*Journal de Théorie des Nombres*
*de Bordeaux* **9** *(1997), 229–245*

# La conjecture des quatre exponentielles et les conjectures de D. Bertrand sur la fonction modulaire

par Guy Diaz

Résumé. Est-il possible d'utiliser les propriétés de la fonction modulaire $j$ pour avancer un peu en direction de la conjecture des quatre exponentielles ? Sur ce thème, le texte propose plusieurs conjectures équivalentes et quelques résultats partiels.

Abstract. Is it possible to use the properties of the modular $j$-function in order to make some progress on the four-exponential conjecture ? We here present several equivalent conjectures in this direction, as well as some partial results.

## 0 - Introduction.

La conjecture des quatre exponentielles (premier problème de Schneider, 1957, voir [7] p.139) est un des grands problèmes de la transcendance depuis quarante ans (au moins). L'attaque frontale par la méthode classique de Gel'fond-Schneider n'a rien donné, jusqu'ici.

Lors d'une conférence à Madras en janvier 1996, D. Bertrand a proposé différentes conjectures, liées à la fonction modulaire $J$ ; une réponse positive à ces conjectures permettrait d'obtenir un cas particulier des quatre exponentielles, ce qui serait déjà une belle avancée. Il n'est pas a priori très naturel de passer par $J$ pour étudier la fonction exponentielle ; mais c'est pourtant bien un tel détour qui a permis d'obtenir l'indépendance algébrique de $\pi$ et $e^{\pi}$ (travaux de Y.V. Nesterenko, voir [4]) !

Mon objectif ici est d'expliciter quelques conjectures intermédiaires, plus faibles que la conjecture des quatre exponentielles mais plus fortes que le cas particulier visé par D. Bertrand. En variant les formulations on finira peut-être par trouver un chemin d'accès !

Sur ce thème on trouvera de nombreuses remarques et variations dans les articles de D. Bertrand et M. Waldschmidt ([2], [9], [10]), en particulier l'analogue elliptique de la conjecture des quatre exponentielles, ainsi qu'une

Mots clés : Transcendance. Fonction modulaire. Quatre exponentielles.
Manuscrit reçu le 24 février 1997

conjecture "mixte" sur le produit du groupe multiplicatif par une courbe elliptique (dont un cas particulier a été obtenu dans [1]).

**Notations.**

Je note $D$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}, D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, et $D^*$ le disque unité ouvert pointé, $D^* = D \setminus \{0\}$. $\mathcal{H}$ désigne le demi-plan de Poincaré et $\mathcal{D}$ le domaine fondamental usuel de $\mathcal{H}$ pour l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ ; $j$ désigne l'invariant modulaire et $J$ son développement de Fourier à l'infini. Le $n$-ième polynôme modulaire est noté $\phi_n(X,Y)$, avec la convention $\phi_1(X,Y) = X - Y$. Les propriétés fondamentales ou utiles à l'exposé, pour $j, J, \phi_n$, se trouvent dans [8], [1], [9].

Pour un nombre complexe $z$ non nul on notera $\log z$ tout nombre complexe dont l'image par l'exponentielle est $z$ ; dans quelques cas on utilisera le logarithme népérien usuel, en le précisant. La notation $\alpha^\beta$ désigne le nombre $\exp(\beta \log \alpha)$ et suppose donc qu'un choix de $\log \alpha$ a été fait.

Enfin $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne le corps des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$.

**Organisation du texte.**

Le paragraphe I donne l'énoncé de la conjecture des quatre exponentielles (ou plutôt, un des énoncés), l'énoncé du cas particulier visé par D. Bertrand et sa "conjecture modulaire". Au paragraphe II je donnerai sept conjectures équivalentes, intermédiaires entre les "grosses conjectures" du paragraphe I et le cas particulier visé. Au paragraphe III j'étudierai quelques conséquences de ces conjectures intermédiaires. Le paragraphe IV contiendra quelques résultats épars, qui font penser que toutes ces conjectures sont vraies ; mais bien sûr l'essentiel du travail reste à faire.

Merci à François Gramain et Michel Waldschmidt qui m'ont poussé et aidé à mettre noir sur blanc mes remarques orales, ainsi qu'au referee.

## I - Conjecture des quatre exponentielles, conjecture de D. Bertrand.

La conjecture des quatre exponentielles (notée (C4E) ici) a plusieurs formulations équivalentes. En voici une (voir [9], §1.2 pour une autre version).

**(C4E)** *Si* $(x_1, x_2)$ *et* $(y_1, y_2)$ *sont deux familles de nombres complexes* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants, alors parmi les quatre exponentielles* $e^{x_i y_j}$, $1 \leq i, j \leq 2$*, il y a au moins un nombre transcendant.*

A la suite de travaux de D. Roy (voir [5] et le paragraphe IV), M. Waldschmidt a proposé une conjecture plus forte que (C4E) et dite "conjecture forte des quatre exponentielles". Je n'en parlerai pas ici.

Le cas particulier de (C4E) que vise D. Bertrand ([2], §5) est le suivant.

**(C4E faible)** *Soient $\alpha_1, \alpha_2$ des nombres réels algébriques positifs différents de 1. Alors $\pi^2$ et $(\log \alpha_1)(\log \alpha_2)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants* (log *désigne ici le logarithme népérien*).

On obtient la même conjecture en remplaçant la conclusion de (C4E faible) par $(\log \alpha_1).(\log \alpha_2) \neq \pi^2$. Pour faire le lien avec (C4E) il suffit de prendre $x_1 = 1$, $x_2 = (\log \alpha_1)/2i\pi$, $y_1 = 2i\pi$, $y_2 = \log \alpha_2$.

D. Bertrand propose dans [2], §5, plusieurs conjectures pour la fonction modulaire $J$, liées entre elles (avec ses notations la conjecture 1 est plus forte que la conjecture 2(ii), elle même plus forte que la conjecture 2(i)). Je m'intéresse ici à la seconde, sous la forme suivante (notée (CDB) par la suite).

**(CDB)** *Si $q_1, q_2$ sont deux éléments de $D^*$ algébriques et multiplicativement indépendants alors $J(q_1)$ et $J(q_2)$ sont algébriquement indépendants.*

Je ne connais pas de lien direct entre (C4E) et (CDB). Par contre ces deux conjectures contiennent (C4E faible). Cette implication, établie dans [2], §5, sera raffinée au théorème 2 ci-dessous. Plus précisément j'énonce dans le paragraphe suivant plusieurs conjectures, équivalentes, qui sont intermédiaires entre (C4E) et (CDB) d'une part, (C4E faible) d'autre part. Plusieurs sont dues à D. Bertrand et à des échanges Paris-St-Etienne ; elles ne prétendent pas forcément être originales mais ne semblent pas non plus faire partie du "folklore". Il apparaît à travers l'équivalence de ces conjectures un lien, nouveau, entre la fonction modulaire $J$ et la fonction exponentielle ; il me semble que cette idée de D. Bertrand mérite quelques travaux.

