Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **9** *(1997), 169–181*

Une famille de réseaux dual-extrêmes

par Jacques MARTINET[1]

Résumé. On construit pour tout entier $n \geq 8$ pair un couple dual-extrême (Λ, Λ^*) de réseaux euclidiens de dimension n dont aucun n'est parfait, et tel que l'un d'entre eux seulement soit eutactique.

Abstract. We construct for every even $n \geq 8$ a pair (Λ, Λ^*) of dual-extreme Euclidean lattices of dimension n, such that none of them is perfect and only one is eutactic.

Soit E un espace euclidien de dimension n. L'*invariant d'Hermite* d'un réseau L de E est $\gamma(L) = \dfrac{N(L)}{\det(L)^{1/n}}$, où $N(x) = x.x$ pour tout $x \in E$, $N(L) = \min_{x \in L \smallsetminus \{0\}} N(x)$ et le *déterminant* $\det(L)$ *de* L est le déterminant de la *matrice de Gram* $(e_i.e_j)$ d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de L. Les *réseaux extrêmes* (Korkine et Zolotareff) sont ceux sur lesquels γ atteint un maximum local. Ils ont été caractérisés par Voronoï comme réseaux parfaits et eutactiques, notions que l'on peut définir ainsi en suivant [B-M] : notons p_F la projection orthogonale sur le sous-espace F de E et posons $p_x = p_{\mathbb{R}x}$ pour $x \in E$ non nul ; soit en outre $S(L) = \{x \in L \mid N(x) = N(L)\}$; un réseau est *parfait* si les p_x, $x \in S(L)$ engendrent E, et eutactique s'il existe une relation $\mathrm{Id} = \sum_{x \in S(L)} \rho_x p_x$ à coefficients $\rho_x > 0$.
[On retrouve les définitions usuelles en exprimant les p_x dans un couple de bases $(\mathcal{B}^*, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une base de L ; nous renvoyons à [M], ch. III pour tout ce qui concerne ces questions, ainsi que pour les notions duales rappelées ci-dessous.]

Soit $L^* = \{x \in E \mid \forall y \in E, x.y \in \mathbb{Z}\}$ le *réseau dual de* L. Comme dans [B-M], on pose $\gamma'(L) = [N(L)N(L^*)]^{1/2} = [\gamma(L)\gamma(L^*)]^{1/2}$. Les réseaux *dual-extrêmes* sont ceux sur lesquels γ' atteint un maximum local. Disons que L est *dual-parfait* si les p_x, $x \in S(L) \cup S(L^*)$ engendrent E,

---

mots-clefs : Réseaux extrêmes, réseaux dual-extrêmes, vecteurs minimaux.
Manuscrit reçu le 19 décembre 1996

[1]Membre du laboratoire d'Algorithmique Arithmétique "A2X", U.M.R. 9936 du C.N.R.S.

et *dual-eutactique* s'il existe une relation $\sum_{x\in S(L)}\rho_x p_x=\sum_{y\in S(L^*)}\rho'_y p_y$ à coefficients $\rho_x,\rho'_y>0$.

Les réseaux dual-extrêmes ont été caractérisés dans [B-M] comme réseaux dual-parfaits et dual-eutactiques. Il en résulte tout de suite que si Λ est extrême et Λ^* eutactique, alors Λ est dual-extrême, la dual-perfection de (L,L^*) résultant de celle de L et la condition de dual-eutaxie provenant de la conjonction de deux relations de la forme

$$\mathrm{Id}=\sum_{x\in S(L)}\rho_x p_x \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}=\sum_{y\in S(L^*)}\rho'_y p_y\,.$$

À ma connaissance, tous les exemples de réseaux dual-extrêmes trouvés jusqu'à présent l'ont été par ce procédé. Nous construisons ici pour toute dimension paire $n\geq 8$ des exemples de couples dual-extrêmes (Λ,Λ^*) dans lesquels ni Λ, ni Λ^* n'est parfait, et tels que Λ n'est pas eutactique. (Le fait que Λ^* soit eutactique n'apporte alors aucune aide à la démonstration de la dual-eutaxie.)

