Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux ***9*** *(1997), 69–74*

Inégalités sur la mesure de Mahler d'un polynôme

par V. FLAMMANG

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous donnons une minoration de la mesure de Mahler d'un polynôme à coefficients entiers, dont toutes les racines sont d'une part réelles positives, d'autre part réelles, en fonction de la valeur de ce polynôme en zéro. Ces minorations améliorent des résultats antérieurs de A. Schinzel. Par ailleurs, nous en déduisons des inégalités de M.-J. Bertin, liant la mesure d'un nombre algébrique à sa norme.

ABSTRACT. In this paper, we give a lower bound for the Mahler measure of a polynomial with integer coefficients whose roots are first all positive then all real, in function of the value of this polynomial at zero. These lower bounds improve some precedent Schinzel's results. We also deduce some inequalities of M.-J. Bertin, connecting the measure and the norm of an algebraic number.

1. Introduction.

Soit $P = a_0x^d + ... + a_d = a_0(x - \alpha_1)...(x - \alpha_d)$, $a_0a_d \neq 0$, $P \neq x$, un polynôme à coefficients complexes. La *mesure de Mahler* de P se définit par :

$$M(P) = |a_0| \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|).$$

La *mesure de Mahler* d'un nombre algébrique α non nul est la mesure de Mahler de son polynôme minimal P dans $\mathbb{Z}[x]$.
Dans le cas d'un polynôme totalement positif (i.e. dont toutes les racines sont réelles positives), nous montrons :

THÉORÈME 1.1. *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement positif, non divisible par x et $x - 1$ et tel que $|P(1)| \geq 1$. Alors*

$$M(P)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}} + 1}}{2} .$$

Manuscrit reçu le 3 décembre 1996.

Cette inégalité se déduit du résultat plus général suivant :

PROPOSITION 1.2. *Soit c un réel,* $0 < c < 1/2$.
Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement positif. Alors

$$M(P) \geq |P(0)|^c.|P(1)|^{1-2c}.\left(\frac{(1-c)^{1-c}}{c^c.(1-2c)^{1-2c}}\right)^d .$$

Remarque : Si P est à coefficients entiers, la condition $|P(1)| \geq 1$ est réalisée lorsque $x-1$ ne divise pas P.
Pour un polynôme totalement réel (i.e. dont toutes les racines sont réelles), nous obtenons des résultats analogues.

THÉORÈME 1.3. *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement réel, non divisible par x, $x-1$, $x+1$ et tel que $|P(\underline{+}1)| \geq 1$. Alors*

$$M(P)^{\frac{2}{d}} \geq \frac{1+\sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}}+1}}{2} .$$

Cette inégalité est issue de la proposition suivante :

PROPOSITION 1.4. *Soit c un réel,* $0 < c < 1/2$.
Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement réel. Alors

$$M(P) \geq |P(0)|^c.|P(1).P(-1)|^{\frac{1-2c}{2}}.\left(\frac{(1-c)^{1-c}}{c^c.(1-2c)^{1-2c}}\right)^{\frac{d}{2}} .$$

Remarque : Si P est à coefficients entiers, la condition $|P(\underline{+}1)| \geq 1$ est réalisée lorsque $x-1$ et $x+1$ ne divisent pas P.
A. Schinzel [2] a montré que :

THÉORÈME 1.5. *Soit α un entier algébrique totalement positif, $\alpha \neq 0, 1$ (resp. totalement réel, $\alpha \neq 0, 1, -1$). Alors*

$$M(\alpha)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad (\textit{resp.}\ \ M(\alpha)^{\frac{2}{d}} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}) .$$

Pour un tel entier α, de polynôme minimal P, on a $|P(0)| \geq 1$ et donc

$$\frac{1+\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}}+1}}{2} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad (\text{resp.}\ \ \frac{1+\sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}}+1}}{2} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}) .$$

Par conséquent, les inégalités des théorèmes 1.1 et 1.3 sont meilleures que celles démontrées par Schinzel.
Dans le dernier paragraphe, nous prouvons que ces inégalités sont également meilleures que des inégalités établies par M.-J. Bertin, faisant intervenir la mesure de Mahler et la norme de α, entier algébrique totalement positif puis totalement réel.