**Note.** En direction de (C4E), on ne dispose actuellement que de peu de résultats : le théorème des six exponentielles (dû à C. Siegel, S. Lang et K. Ramachandra : voir [13], §1-4), le théorème des cinq exponentielles (dû à M. Waldschmidt, voir [12], corollaire 2-2), le théorème fort des six exponentielles de D. Roy (voir [5], corollaire 2-2) qui contient les deux résultats précédents, et un résultat de D. Roy et M. Waldschmidt (voir [6], théorème 2). On reviendra là-dessus au paragraphe IV.

## II - Des conjectures intermédiaires.

Théoréme 1.

*Les énoncés (C0) à (C6) sont équivalents.*

**(C0)** *Si $q_1$ et $q_2$ sont deux éléments de $D^*$ algébriques et vérifiant $\phi_n\big(J(q_1), J(q_2)\big) = 0$ pour au moins un entier $n \geq 1$, alors $q_1$ et $q_2$ sont multiplicativement dépendants.*

**(C1)** *Si* $q_1$ *et* $q_2$ *sont deux éléments de* $D^*$ *algébriques et vérifiant* $J(q_1) = J(q_2)$, *alors* $q_1$ *et* $q_2$ *sont multiplicativement dépendants.*

**(C2)** *Si* $q_1$ *et* $q_2$ *sont deux éléments de* $D^*$ *algébriques et vérifiant* $J(q_1) = J(q_2)$, *alors* $q_1 = q_2$.

**(C3)** *Si* $q_1$ *et* $q_2$ *sont deux éléments de* $D^*$ *algébriques et vérifiant* $J(q_1) = J(q_2)$, *alors* $J(q_1^2) = J(q_2^2)$.

**(C4)** *Soit* $\tau \in \mathcal{H}$ *; les nombres* $e^{2i\pi\tau}$ *et* $e^{-2i\pi/\tau}$ *ne sont pas simultanément algébriques.*

**(C5)** *Soit* $\tau \in \mathcal{H}$ *et* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ *avec* $c \neq 0$ *; les nombres* $\exp(2i\pi\tau)$ *et* $\exp(2i\pi\,\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$ *ne sont pas simultanément algébriques.*

**(C6)** *Soient* $\alpha_1$ *et* $\alpha_2$ *des nombres algébriques non nuls, et de module différent de 1. On fixe une détermination* $\log\alpha_1, \log\alpha_2$ *de leurs logarithmes. Alors* $(\log\alpha_1)(\log\alpha_2)$ *et* $\pi^2$ *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants.*

Je vais démontrer l'équivalence de ces sept assertions. Notons que dans (C4), (C5) on peut remplacer l'hypothèse $\tau \in \mathcal{H}$ par l'hypothèse $\tau \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ; mais il est plus agréable de rester dans $\mathcal{H}$ puisque l'on va utiliser la fonction modulaire $j$.

J'utiliserai le lemme suivant.

Lemme. *Soient* $\tau_1, \tau_2$ *deux éléments de* $\mathcal{H}$ *équivalents modulo* $SL_2(\mathbb{Z})$ *et* $q_1 := \exp(2i\pi\tau_1)$, $q_2 := \exp(2i\pi\tau_2)$. *Si* $q_1$ *et* $q_2$ *sont distincts et multiplicativement liés alors* $\tau_1$ *et* $\tau_2$ *sont quadratiques.*

*Démontration du lemme.* Par hypothèse $\tau_2 = \frac{a\tau_1+b}{c\tau_1+d}$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $ad-bc = 1$. Je supppose $\tau_1$ non quadratique et $q_1, q_2$ multiplicativement liés ; je vais montrer qu'alors $q_1 = q_2$. Par hypothèse il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$, tel que $q_1^{n_1}.\,q_2^{n_2} = 1$. Donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n_1\tau_1 + n_2\tau_2 = m \;; \tag{1}$$

en conséquence on a

$$n_1\tau_1 + n_2\left(\frac{a\tau_1+b}{c\tau_1+d}\right) = m$$

c'est-à-dire

$$n_1c\tau_1^2 + \tau_1(n_1d + n_2a - mc) + n_2b - md = 0.$$

Puisque $\tau_1$ n'est pas quadratique il en résulte :

$$n_1 c = 0. \tag{2}$$

Si $n_1$ était nul, (1) s'écrirait $n_2\tau_2 = m$ ce qui donnerait $n_2 = m = 0$ (puisque $\tau \in \mathcal{H}$) ; c'est contraire à l'hypothèse $(n_1, n_2) \neq (0,0)$. Donc $n_1$ n'est pas nul et (2) donne $c = 0$ ; comme $ad - bc = 1$ il reste $ad = 1$ c'est-à-dire $a = d = \pm 1$. En conséquence $\tau_2 = \tau_1 \pm b$ et donc $q_1 = q_2$. □

*Démonstration du théorème 1.*

**Point 1 : (C1) et (C2)sont équivalentes.**

Que (C2) implique (C1) est clair. Il reste à voir que (C1) implique (C2).

On suppose donc que $q_1$ et $q_2$ vérifient les hypothèses de (C2) et on écrit $q_1 = \exp(2i\pi\tau_1)$, $q_2 = \exp(2i\pi\tau_2)$ avec $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}$. Puisque $J(q_1) = J(q_2)$, on sait que $\tau_1$ et $\tau_2$ sont équivalents modulo $SL_2(\mathbb{Z})$. Par (C1), $q_1$ et $q_2$ sont multiplicativement liés . Par le théorème de Gel'fond-Schneider, $\tau_1$ n'est pas quadratique (sinon $q_1$ serait transcendant). Et donc par le lemme il vient $q_1 = q_2$.

**Point 2 : (C0) et C2) sont équivalentes.**

Le cas particulier $n = 1$ de (C0) est l'énoncé (C1) et on a vu qu'il était équivalent à (C2). Donc (C0) implique (C2).

Reste à voir que (C2) implique (C0). On suppose donc que $q_1, q_2 \in D^*$ sont algébriques et vérifient $\phi_n(J(q_1), J(q_2)) = 0$ avec $n \geq 2$ (pour $n = 1$ c'est réglé). On veut montrer que $q_1$ et $q_2$ sont multiplicativement dépendants. On note $q_1 = \exp(2i\pi\tau_1)$, $q_2 = \exp(2i\pi\tau_2)$ avec $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}$. Puisque $J(q_2)$ est un zéro du polynôme $\phi_n(j(\tau_1), X)$, on sait que l'on peut écrire $J(q_2)$ sous la forme :

$$J(q_2) = j(\tau_3) \quad \text{avec} \quad \tau_3 = \frac{a\tau_1 + b}{d}, \quad a, b, d \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad ad = n.$$

En notant $q_3 := \exp(2i\pi\tau_3)$ on a $J(q_2) = J(q_3)$ et $q_3^d = q_1^a$; donc $q_3$ est algébrique, comme $q_1$. Par (C2) on sait que $q_2 = q_3$ et en conséquence on a $q_1^a = q_3^d = q_2^d$ : $q_1$ et $q_2$ sont donc multiplicativement liés.