Il est démontré dans [B-M] que de tels exemples n'existent pas en dimension $n\leq 4$. Le cas des dimensions impaires $n\geq 5$ et celui de la dimension 6 demeurent ouverts. Si de tels exemples n'existaient pas dans les dimensions 5, 6 et 7, il en résulterait en particulier que la "constante de Bergé-Martinet" $\gamma'=\sup_{\mathrm{rg}\,L=n}\gamma'(L)$ aurait la valeur atteinte par γ' sur $\mathbb{D}_5$, $\mathbb{E}_6$ et $\mathbb{E}_7$. Ce résultat, que nous conjecturons, entraînerait d'intéressantes inégalités. Pour l'instant, γ' n'est connue que dans les dimensions 1, 2, 3, 4 et 8.

Les réseaux servant d'exemples ont été trouvés lors d'une étude dans la ligne de Watson ([W]) de réseaux Λ contenant un sous-réseau L de même norme, en l'occurence une classe de réseaux de la forme $\langle L,\dfrac{e_1+\cdots+e_n}{d}\rangle$. Le fait que l'on puisse définir cette classe en prenant les produits scalaires $e_i.e_j$ égaux pour $j\neq i$ résulte du lemme 7 de l'article [Z] de Zaharova. L'existence de cette classe pour $n=2d$ résulte de la proposition 3.2 ci-dessous.

[Dans la classification de [Z], il manque des classes, correspondant à des quotients Λ/Λ' de type $(4,2)$. Nous reviendrons ailleurs sur cette question.]

Finalement, on remarque que notre construction du réseau dual de Λ se fait par collage (adjonction d'un *glue vector*) à un réseau de la forme $\mathbb{A}_{n-1}\perp\lambda\mathbb{A}_1$. Des exemples en d'autres dimensions que les dimensions $n\geq 8$ paires pouraient probablement être obtenus en partant de réseaux $\mathbb{A}_p\perp\lambda\mathbb{A}_{p'}$.

Le problème crucial est la détermination des vecteurs minimaux des réseaux Λ^* et Λ ; elle se fait aux numéros 2 et 3 en utilisant deux réseaux auxiliaires, M d'indice 2 dans Λ^*, et L d'indice $d = \frac{n}{2}$ dans Λ.

1. Soit A un anneau commutatif, et soit $M(n,x,y) \in \mathcal{M}_n(A)$ la matrice carrée d'ordre n dont les termes diagonaux sont égaux à x et les autres à y. Ces matrices constituent une algèbre commutative de rang 2 sur A, les lois étant

$$M(n,x,y) + M(n,x',y') = M(n, x+x', y+y') \quad \text{et}$$

(1.1)

$$M(n,x,y)\, M(n,x',y') = M(n, xx' + (n-1)yy', xy' + x'y + (n-2)yy')\,.$$

On a

$$\det(M(n,x,y)) = (x-y)^{n-1}(x+(n-1)y) \quad \text{et}$$

(1.2)

$$M(n,x,y)^{-1} = M\big(n, \frac{x+(n-2)y}{(x-y)(x+(n-1)y)}, \frac{-y}{(x-y)(x+(n-1)y)}\big)$$

lorsque le déterminant est non nul.

Considérons en particulier les matrices de la forme

$$M(n,1,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \theta & \dots & \theta \\ \theta & 1 & \dots & \theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta & \theta & \dots & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Elles représentent une forme quadratique définie positive pour $\theta \in]-\frac{1}{n-1}, 1[$. On peut alors les interpréter comme matrices de Gram d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ d'un espace euclidien E de dimension n. On note L_θ le réseau de E de base $\mathcal{B}$.

Le groupe symétrique S_n opère sur $\mathcal{B}$, et cette opération conserve les produits scalaires $e_i.e_j$. Ainsi, on peut identifier $\{\pm \mathrm{Id}\} \times S_n$ à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(L_\theta)$, qui sont des G-réseaux au sens de [M], ch. XI pour la représentation de $G = S_n$ définie par l'opération sur $\mathcal{B}$.