2. Démonstration de la proposition 1.2.

2.1. Principe de la démonstration. Soit c, $0 < c < 1/2$ et soit f la fonction définie pour $x > 0,\ x \neq 1$ par :

$$f(x) = \log_+(x) - (c\log(x) + (1-2c)\log|x-1|)$$

où $\log_+(x) = \log(\max(1,|x|))$. Supposons que $\min_{x>0} f(x) = m$.
Soit P un polynôme P satisfaisant les conditions du théorème et de racines $(\alpha_i)_{(1\leq i\leq d)}$. Alors

$$\log_+(\alpha_i) \geq c\log(\alpha_i) + (1-2c)\log|\alpha_i - 1| + m \quad 1 \leq i \leq d$$

et en sommant sur i, il vient

$$\log_+(\prod_{i=1}^{d}\alpha_i) \geq c\log(\prod_{i=1}^{d}\alpha_i) + (1-2c)\log(\prod_{i=1}^{d}|\alpha_i - 1|) + dm$$

ce qui donne

$$M(P) \geq |P(0)|^c.|P(1)|^{1-2c}.e^{md}\ .$$

2.2. Détermination de m. Pour $x > 0,\ x \neq 1$, on a $f(x) = f(\frac{1}{x})$, ce qui permet de restreindre l'étude de f à l'intervalle $]0,1[$.
Sur $]0,1[$, f s'écrit : $f(x) = -(c\log(x) + (1-2c)\log(x-1))$. Le numérateur de la dérivée de f, noté f_1, vaut :

$$f_1(x) = (1-c)x - c.$$

Par conséquent, f' admet une unique racine $\frac{c}{1-c}$ comprise entre 0 et 1 et f y atteint son minimum.
Il reste à calculer m.
$m = f\left(\dfrac{c}{1-c}\right) = \log\left(\dfrac{(1-c)^{1-c}}{c^c.(1-2c)^{1-2c}}\right)$.
Ceci termine la preuve de la proposition 1.2.

3. Démonstration du théorème 1.1.

Soit P un polynôme satisfaisant les conditions du théorème 1.1. La proposition 1.2 implique :

$$M(P) \geq \underbrace{|P(0)|^c.\left(\frac{(1-c)^{1-c}}{c^c.(1-2c)^{1-2c}}\right)^d}_{(1)}\ .$$

On veut déterminer c de sorte que l'expression (1) soit la plus grande possible. Pour cela, nous étudions la fonction g définie sur $]0,1/2[$ par :

$$g(c) = c\log|P(0)| + d\,((1-c)\log(1-c) - c\log c - (1-2c)\log(1-2c)).$$

Sa dérivée vaut :

$$g'(c) = \log|P(0)| + \log\left(\frac{(1-2c)^2}{c(1-c)}\right)^d$$

et g atteint son maximum sur $]0,1/2[$ en

$$c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}}+1}}.$$

Il reste à remplacer cette valeur de c dans l'expression (1) pour aboutir à l'inégalité du théorème 1.1.

4. Démonstration du théorème 1.3.

Le principe est le même que pour le théorème 1.1. Aussi nous n'en donnerons que les différentes étapes.
Soit c, $0 < c < 1/2$. La fonction h qui intervient dans la preuve de la proposition 1.4 se définit pour $x \in \mathbb{R}^*$, $x \neq \pm 1$ par :

$$h(x) = 1/2 f(x^2),$$

où f est la fonction définie dans le paragraphe (2.1).
Cette relation fournit directement le minimum m' de h :

$$m' = \frac{1}{2}.f\left(\frac{c}{1-c}\right) = \log\left(\frac{(1-c)^{1-c}}{c^c.(1-2c)^{1-2c}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit enfin P un polynôme satisfaisant les conditions du théorème 1.3. La proposition 1.4 implique :

$$M(P) \geq \underbrace{|P(0)|^c.\left(\frac{(1-c)^{1-c}}{c^c.(1-2c)^{1-2c}}\right)^{\frac{d}{2}}}_{(2)}.$$

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe 3 montre que la valeur de c pour laquelle l'expression (2) est la meilleure possible est :

$$c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}}+1}}.$$

Puis on remplace cette valeur de c dans (2) pour obtenir l'inégalité du théorème 1.3.