**Point 3 : (C2) et (C3) sont équivalentes.**

Il s'agit simplement de voir que (C3) implique (C2). Soient $q_1, q_2 \in D^*$, algébriques et vérifiant $J(q_1) = J(q_2)$. Par (C3) j'en déduis $J(q_1^2) = J(q_2^2)$.

En itérant, cela permet de dire que $J(q_1^{2^n}) = J(q_2^{2^n})$ pour tout entier $n \geq 1$. Or la fonction $J$ est injective sur le disque pointé $\{z \in \mathbb{C} ; 0 < |z| < e^{-2\pi}\}$ (car $j$ est injective sur son domaine fondamental "usuel" $\mathcal{D}$) ; en conséquence pour tout $n$ assez grand on a $q_1^{2^n} = q_2^{2^n}$ et donc $q_1, q_2$ sont multiplicativement liés. Par le lemme ils sont égaux, en invoquant encore une fois le théorème de Gel'fond-Schneider.

**Point 4 : (C2),(C4),(C5) sont équivalentes.**

On va montrer ça dans le sens $C2 \to C5 \to C4 \to C2$.

**(C2) implique (C5).**

Soient $\tau \in \mathcal{H}$ et $\tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $c \neq 0$.

Je note $q = \exp(2i\pi\tau)$ et $q' = \exp(2i\pi\tau')$ et je les suppose tous les deux algébriques. On a $J(q) = J(q')$ et donc (C2) dit que $q = q'$ c'est-à-dire que $\tau - \tau' \in \mathbb{Z}$ ; ainsi il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau - \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d} = m$ et, comme $c$ n'est pas nul, $\tau$ est en conséquence quadratique. Mais alors $q$ est transcendant ! C'est donc que $q$ et $q'$ ne sont pas tous les deux algébriques.

**(C5) implique (C4)** : c'est trivial.

**(C4) implique (C2).**

Soient $q_1, q_2 \in D^*$, algébriques, avec $J(q_1) = J(q_2)$. En notant $q_1 = \exp(2i\pi\tau_1)$, $q_2 = \exp(2i\pi\tau_2)$ où $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}$, on sait qu'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\tau_2 = \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}$. Montrons que $c = 0$ (ce sera alors terminé : $c = 0$ permet de dire que $\tau_2 = \tau_1 \pm b$ et donc $q_1 = q_2$). On suppose $c \neq 0$, par exemple $c > 0$, et on cherche une contradiction. On a $c\tau_2 = a - \frac{1}{c\tau_1 + d}$ ; et on introduit $\tau_3 = c\tau_1 + d$, $q_3 = \exp(2i\pi\tau_3)$ (on a $\tau_3 \in \mathcal{H}$ car $c > 0$). Ainsi $c\tau_2 = a - (1/\tau_3)$ et donc $q_2^c = \exp(-2i\pi/\tau_3)$ ; d'autre part $q_3 = q_1^c$. Puisque $q_1, q_2$ sont algébriques on en déduit que $\exp(2i\pi\tau_3)$ et $\exp(-2i\pi/\tau_3)$ sont simultanément algébriques ; c'est contraire à (C4) et donc finalement $c = 0$.

**Point 5 : (C4) et (C6) sont équivalentes.**

**(C6) implique (C4).**

On suppose $\exp(2i\pi\tau)$ et $\exp(-2i\pi/\tau)$ simultanément algébriques, où $\tau \in \mathcal{H}$. On note $\alpha_1 = \exp(2i\pi\tau)$, $\alpha_2 = \exp(-2i\pi/\tau)$ et on prend $\log\alpha_1 = 2i\pi\tau$, $\log\alpha_2 = -2i\pi/\tau$. On a en conséquence

$$(\log\alpha_1)(\log\alpha_2) = 4\pi^2.$$

Comme $\tau \in \mathcal{H}$, on vérifie sans problème que $\alpha_1, \alpha_2$ sont de module $\neq 1$. Par (C6) tout ceci est incompatible ; on a ainsi la contradiction cherchée.

**(C4) implique (C6).**

On suppose donc que $\log\alpha_1, \log\alpha_2$ sont des logarithmes des nombres algébriques $\alpha_1, \alpha_2 (\alpha_1, \alpha_2 \neq 0 \; ; \; |\alpha_1|, |\alpha_2| \neq 1)$ et que $(\log\alpha_1)(\log\alpha_2), \pi^2$ sont $\mathbb{Q}$- linéairement dépendants ; il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ non nuls tels que : $n(\log\alpha_1)(\log\alpha_2) = 4m\pi^2$. Je note $\beta_1 = \alpha_1^n, \quad \beta_2 = \exp\left(\frac{1}{m}\log\alpha_2\right)$ et je prends $\log\beta_1 = n\log\alpha_1$ , $\log\beta_2 = \frac{1}{m}\log\alpha_2$. $\beta_1, \beta_2$ sont algébriques, non nuls et de module différent de 1 puisque $\beta_1 = \alpha_1^n$ , $\beta_2^m = \alpha_2$. Et on a $(\log\beta_1)(\log\beta_2) = 4\pi^2$. Je note $\tau = (\log\beta_1)/2i\pi$ ; on a alors $\log\beta_2 = 4\pi^2/\log\beta_1 = -2i\pi/\tau$ et donc $\exp(2i\pi\tau), \exp(-2i\pi/\tau)$ sont respectivement égaux à $\beta_1, \beta_2$ donc sont algébriques. Comme $\tau$ n'est pas réel ($\tau \in \mathbb{R}$ entraine $|\beta_1| = |\exp(2i\pi\tau)| = 1$) on peut supposer $\tau \in \mathcal{H}$ (quitte à remplacer $n, m$ par $-n, -m$) ; et ceci est contradictoire avec (C4). □

Il est sans doute possible de démontrer ces équivalences de plusieurs façons, de trouver d'autres formulations équivalentes. Mais déjà dans la forme ci-dessus le théorème 1 fait apparaître des liens entre des assertions de natures a priori assez différentes.

On peut maintenant faire le lien avec les conjectures du §I.

THÉORÈME 2.