La formule de multiplication montre que $\theta \mapsto \theta^* = \frac{-\theta}{(n-2)\theta+1}$ est une involution de l'intervalle $]-\frac{1}{n-1}, 1[$, qui transforme $M(n,1,\theta)$ en une matrice $M(n,1,\theta^*)$ proportionnelle à son inverse. Comme $2M(n,1,\frac{1}{2})$ est une matrice de Gram du réseau $\mathbb{A}_n$, on voit que l'involution échange les extrémités de l'intervalle $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$, lesquelles représentent les réseaux $\mathbb{A}_n^*$ et $\mathbb{A}_n$ renormalisés à la norme 1. Ces deux réseaux sont G-parfaits, et l'exemple 5.4 de [M], ch. XIII, qui interprète $\theta \mapsto L_\theta$ comme un chemin de l'algorithme de Voronoï pour G, montre que L_θ est de norme 1 sur l'intervalle fermé $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$, et n'a pas d'autre vecteurs minimaux sur l'intervalle ouvert que les vecteurs $\pm e_i$. Il en résulte l'égalité $\mathrm{Aut}(L_\theta) = \{\pm \mathrm{Id}\} \times S_n$ pour tout $\theta \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}[$, sauf au point fixe $\theta = 0$ de l'involution, correspondant au réseau isodual $\mathbb{Z}^n$.

2. On considère maintenant le réseau $\Lambda_\theta = \Lambda$ obtenu par adjonction du vecteur $e = \dfrac{e_1 + \cdots + e_n}{d}$ au réseau $L = L_\theta$ de base $\mathcal{B}$, où $d \geq 3$ est entier. On s'intéresse au cas où la norme reste égale à 1. Le calcul fait ci-dessous de la norme des vecteurs $e - e_i$ montre que ce n'est possible que si l'on a $n \geq 2d$, l'égalité $n = 2d$ ayant lieu si et seulement si les n vecteurs $e - e_i$ sont aussi de norme 1 ; c'est un cas particulier d'un résultat de Watson ([W]).

Nous nous plaçons dorénavant dans le cas $n = 2d$.

On a $e.e_i = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^n e_i.e_j = \frac{1+(2d-1)\theta}{d}$, d'où l'on déduit pour la norme des vecteurs $e - e_{i_1} - \cdots - e_{i_k}$, $0 \leq k \leq n$ la valeur

$$\textbf{(2.1)} \qquad N(e - e_{i_1} - \ldots e_{i_k}) - 1 = (k-1)\frac{d - 2 + \big((k-4)d + 2\big)\,\theta}{d}\,.$$

Supposons toujours Λ de norme au moins 1. En faisant $k = 1$, on obtient les égalités $N(e - e_i) = 1$; en faisant $k = 0$ et $k = 2$, on obtient l'encadrement

$$\textbf{(2.2)} \qquad a = \frac{d-2}{2(2d-1)} \leq \theta \leq b = \frac{d-2}{2(d-1)}\,,$$

qui suffit à assurer les inégalités $N(e - e_{i_1} - \ldots e_{i_k}) \geq 1$ pour tout k.

Les vecteurs $f_1 = e, f_2 = e_2, \ldots, f_n = e_n$ constituent une base de Λ dont la base duale est formée des vecteurs $f_1^* = de_1^*$ et $f_i^* = e_i^* - e_1^*$ pour $i \geq 2$. Les égalités

$$\textbf{(2.3)} \qquad e_1^* + \cdots + e_n^* = ne_1^* + \sum_{i=1}^n (e_i^* - e_1^*) = 2f_1^* + \sum_{i=2}^n f_i^*\,,$$

montrent que les vecteurs $e' = e_1^* + \cdots + e_n^*$ et $e_j^* - e_i^*$ $(1 \leq i < j \leq n)$ engendrent un sous-réseau M d'indice 2 de Λ^*. Notons α et β les valeurs respectives des produits scalaires $e_i^*.e_i^*$ et $e_i^*.e_j^*$ $(j \neq i)$. Étant donnés des indices i, j, k distincts, on a $N(e_i^* - e_j^*) = 2\alpha - 2\beta$ et $(e_i^* - e_j^*).(e_i^* - e_k^*) = \alpha - \beta$. Comme e' est orthogonal aux vecteurs $e_i^* - e_j^*$, on voit que M est semblable à $P_\lambda = \mathbb{A}_{n-1} \perp \sqrt{\lambda}\mathbb{A}_1$, avec $\lambda = \frac{N(e')}{N(e_i^* - e_j^*)} = \frac{n(\alpha + (n-1)\beta)}{2(\alpha - \beta)}$.