5. Comparaison avec des inégalités de M.-J. Bertin.

5.1. Cas totalement positif. Soit α un entier algébrique totalement positif non nul, $\alpha \neq 1$. Son polynôme minimal P est à coefficients entiers, unitaire, irréductible et totalement positif. P satisfait donc les conditions du premier théorème. L'inégalité s'écrit alors :

$$M(\alpha)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1+\sqrt{4|N(\alpha)|^{\frac{1}{d}}+1}}{2} .$$

M.-J. Bertin [1] a obtenu le résultat suivant :

Théorème 5.1. *Si α est un entier algébrique totalement positif, $\alpha \neq 0, 1$ alors*

$$M(\alpha)^{\frac{1}{d}} \geq |N(\alpha)|^{\frac{1}{2d}} . \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{|N(\alpha)|^{\frac{1}{2d}}}} .$$

Nous nous proposons de montrer que :

$$\frac{1+\sqrt{4|N(\alpha)|^{\frac{1}{d}}+1}}{2} \geq |N(\alpha)|^{\frac{1}{2d}} . \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{|N(\alpha)|^{\frac{1}{2d}}}} \qquad (3) .$$

Posons $t = (1+\sqrt{5})/2$ et $x = |N(\alpha)|^{-1/2d}, \quad 0 < x \leq 1$.
L'inégalité (3) devient :

$$\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2} \geq t^x$$

soit encore $\quad 0 \geq t^x - t^{-x} - x$.
Pour $0 \leq x \leq 1$, définissons $\phi(x) = t^x - t^{-x} - x$.
$\phi''(x) = (\log t)^2.(t^x - t^{-x})$ est toujours supérieure ou égale à zéro. De plus, $\phi'(0) < 0$ et $\phi'(1) > 0$ donc ϕ' ne s'annule qu'une fois en $x_0 \in]0,1[$ et x_0 est un minimum pour ϕ. Comme $\phi(0) = \phi(1) = 0$, il en résulte que la fonction ϕ est toujours négative ou nulle sur $[0,1]$. Ceci prouve l'inégalité (3).

5.2. Cas totalement réel. Dans ce cas, M.-J. Bertin [1] a montré :

Théorème 5.2. *Si α est un entier algébrique totalement réel, $\alpha \neq 0, 1, -1$ alors*

$$M(\alpha)^{\frac{2}{d}} \geq \max\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), |N(\alpha)|^{\frac{1}{d}} . \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{|N(\alpha)|^{\frac{1}{d}}}}\right) .$$

Soit α un entier algébrique totalement réel non nul, $\alpha \neq \pm 1$. Son polynôme minimal P est à coefficients entiers, unitaire, irréductible et totalement réel. P satisfait les conditions du second théorème dont l'inégalité s'écrit :

$$M(\alpha)^{\frac{2}{d}} \geq \frac{1+\sqrt{4|N(\alpha)|^{\frac{2}{d}}+1}}{2} .$$

Comme $|N(\alpha)| \geq 1$, on a toujours :

$$\frac{1+\sqrt{4|N(\alpha)|^{\frac{2}{d}}+1}}{2} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Il reste à montrer que :

$$\frac{1+\sqrt{4|N(\alpha)|^{\frac{2}{d}}+1}}{2} \geq |N(\alpha)|^{\frac{1}{d}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{|N(\alpha)|^{\frac{1}{d}}}} \qquad (4) .$$

Posons $t = 1+\sqrt{5}/2$ et $x = |N(\alpha)|^{-\frac{1}{d}}, \quad 0 < x \leq 1$.
L'inégalité (4) devient :

$$\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2} \geq t^x,$$

inégalité qui a été démontrée dans le cas totalement positif.

Bibliographie

[1] M.-J. Bertin, Exposé au Cinquième Congrès de l'Association Canadienne de Théorie des Nombres (Ottawa, août 1996).

[2] A. Schinzel, On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer, *Acta Arith.* **24** (1973), 385-399.

V. Flammang
URA CNRS n^o399,
Département de Mathématiques et Informatique,
Université de Metz, Ile du Saulcy,
57045 Metz Cedex 1. France
e-mail: flammang@poncelet.univ-metz.fr