*(a) (C4E) implique (C0), (C1), ... ,(C6).*

*(b) (CDB) implique (C0),(C1),... ,(C6).*

*(c) (C0),..., (C6) impliquent chacune (C4E faible).*

*Démonstration du théorème 2.*

**(a) (C4E) implique (C4).**

À $\tau \in \mathcal{H}$ on associe les familles $(x_1, x_2)$, $(y_1, y_2)$ suivantes :

$$x_1 = 2i\pi, \quad x_2 = 2i\pi\tau, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -1/\tau.$$

Ces familles sont $\mathbb{Q}$-libres et donc (C4E) dit que les $e^{x_i y_j}$ ne sont pas tous algébriques, ce qui revient à dire que $\exp(2i\pi\tau)$ et $\exp(-2i\pi/\tau)$ ne sont pas simultanément algébriques.

**(b) (CDB) implique (C0).**

C'est trivial ! Au demeurant D. Bertrand conjecture que pour $q_1, q_2 \in D^* \cap \overline{\mathbb{Q}}$ les seules relations de dépendance algébrique irréductibles possibles entre $J(q_1)$ et $J(q_2)$ sont de la forme $\phi_n\Big(J(q_1), J(q_2)\Big) = 0$, à constante multiplicative près (voir conjecture 2 de [2]). Cette conjecture est corollaire de (CDB).

**(c) (C6) implique (C4E faible)** : c'est trivial ! □

Toutes les formulations qui apparaissent dans le théorème 1 font jouer un rôle important à $2i\pi$ et de ce point de vue (C0),..., (C6) sont des conjectures certainement beaucoup plus faibles que (C4E), si tant est que cette phrase ait un sens !

## III - Quelques conséquences des conjectures faibles.

On va établir, dans ce paragraphe, quelques conséquences des conjectures faibles (C0) à (C6), concernant la fonction exponentielle.

Théorème 3.

*La propriété suivante est conséquence de chacune des assertions (C0) à (C6).*

*(T3). Soient $\tau, \tau_0$ dans $\mathcal{H}$ équivalents modulo $SL_2(\mathbb{Z})$ (avec $\tau_0 = (a\tau + b)/(c\tau + d)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$). On suppose $|\tau_0|^2$ rationnel. Si $\exp(2i\pi\tau)$ est algébrique on a*

- $ac \neq 0$;
- $\mathrm{Re}(\tau) = (1/2ac) - (d/c)$ et $|\tau_0| = |a/c|$ *(en particulier* $\mathrm{Re}(\tau)$ *et* $|\tau_0|$ *sont rationnels).*

*Démonstration du théorème 3.*

On se donne $\tau, \tau_0 \in \mathcal{H}$ avec $\tau_0 = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, $ad - bc = 1$ ; on suppose $|\tau_0|^2$ rationnel (on note $|\tau_0|^2 = p_1/p_2$, $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, (p_1, p_2) = 1$) et $\exp(2i\pi\tau)$ algébrique.

De $|\tau_0|^2 = p_1/p_2$ on tire $-\overline{\tau}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 \\ p_2 & 0 \end{pmatrix} \tau_0$ ; en conséquence

$$\Phi_{p_1p_2}\big(j(\tau_0), j(-\overline{\tau}_0)\big) = 0. \tag{1}$$

De $\tau_0 = (a\tau + b)/(c\tau + d)$ on tire $-\overline{\tau}_0 = \big(a(-\overline{\tau}) - b\big)/\big(-c(-\overline{\tau}) + d\big)$ ; ce qui permet de dire que $j(\tau_0) = j(\tau)$, $j(-\overline{\tau_0}) = j(-\overline{\tau})$. Ainsi (1) s'écrit

$$\phi_{p_1 p_2}\Big(j(\tau), j(-\overline{\tau})\Big) = 0. \tag{2}$$

Par hypothèse $\exp(2i\pi\tau)$ est algébrique et donc $\exp(-2i\pi\overline{\tau})$ aussi (ces deux nombres sont des nombres complexes conjugués). En utilisant (C0), (2) permet de dire que $\exp(2i\pi\tau)$ et $\exp(-2i\pi\overline{\tau})$ sont multiplicativement liés ; il existe donc $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, $(n_1, n_2) \neq (0,0)$, tel que

$$\exp(2i\pi\tau n_1 - 2i\pi\overline{\tau} n_2) = 1.$$

En conséquence il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n_1\tau - n_2\overline{\tau} = m$ ; en notant $\tau = x + iy$ ceci s'écrit $(n_1 - n_2)x = m$, $(n_1 + n_2)y = 0$. Puisque $y$ est non nul il en résulte $n_1 + n_2 = 0$ (donc $n_1, n_2$ sont tous les deux non nuls) et $2n_1 x = m$ (donc $x$ est rationnel).

De $\tau_0 = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ on tire $|\tau_0|^2 = \frac{a^2(x^2+y^2)+2abx+b^2}{c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2}$ ; et en conséquence

$$0 = y^2(c^2|\tau_0|^2 - a^2) + x^2(c^2|\tau_0|^2 - a^2) + |\tau_0|^2(2cdx + d^2) - (2abx + b^2). \tag{3}$$

Or $y$ ne peut pas être algébrique (sinon, puisque $x \in \mathbb{Q}$, $\tau = x + iy$ serait algébrique et $\exp(2i\pi\tau)$ serait transcendant par le théorème de Gel'fond-Schneider). De (3) on tire donc

$$c^2|\tau_0|^2 - a^2 = 0, \quad |\tau_0|^2(2cdx + d^2) - (2abx + b^2) = 0. \tag{4}$$

L'égalité $c^2|\tau_0|^2 - a^2 = 0$ interdit d'avoir $a.c = 0$ (compte-tenu de $ad - bc = 1$) ; on a donc $a.c \neq 0$ et $|\tau_0|^2 = a^2/c^2$. La seconde égalité de (4) s'écrit alors

$$a^2(2cdx + d^2) = c^2(2abx + b^2)$$

ce qui donne $x : 2xac = -(ad + bc)$. □

La proposition (T3) étant assez technique, on va l'illustrer par quelques cas particuliers plus simples.

Théorème 4.

*Les propriétés suivantes sont conséquences de chacune des assertions (C0) à (C6) (et donc a fortiori de (CDB), (C4E)).*

- *(4-1) Pour tout $\tau \in \mathcal{H}$ avec $|\tau|^2 \in \mathbb{Q}$, $\exp(2i\pi\tau)$ est transcendant.*

- *(4-2) Pour tout* $\tau \in \mathcal{H}$ *avec* $\mathrm{Re}(\tau) \in \mathbb{Q}^*, \exp(2i\pi/\tau)$ *est transcendant.*
- *(4-3) Pour tout* $\tau \in \mathcal{H}$ *avec* $\mathrm{Re}(\tau)/|\tau|^2 \in \mathbb{Q}^*, \exp(2i\pi\tau)$ *est transcendant.*
- *(4-4) Soient* $\tau, \tau_0 \in \mathcal{H}$ *avec* $|\tau_0| = 1, \tau = \tau_0 \mod SL_2(\mathbb{Z})$. *Si* $\exp(2i\pi\tau)$ *est algébrique alors* $\mathrm{Re}(\tau) - (1/2) \in \mathbb{Z}$.
- *(4-5) Soit* $\tau \in \mathcal{H}$ *avec* $j(\tau) \in [0, 1728]$ *et* $\exp(2i\pi\tau)$ *algébrique.*

  *Alors* $\mathrm{Re}(\tau) - (1/2) \in \mathbb{Z}, \mathrm{Im}(\tau) \in ]1/2\sqrt{3}, \sqrt{3}/2[$

  *et* $\exp(2i\pi\tau) \in [-\exp(-\pi/\sqrt{3}), -\exp(-\pi\sqrt{3})]$.

