquad \alpha_0 \neq 0,$$

un polynôme à coefficients rationnels.

Le but de cet article est d'étudier les propriétés arithmétiques des fonctions f analytiques au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

avec $a_n \in \mathbb{Q}$, et vérifiant une équation fonctionnelle de Poincaré ([11], [13]) du type particulier suivant :

$$x^d f(x) = P(x) f(qx) + Q(x), \tag{1}$$

où Q est un polynôme à coefficients rationnels *de degré inférieur ou égal à* d.

Manuscrit reçu le 17 octobre 1995

L'exemple le plus simple de fonction f est la *fonction de Tschakaloff* [12] :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{-\frac{n(n-1)}{2}} x^n, \tag{2}$$

qui vérifie l'équation :

$$qx\ f(x) = f(qx) - 1. \tag{3}$$

Un calcul facile à partir de (1) montre que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est parfaitement déterminée par la donnée de $a_1, a_2, \ldots, a_d \in \mathbb{Q}$, et par la relation de récurrence suivante :

(4)
$$\alpha_0\ a_{n+d}\ q^{n+d} + \alpha_1\ a_{n+d-1}\ q^{n+d-1} + \cdots + \alpha_{d-1}\ a_{n+1}\ q^{n+1} + (\alpha_d\ q^n - 1)a_n = 0.$$

Nous observons que, si f vérifie (1) et n'est pas un polynôme, alors f n'est pas une fraction rationnelle, car (1) impliquerait dans ce cas l'existence d'une infinité de pôles. Le point essentiel motivant l'étude de fonctions vérifiant (1) est le théorème suivant, démontré au paragraphe 2.

THÉORÈME 1. *Si f vérifie une relation du type (1), et si $f(r)$ est rationnel, avec $r \in \mathbb{Q}^*$, alors $f(rq^{-n})$ est rationnel pour tout entier n, et il existe $\theta \in \mathbb{N}$ tel que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \theta^{n+1}\ f(rq^{-n}) \in \mathbb{Z}.$$

Cette propriété des fonctions vérifiant (1) nous permettra de démontrer (paragraphe 3) le résultat suivant :

THÉORÈME 2. *Soit f vérifiant (1), et soit $r \in \mathbb{Q}^*$, tel que $f(r)$ existe. Si f n'est pas un polynôme, alors $f(r) \notin \mathbb{Q}$.*

Nous obtenons un premier corollaire de ce théorème en prenant $d = 1$, $\alpha_0 = q^{-1}$, $\alpha_1 = \alpha \notin \mathbb{Q}$, $a_0 = 1$, et en utilisant (4) à partir de $n = 0$:

COROLLAIRE 1. *Soit* $F(\alpha; q; x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-\alpha)(1-\alpha q)\ldots(1-\alpha q^{n-1})}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}} x^n$, *avec*
$\alpha \in \mathbb{Q},\ q \in \mathbb{Z},\ |q| \geq 2$. *Alors* $F(\alpha; q; r) \notin \mathbb{Q}$ *si* $r \in \mathbb{Q}^*$, $|r| < \dfrac{1}{|\alpha|}$.

Dans le cas où $\alpha = 0$, on obtient l'irrationalité de valeurs de la fonction de Tschakaloff, déjà largement étudiée ([4], [5], [6], [7], [12]).

Dans le cas où $\alpha \neq 0$, l'irrationalité de $F(\alpha; q; r)$ pour $r \in \mathbb{Q}^*$ a été démontrée par T. Matala-Aho ([10], chapitre VI).

La démonstration donnée ici ne permet pas d'obtenir de mesures d'irrationalité, mais elle est particulièrement simple.

En prenant $d = 2, \alpha_0 = q^{-2}, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha \in \mathbb{Q}, a_0 = a, a_1 = b, (a, b) \in \mathbb{Q}^2$, un calcul sans difficulté à partir de (4) montre que :

$$f(x) = a\ F(\alpha; q^2; x^2) + bx\ F(\alpha q; q^2; \frac{x^2}{q}). \tag{5}$$

Donc :

Corollaire 2. *Avec les notations du corollaire 1, pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$ vérifiant $|r^2| < 1/|\alpha|$, les nombres 1, $F(\alpha; q^2; r^2)$ et $F(\alpha q; q^2; \frac{r^2}{q})$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

2. Démonstration du théorème 1.

Posons $r = a/b$, avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, et $f(r) = \alpha/\beta$, avec $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $\delta \in \mathbb{N}$, tel que $\delta P \in \mathbb{Z}[x]$ et $\delta Q \in \mathbb{Z}[x]$. Nous démontrons le théorème 1 par récurrence sur n, avec $\theta = a^d \beta \delta$.

Il est clair que le résultat est vérifié pour $n = 0$. Si nous supposons que $f(rq^{-n}) = A_n \theta^{-n-1}$, avec $A_n \in \mathbb{Z}$, nous obtenons en remplaçant x par rq^{-n-1} dans (1) :

$$f(rq^{-n-1}) = \frac{b^d}{a^d} q^{d(n+1)} \left[P\left(\frac{a}{b}\ q^{-n-1}\right) \frac{A_n}{\theta^{n+1}} + Q\left(\frac{a}{b}\ q^{-n-1}\right)\right].$$

Puisque $\deg P \leq d$ et $\deg Q \leq d$, les seuls dénominateurs subsistant dans $f(rq^{-n-1})$ après simplification sont θ^{n+1}, a^d, et les dénominateurs des coefficients de P et Q. On a donc $f(rq^{-n-1}) = A_{n+1}\theta^{-n-2}$, avec $A_{n+1} \in \mathbb{Z}$, et le théorème 1 est démontré.