La propriété (4-1) permet de dire, conjecturalement, que le seul point algébrique de la courbe $\exp(2i\pi z)$ quand $z$ décrit le cercle unité est le point 1 (correspondant à $z = \pm 1$). L'allure de cette courbe est donnée dans [10], appendice 2.

La propriété (4-4) entraîne que, conjecturalement, les seuls points algébriques de la courbe $\exp(2i\pi z)$ quand $z$ décrit l'image par $SL_2(\mathbb{Z})$ du bord du domaine fondamental $\mathcal{D}$ sont obtenus pour des $z$ vérifiant $\mathrm{Re}(z) - (1/2) \in \mathbb{Z}$.

La conclusion de (4-5) est optimale : pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ et tout nombre algébrique $\alpha \in ]\exp(\pi/\sqrt{3}), \exp(\pi\sqrt{3})[$, le nombre $\tau = (1/2) + k + i(\log\alpha)/(2\pi)$ vérifie les deux propriétés $j(\tau) \in [0, 1728]$ et $\exp(2i\pi\tau) \in \overline{\mathbb{Q}}$ (on lui associe $\tau_0 = (\tau - k - 1)/(\tau - k)$ et on vérifie que $|\tau_0| = 1$ avec $|\mathrm{Re}(\tau_0)| \leq 1/2$, ce qui donne $j(\tau) = j(\tau_0) \in [0, 1728]$).

Dans une première version de ce texte je déduisais (4-1) et (4-5) de (C4E) (voir aussi [10], §3); en fait il suffit d'invoquer les conjectures faibles !

*Démonstration du théorème 4.*

- (4-1) est conséquence de (T3) puisque c'est le cas particulier $\tau_0 = \tau$, $a = d = 1$, $b = c = 0$.
- (4-2) est conséquence de (4-1). On introduit $\tau' = (\tau - 2\mathrm{Re}(\tau))/\tau$ ; $\tau'$ est de module 1 et n'est pas réel, donc par (4-1), $\exp(2i\pi\tau')$ est transcendant. Puisque $\mathrm{Re}(\tau) \in \mathbb{Q}^*$, il en résulte que $\exp(2i\pi/\tau)$ est transcendant.
- (4-3) est conséquence de (4-2). On introduit $\tau' = 1/\tau$ ; on a alors $\mathrm{Re}(\tau') = \mathrm{Re}(\tau)/|\tau|^2$ et donc $\mathrm{Re}(\tau') \in \mathbb{Q}^*$ ; on applique (4-2).
- (4-4) est conséquence de (T3). Par hypothèse on peut écrire $\tau_0 = (a\tau + b)/(c\tau + d)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $a \geq 0$ ; $(T3)$ dit alors

que l'on a $1 = |\tau_0| = |a/c|$ et $\mathrm{Re}(\tau) = -(bc+ad)/(2ac)$.

D'où deux cas :

- soit $a = c = 1$ et alors $\mathrm{Re}(\tau) = -d + (1/2)$ ;

- soit $a = -c = 1$ et alors $\mathrm{Re}(\tau) = -b + (1/2)$.

∘ (4-5) est conséquence de (T3). Les hypothèses de (4-5) permettent de dire qu'il existe $\tau_0 \in \mathcal{H}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $|\tau_0| = 1$, $|\mathrm{Re}(\tau_0)| \leq 1/2$, $\tau_0 = (a\tau+b)/(c\tau+d)$ (on sait que l'orbite de $\tau$ par $SL_2(\mathbb{Z})$ a un élément $\tau_0$ dans $\mathcal{D}$ ; comme de plus $j(\tau_0) = j(\tau) \in [0, 1728]$, $\tau_0$ est sur le cercle $|z| = 1$). Par (T3) on sait que $ac \neq 0$ et $1 = |\tau_0| = |a/c|$ ; on distingue les deux cas $a = c$, $a = -c$.

**Cas 1 :** $a = c$. De $ad - bc = 1$ on tire alors $a = d - b = 1$, ce qui permet d'écrire $\tau_0 = (\tau+b)/(\tau+d) = 1 - 1/(\tau+d)$ ; en conséquence $\tau = -d + 1/(1-\tau_0)$, $\mathrm{Re}(\tau) = -d + (1/2)$ , $2\mathrm{Im}(\tau) = \Big(\big(1+\mathrm{Re}(\tau_0)\big)/\big(1-\mathrm{Re}(\tau_0)\big)\Big)^{1/2}$. Compte tenu de $|\mathrm{Re}(\tau_0)| \leq 1/2$ on obtient $1/2\sqrt{3} \leq \mathrm{Im}(\tau) \leq \sqrt{3}/2$ ; et les valeurs extrêmes sont interdites car $\exp(\pi/\sqrt{3})$ et $\exp(\pi\sqrt{3})$ sont transcendants.

**Cas 2 :** $a = -c$. De $ad - bc = 1$ on tire $a = d + b = 1$ ce qui permet d'écrire $\tau_0 = (\tau+b)/(-\tau+d) = -1 + 1/(-\tau+d)$; en conséquence $\tau = d - 1/(\tau_0+1)$, $\mathrm{Re}(\tau) = d - (1/2), 2Im(\tau) = \Big(\big(1-\mathrm{Re}(\tau_0)\big)/\big(1+\mathrm{Re}(\tau_0)\big)\Big)^{1/2}$. Compte-tenu de $|\mathrm{Re}(\tau_0)| \leq 1/2$ on obtient le même encadrement que dans le cas 1.

Dans les deux cas on vérifie sans problème que $\exp(2i\pi\tau)$ est un nombre réel de l'intervalle annoncé. □

## IV - Quelques résultats liés à (C4E).

On peut déduire de (C4E) d'autres assertions que celles des théorèmes 2,3,4. J'en donnerai deux exemples au théorème 5. Je rappelerai ensuite (théorème 6) les résultats connus les plus proches de (C4E), et ce qu'ils permettent d'obtenir en direction de certaines des conjectures faibles.

Voici donc deux nouvelles conséquences de (C4E).

Théorème 5.

*L'assertion (C4E) implique les propriétés suivantes.*

*(1)* $(C\alpha, b)$. *Soit* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ *et* $\log\alpha$ *une détermination non nulle du logarithme de* $\alpha$. *Pour tout* $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, *les nombres* $\alpha^b$ *et* $\alpha^{1/b}$ *ne sont pas simultanément algébriques.*

*(2)* $(C\log\alpha)$. *Soit* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ *et* $\log\alpha$ *une détermination non réelle du logarithme de* $\alpha$. *Alors* $\exp(|\log\alpha|)$ *est transcendant.*

*Démonstration du théorème 5.*

Pour $(C\alpha, b)$ on utilise (C4E) avec $x_1 = \log\alpha, x_2 = b\log\alpha, y_1 = 1, y_2 = 1/b$. Pour $(C\log\alpha)$ on utilise (C4E) avec $x_1 = 1/\log\alpha, x_2 = 1/|\log\alpha|, y_1 = |\log\alpha|^2$, $y_2 = |\log\alpha|.(\log\alpha)$. □

On verra plus loin quelques exemples de couples $(\alpha, b)$ pour lesquels $(C\alpha, b)$ est vraie.

Nous allons maintenant voir que certains énoncés de D. Brownawell, D. Roy, M. Walschmidt, rappelés au lemme 6 ci-dessous, fournissent des résultats partiels en direction de $(C\alpha, b)$, (C6), $(C\log\alpha)$ et (C4). On notera

$$L := \{\log\alpha;\ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}, \alpha \neq 0\} = \{z \in \mathbb{C}; \exp(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\},$$
$$\mathcal{L} := \{\beta_0 + \beta_1\log\alpha_1 + \ldots + \beta_n\log\alpha_n;\ n \in \mathbb{N}, \beta_i \in \overline{\mathbb{Q}},\ \alpha_j \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}\}.$$

Ainsi $\mathcal{L}$ est le $\overline{\mathbb{Q}}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{Q}$ et $L$.

Lemme 6.

*(A). Soient* $(x_1, x_2)$ *et* $(y_1, y_2)$ *deux familles de nombres complexes* $\mathbb{Q}$-*linéairement indépendants.*

- *(1)* [3], [11]. *Si* $\exp(x_2y_1)$ *et* $\exp(x_2y_2)$ *sont algébriques, alors*

$$\deg\operatorname{tr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(x_1, x_2, y_1, y_2, e^{x_1y_1}, e^{x_1y_2}) \geq 2.$$

- *(2)* [12]. *Si* $\delta$ *est un nombre algébrique non nul, alors*

$$\deg\operatorname{tr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(e^{x_1y_1}, e^{x_1y_2}, e^{x_2y_1}, e^{x_2y_2}, e^{\delta x_2/x_1}) \geq 1.$$

*(B)* [5]. *Soient* $(x_1, x_2)$ *et* $(y_1, y_2, y_3)$ *deux familles de nombres complexes* $\overline{\mathbb{Q}}$-*linéairement indépendants. Alors au moins un des six nombres* $x_iy_j$ *n'est pas dans* $\mathcal{L}$.

Le résultat (A-2), appelé théorème des cinq exponentielles, peut se déduire du (B) via le théorème de Baker. Le résultat (B), appelé théorème fort des six exponentielles, est dû à D. Roy (voir [5], corollaire 2 et introduction); il contient le théorème des six exponentielles (même énoncé où $\overline{\mathbb{Q}}$ est remplacé par $\mathbb{Q}$, $\mathcal{L}$ par $L$ : voir [13], par exemple) et améliore un résultat antérieur de M. Waldschmidt ([12] corollaire 2-1).

∘ On a vu (théorème 5) que, conjecturalement, on a :

$(C\alpha, b)$. *Pour* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}, \alpha \neq 0, \log\alpha \neq 0$ *et* $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, *les nombres* $\alpha^b$ *et* $\alpha^{1/b}$ *ne sont pas simultanément algébriques.*

Cela est acquis dans les trois cas suivants.

**Cas 1.** $b \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$ (c'est le théorème de Gel'fond- Schneider).

**Cas 2.** $b = (\log\gamma)/\delta$ avec $\gamma, \delta$ algébriques, $\delta \neq 0, \log\gamma \neq 0$.

(On applique le lemme 6-(A.2), avec $x_1 = \log\alpha,\quad x_2 = b\log\alpha,\quad y_1 = 1$, $y_2 = 1/b$ ; le théorème de Hermite-Lindemann donne $b \notin \mathbb{Q}$ et donc $(x_1, x_2)$, $(y_1, y_2)$ sont $\mathbb{Q}$-libres). Par exemple on peut affirmer que l'on a :

$$\deg\operatorname{tr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\alpha^{\pi}, \alpha^{1/\pi}) \geq 1, \quad \deg\operatorname{tr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\alpha^{\log 2}, \alpha^{1/\log 2}) \geq 1.$$

**Cas 3.** $b$ et $\log\alpha$ sont algébriquement dépendants, $b \notin \mathbb{Q}$.

(Je suppose $\alpha^b$ et $\alpha^{1/b}$ simultanément algébriques. J'applique le lemme 6-(A.1) avec $x_1 = \log\alpha,\ x_2 = b\log\alpha,\ y_1 = 1,\ y_2 = 1/b$ ; tous les $e^{x_i y_j}$ sont algébriques et la conclusion est alors que $\mathbb{Q}(\log\alpha,\, b\log\alpha,\, b)$ est de degré de transcendance 2 : c'est contraire à l'hypothèse de ce cas 3).

∘ En direction de (C6) et de (C4E faible) on a le résultat suivant.

PROPOSITION 1. *Soient* $\alpha_1, \alpha_2$ *des nombres algébriques non nuls et non racines de l'unité. On fixe une détermination* $\log\alpha_1, \log\alpha_2$ *de leurs logarithmes. Si* $(\log\alpha_1)(\log\alpha_2)$ *et* $\pi^2$ *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement dépendants alors* $\log\alpha_1$ *et* $\log\alpha_2$ *(ainsi que* $\log\alpha_1$ *et* $2i\pi$*) sont algébriquement indépendants.*

*Démonstration.*

On se ramène au cas $(\log\alpha_1)(\log\alpha_2) = -4\pi^2$ ; on applique le lemme 6-(A.1) avec $x_1 = 1$, $x_2 = (\log\alpha_1)/2i\pi$, $y_1 = 2i\pi$, $\quad y_2 = \log\alpha_2$. On en déduit que $\mathbb{Q}(2i\pi, \log\alpha_1, \log\alpha_2)$ a un degré de transcendance supérieur ou égal à 2 ; la relation initiale dit que ce corps est $\mathbb{Q}(2i\pi, \log\alpha_1)$ et qu'il a même degré de transcendance que $\mathbb{Q}(\log\alpha_1, \log\alpha_2)$, ce qui donne le résultat.