3. Démonstration du théorème 2.

Soit ρ un entier naturel fixé, dont nous choisirons la valeur plus loin. Il existe alors deux polynômes $H(x)$ et $L(x)$, à coefficients entiers, non nuls, de degrés respectifs inférieurs ou égaux à 2ρ, et vérifiant :

$$H(x)f(x) + L(x) = x^{3\rho} R(x), \tag{6}$$

où$R(x)$ est analytique au voisinage de 0 ; en effet, (6) équivaut à un système homogène de 3ρ équations à $4\rho + 2$ inconnues (les coefficients de $H(x)$ et $L(x)$), et à coefficients rationnels.

Puisque $f(x)$ n'est pas une fraction rationnelle, on peut écrire :

$$H(x)\, f(x) + L(x) = x^{\sigma}\, T(x), \tag{7}$$

avec $\sigma \geq 3\rho$ et $T(0) \neq 0$.

Donc, pour tout entier naturel n et tout rationnel non nul $r = a/b$, on a :

$$H(rq^{-n}) f(rq^{-n}) + L(rq^{-n}) = (rq^{-n})^{\sigma}\, T(rq^{-n}). \tag{8}$$

Supposons que $f(r)$ est rationnel. En vertu du lemme, il existe un entier θ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, le nombre

$$b^{2\rho} q^{2\rho n} \theta^{n+1} \left[H(rq^{-n}) f(rq^{-n}) + L(rq^{-n})\right] = \theta b^{2\rho} r^{\sigma} (\theta q^{2\rho-\sigma})^n\, T(rq^{-n})$$

est *entier*.

Choisissons ρ de telle sorte que $|\theta q^{-\rho}| < 1$. Alors $\left|\theta q^{2\rho-\sigma}\right| < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (\theta q^{2\rho-\sigma})^n = 0$. Il en résulte que, pour n assez grand, on a $T(rq^{-n}) = 0$.

Ceci contredit le fait que $T(0) \neq 0$, et démontre le théorème.

4. Remarque

La méthode utilisée est une variante de la méthode de transcendance de Mahler [9] (pour une introduction à cette méthode, voir [8] ; pour des résultats récents, [1], [2]). La construction de la fonction auxiliaire $x^{3\rho} R(x)$ s'effectue de manière *non explicite* et on se contente de *l'existence* des polynômes $H(x)$ et $L(x)$ sans avoir besoin de majorer leurs coefficients (c'est à dire sans utiliser de *lemme de Siegel* [3]). *Le lemme de zéros* utilisé est très simple, car on connait un équivalent du reste $\theta b^{2\rho} r^{\sigma} (\theta q^{2\rho-\sigma})^n T(rq^{-n})$ lorsque n tend vers l'infini ; ces deux points sont caractéristiques de la méthode de Mahler. Dans le cas qui nous intéresse, cette méthode ne permet de démontrer que des résultats d'irrationalité. De plus, elle ne permet pas d'obtenir des mesures d'irrationalité pour $f(r)$, car le reste est en A^{-n}, et le dénominateur de l'approximation en B^{n^2}.

Bibliographie

[1] M. Amou, *An improvement of a transcendence measure of Galochkin and Mahler's S-Numbers*, J. Austral. Math. Soc. (ser. A) **52** (1992), 130-140.

[2] P. G. Becker, *Transcendence of the values of functions satisfying generalized Mahler type functional equations*, J. Reine Angew. Math. **440** (1993), 111-128.

[3] D. Bertrand et alii, *Les nombres transcendants*, Mémoire n° 13 de la S.M.F. (Nouvelle série) (1984).

[4] P. Borwein, *Padé Approximants for the q-elementary functions*, Constr. Approx. **4** (1988), 391-402.

[5] P. Bundschuh, *Verschärfung eines arithmetischen Satzes von Tschakaloff*, Port. Math. **33** (1974), 1-47.

[6] P. Bundschuh and M. Waldschmidt, *Irrationality results for Theta functions by Gel'fond-Schneider's method*, Acta Arith. **53** (1989), 289- 307.

[7] D. Duverney, *Sommes de deux carrés et irrationalité de valeurs de fonctions thêta*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I (1995), 1041-1044.

[8] J.H. Loxton and A.J. von der Poorten, *Transcendence and algebraic independence by a method of Mahler, in Transcendence Theory : Advances and Applications*, Academic Press (1977), 211-226.

[9] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Math. Ann. **101** (1929), 342-366.

[10] T. Matala-Aho, *Remarks on the arithmetic properties of certain hypergeometric series of Gauss and Heine*, Acta Universitatis Oalensis, Series A **219** (1991).

[11] H. Poincaré, *Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes*, Journal de Math. (1890).

[12] L. Tschakaloff, *Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe* $\sum_{x=0}^{\infty} x^{\nu} a^{-\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}$, Math. Ann. **80** (1921), 62-74.

[13] G. Valiron, *Fonctions analytiques*, P.U.F. (1954).

[14] R. Wallisser, *Über die arithmetische Natur der Werte der Lösungen einer Funktionalgleichung von H. Poincaré*, Acta Arith. **25** (1973), 81-92.

Daniel DUVERNEY
24 Place de Concert
F-59800 LILLE