∘ En direction de (C $\log\alpha$) (voir théorème 5) on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2. *Soit* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ *et* $\log\alpha$ *une détermination non réelle du logarithme de* $\alpha$. *Alors si* $\exp(|\log\alpha|)$ *est algébrique, les nombres* $(\log\alpha)$ *et* $(\overline{\log\alpha})$ *sont algébriquement indépendants.*

*Démonstration.*

On suppose $\exp(|\log\alpha|)$ algébrique et on applique lemme 6-(A.1) avec

$$x_1 = 1/\log\alpha, x_2 = 1/|\log\alpha|, y_1 = |\log\alpha|^2, y_2 = (\log\alpha).|\log\alpha| \ ;$$

les nombres $\exp(x_i y_j)$, $1 \leq i, j \leq 2$, sont tous algébriques et en conséquence $\mathbb{Q}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ est de degré de transcendance $\geq 2$. D'où le résultat. $\square$

∘ Dans le même ordre d'idée, en direction de (C4) on a le résultat suivant.

Proposition 3. *Soit* $\tau \in \mathcal{H}$.

*(1) Si* $\exp(2i\pi\tau)$ *est algébrique alors* $\mathrm{Im}(\tau)$ *est transcendant et* $\mathrm{Re}(\tau)$ *est transcendant ou rationnel.*

*(2) Si* $\exp(2i\pi/\tau)$ *est algébrique alors* $\mathrm{Im}(\tau)/|\tau|^2$ *est transcendant et* $\mathrm{Re}(\tau)/|\tau|^2$ *est transcendant ou rationnel.*

*(3) si* $\exp(2i\pi\tau)$ *et* $\exp(2i\pi/\tau)$ *sont algébriques alors*

*(3-1)* $2i\pi$ *et* $\tau$ *sont algébriquement indépendants ;*

*(3-2) pour tout nombre algébrique* $\delta \neq 0$, $\exp(\delta\tau)$ *et* $\exp(\delta/\tau)$ *sont transcendants ;*

*(3-3) si* $\mathrm{Re}(\tau) \neq 0, \exp(2i\pi\bar{\tau}/\tau)$ *et* $\exp(2i\pi\tau/\bar{\tau})$ *sont transcendants ;*

*(3-4) pour tout nombre algébrique non nul* $\alpha$, $\exp\Big(2i\pi/(\tau+\alpha)\Big)$, *est transcendant ;*

*(3-5)* $\mathrm{Re}(\tau)$ *et* $\mathrm{Re}(\tau)/|\tau|^2$ *sont transcendants ou nuls,* $\mathrm{Im}(\tau)$ *et* $\mathrm{Im}(\tau)/|\tau|^2$ *sont transcendants.*

*Démonstration.*

∘ (1) Je note $\tau = x + iy\,(x, y \in \mathbb{R})$. Puisque $\exp(2i\pi\tau)$ est algébrique, sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont aussi : $(\cos 2\pi x).e^{-2\pi y}$ $(\sin 2\pi x).e^{-2\pi y} \in \overline{\mathbb{Q}}$. En faisant la somme des carrés cela dit aussi que $e^{-2\pi y}$ est algébrique. Et $e^{2i\pi x} = e^{2i\pi\tau}.e^{2\pi y}$ est donc algébrique. Le théorème de Gel'fond-Schneider dit alors que $x$ est transcendant ou rationnel, et que $iy$ est transcendant.

∘ (2) On applique le (1) avec $1/\tau$.

∘ (3) On applique le lemme 6-(A.1) avec $x_1 = 2i\pi$, $x_2 = 2i\pi/\tau$, $y_1 = 1$, $y_2 = \tau$ ; cela donne l'indépendance algébrique de $2i\pi$ et $\tau$. Puis le lemme 6-(A.2) dit que $\exp(\delta\tau)$ et $\exp(\delta/\tau)$ sont transcendants. D'où les résultats (3-1), (3-2). On applique le théorème des six exponentielles avec $x_1 = 1$,

$x_2 = \tau$, $x_3 = \bar{\tau}$ et $y_1 = 2i\pi$, $y_2 = 2i\pi/\tau$ (les familles $(x_1, x_2, x_3)$ et $(y_1, y_2)$ sont $\mathbb{Q}$-libres). Ce théorème dit que les $\exp(x_i y_j)$ ne sont pas tous algébriques ; ici il dit que $\exp(2i\pi\overline{\tau}/\tau)$ est transcendant. En permutant $\tau$ et $\overline{\tau}$ on obtient la même chose pour $\exp(2i\pi\tau/\overline{\tau})$. C'est (3-3). Pour (3-4) on applique le lemme 6-B (théorème fort des six exponentielles) avec $x_1 = 2i\pi$, $x_2 = 2i\pi\tau$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1/\tau$, $y_3 = 1/(\tau+\alpha)$ (on vérifie que $(x_1, x_2)$ et $(y_1, y_2, y_3)$ sont des familles $\overline{\mathbb{Q}}$-libres, en utilisant le fait que $\tau$ est transcendant) ; si $\exp\Big(2i\pi/(\tau+\alpha)\Big)$ est algébrique, tous les $x_i y_j (i = 1, 2 \ ; \ j = 1, 2, 3)$ sont dans $\mathcal{L}$, et c'est contradictoire avec le lemme 6-B. Donc $\exp\Big(2i\pi/(\tau+\alpha)\Big)$ est transcendant.

Il reste à démontrer (3-5). On va faire ça en deux temps, en précisant chaque fois les hypothèses. Le fait que $\mathrm{Im}(\tau)$ et $\mathrm{Im}(\tau)/|\tau|^2$ sont transcendants est conséquence du (1) et du (2) ; on verra en remarque qu'on peut le démontrer aussi par la méthode qui sert à traiter $\mathrm{Re}(\tau), \mathrm{Re}(\tau)/|\tau|^2$. Au demeurant le seul cas nouveau par rapport à (1) et (2) est le cas rationnel et pour traiter ce cas il suffit d'utiliser le théorème classique des six exponentielles au lieu du lemme 6-B.

**Partie 1**. On se donne $\tau \in \mathcal{H}$ avec $\mathrm{Re}(\tau) \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ et on suppose $\exp(2i\pi\tau)$ et $\exp(2i\pi/\tau)$ algébriques (en conséquence $\tau$ est transcendant par le théorème de Gel'fond-Schneider). On note $\alpha := \mathrm{Re}(\tau)$ ; on a donc $\tau - 2\alpha = -\overline{\tau}$ et du coup $2i\pi/(\tau - 2\alpha)$ et $2i\pi/\tau$ sont des nombres complexes conjugués. En conséquence $\exp(2i\pi\tau/(\tau - 2\alpha))$ est un nombre algébrique.

On sait donc que $2i\pi\tau, 2i\pi/\tau, 2i\pi/(\tau-2\alpha)$ sont dans $L$. On va appliquer le lemme 6-B avec $x_1 = 2i\pi$, $x_2 = 2i\pi(\tau - 2\alpha)$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1/\tau$, $y_3 = 1/(\tau - 2\alpha)$. On vérifie sans problème que $(x_1, x_2)$ et $(y_1, y_2, y_3)$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-libres en utilisant le fait que $\tau$ est trancendant. Le lemme 6-B affirme qu'aucun des $x_i y_j$ n'est dans $\mathcal{L}$ ; or ici ils le sont tous et cela fournit la contradiction cherchée (vérification : $x_1 y_1 = 2i\pi \in L$ ; $x_1 y_2 = 2i\pi/\tau \in L$ ; $x_1 y_3 = 2i\pi/(\tau - 2\alpha) \in L$ ; $x_2 y_1 = (2i\pi)\tau - 2\alpha(2i\pi)$ est dans $\mathcal{L}$ puisque $(2i\pi)\tau$ est dans $L$ ; $x_2 y_2 = 2i\pi - 2\alpha(2i\pi/\tau)$ est dans $\mathcal{L}$ puisque $(2i\pi/\tau)$ est dans $L$ ; $x_2 y_3 = 2i\pi \in L$).

**Partie 2.** On se donne $\tau \in \mathcal{H}$ avec $\mathrm{Re}(\tau)/|\tau|^2 \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$. On lui associe $\tau' := -1/\tau$ ; on a $\tau' \in \mathcal{H}$ et $\mathrm{Re}(\tau') = -\mathrm{Re}(\tau)/|\tau|^2$. Ainsi $\mathrm{Re}(\tau') \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ ce qui permet d'utiliser la première partie : $\exp(2i\pi\tau')$ et $\exp(2i\pi/\tau')$ ne sont pas simultanément algébriques. Puisque $\tau' = -1/\tau$ c'est bien le résultat annoncé. □

**Remarque.** La méthode utilisée ci-dessus permet de retrouver le fait que $\mathrm{Im}(\tau)$ et $\mathrm{Im}(\tau)/|\tau|^2$ sont transcendants. Voici comment.

$\circ$ $\mathrm{Im}(\tau)$ - On se donne $\tau \in \mathcal{H}$ avec $\mathrm{Im}(\tau) \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ et on suppose $\exp(2i\pi\tau)$ et $\exp(2i\pi/\tau)$ algébriques (donc $\tau$ est transcendant). On note $\beta := \mathrm{Im}(\tau)$ ; on a donc $\tau - 2i\beta = \bar{\tau}$ et ainsi $2i\pi/(\tau - 2i\beta)$ et $-2i\pi/\tau$ sont des nombres complexes conjugués. En conséquence $\exp(2i\pi/(\tau - 2i\beta))$ est algébrique.

Donc $2i\pi\tau, 2i\pi/\tau$ et $2i\pi/(\tau - 2i\beta)$ sont dans $L$. On applique de nouveau le lemme 6-B, avec
$x_1 = 2i\pi$, $x_2 = 2i\pi(\tau - 2i\beta)$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1/\tau$, $y_3 = 1/(\tau - 2i\beta)$ ;
les familles $(x_1, x_2)$ et $(y_1, y_2, y_3)$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-libres car $\tau$ est transcendant. Il reste à vérifier que les $x_i y_j$ sont tous dans $\mathcal{L}$, ce qui contredit la conclusion du lemme 6-B et fournit la contradiction cherchée.

$\circ$ $\mathrm{Im}(\tau)/|\tau|^2$ - On se donne $\tau \in \mathcal{H}$ avec $\mathrm{Im}(\tau)/|\tau|^2 \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$. On lui associe $\tau' = -1/\tau$ ; on a $\mathrm{Im}(\tau') = \mathrm{Im}(\tau)/|\tau|^2$ et on peut donc conclure en utilisant la partie précédente.

En direction de (C4) on voit donc que, pour $\tau \in \mathcal{H}$,
$\mathbb{Q}\Big(\exp(2i\pi\tau), \exp(2i\pi/\tau)\Big)$ est de degré transcendance $\geq 1$ dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $\circ$ $2i\pi$ et $\tau$ sont algébriquement liés,
- $\circ$ $\mathrm{Re}(\tau) \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$,
- $\circ$ $\mathrm{Im}(\tau) \in \overline{\mathbb{Q}}$,
- $\circ$ $\mathrm{Re}(\tau)/|\tau|^2 \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$,
- $\circ$ $\mathrm{Im}(\tau)/|\tau|^2 \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Evidemment cela ne dit pas encore que la Proposition (C4) est vraie. Tous les résultats de ce paragraphe IV ont été obtenus en utilisant la seule fonction exponentielle. Comme on l'a vu au paragraphe II, il serait intéressant d'aller plus loin à l'aide de la fonction modulaire.

## Bibliographie


[1] K. Barré, G. Diaz, F. Gramain, G. Philibert, *Une preuve de la conjecture de Malher-Manin*, Invent.Math. **124** (1996), 1-9.

[2] D. Bertrand, *Theta functions and transcendence*, Madras Number Theory Symposium 1996,, The Ramanujan J. Math. (à paraître).

[3] D. Brownawell, *The algebraic independence of certain numbers related by the exponential function*, Journal of Number Theory **6** (1974), 22-31.

[4] Y. V. Nesterenko, *Modular functions and transcendence problems*, C.R.Acad.Sci.Paris, **Sér.1 322** (1996), 909-914.

[5] D. Roy, *Matrices whose coefficients are linear forms in logarithms*, Journal of Number Theory **41** (1992), 22-47.

[6] D. Roy, M. Waldschmidt, *Quadratic relations between logarithms of algebraic numbers*, Proc.Japan Acad.Sci. **Sér.A, 71** (1995), 151-153.

[7] Th. Schneider, *Introduction aux nombres transcendants*, Gauthier-Villars (1959).

[8] J. P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Sup, PUF, (1970).

[9] M. Waldschmidt, *Sur la nature arithmétique des valeurs de fonctions modulaires*, Séminaire Bourbaki **824** (1996-97).

[10] M. Waldschmidt, *Transcendance et indépendance algébrique de valeurs de fonctions modulaires*, CNTA 5 Carleton (Août 1996), à paraître.

[11] M. Waldschmidt, *Solution du huitième problème de Schneider*, Journal of Number Theory **5** (1973), 191-202.

[12] M. Waldschmidt, *On the transcendence methods of Gel'fond and Schneider in several variables*, A.Baker (éditeur), Cambridge Univ.Press, London Math. Soc. Lectures Notes, New advances in transcendence theory, Proc.Durham Conf. 1986.

[13] M. Waldschmidt, *Linear independence of logaritms of algebraic numbers*, Matscience Lecture Notes, Madras (1992).

Guy Diaz
Université de Saint-Etienne
Equipe de Théorie des Nombres
23, rue du Dr. Paul Michelon
42023 Saint-Etienne Cedex 2
FRANCE