En utilisant 1.2 avec $x = 1$ et $y = \theta$, on trouve

$$\alpha = \frac{1 + (n-2)\theta}{(1-\theta)(1+(n-1)\theta)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-\theta}{(1-\theta)(1+(n-1)\theta)},$$

d'où

$$(\mathbf{2.4}) \qquad \alpha - \beta = \frac{1}{1-\theta} \quad \text{et} \quad \alpha + (n-1)\beta = \frac{1}{1+(n-1)\theta},$$

et finalement

$$(\mathbf{2.5}) \qquad \lambda = \frac{n(1-\theta)}{2(1+(n-1)\theta)},$$

fonction décroissante de θ, égale à 1 en $c = \dfrac{n-2}{3n-2} = \dfrac{d-1}{3d-1}$.

Avec les notations de 2.2, on a $a < c < b$ pour $d \geq 4$ et $a < c = b$ pour $d = 3$. Dans ce dernier cas, que nous écartons dans la suite, on voit facilement que Λ est semblable au réseau $\mathbb{E}_6^*$ (on peut utiliser par exemple la matrice de Gram qui figure dans [C-S1]).

Selon que l'on a $\lambda < 1$, $\lambda > 1$ ou $\lambda = 1$, $S(M)$ est égal à $S' = \{\pm(e_1^* + \cdots + e_n^*)\}$, à $S'' = \{\pm(e_j^* - e_i^*),\, j \neq i\}$ ou à $S' \cup S''$, d'où en particulier $s(M) = 1$, $s(M) = \frac{n(n-1)}{2}$ ou $s(M) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$.

Munissons l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$ de sa base canonique orthonormale $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. On peut alors identifier $\mathbb{A}_{n-1} \perp \sqrt{\lambda}\mathbb{A}_1$ au réseau de base $(\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_0 - \varepsilon_{n-1}, \sqrt{2\lambda}\varepsilon_n)$ de l'hyperplan H d'équation $x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0$. On définit une similitude φ de E sur H en appliquant $e_i^* - e_1^*$ sur $\varepsilon_0 - \varepsilon_i$ et e' sur $\sqrt{2\lambda}\varepsilon_n$. On a alors $\varphi(M) = \mathbb{A}_{n-1} \perp \sqrt{\lambda}\mathbb{A}_1$, et, en tenant compte de l'expression de f_1^* donnée en 2.3, on voit que $\varphi(L^*) = \varphi(M) \cup (g + \varphi(M))$, avec $g = \dfrac{n\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \cdots - \varepsilon_{n-1} + \sqrt{2\lambda}\varepsilon_n}{2}$. Posons $\varepsilon'_n = \sqrt{2}\varepsilon_n$.

2.6. Proposition. *Pour tout $d \geq 4$, on a $S(\Lambda^*) = S(M)$.*

Démonstration. Modulo M, on a

$$g \equiv g' = \frac{\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{d-1} - \varepsilon_d - \cdots - \varepsilon_{n-1} + \sqrt{\lambda}\varepsilon'_n}{2},$$

et il est clair que g' est l'un des vecteurs de $g+M$ de longueur minimale. On a donc, pour tout $x \in \Lambda \smallsetminus M$, $N(x) \geq N(g') = \dfrac{n+2\lambda}{4} = \dfrac{d+\lambda}{2} > 2$. $\square$

3. Nous revenons maintenant au réseau Λ, dont nous déterminons la norme en utilisant les propriétés du couple (M, M^*). On a $[\Lambda^* : M] = [M^* : \Lambda] = 2$, et $\varphi' = {}^t\varphi^{-1}$ applique $P_\lambda^* = \mathbb{A}_{n-1}^* \perp \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\mathbb{A}_1$ sur M^*. On a $\varphi(\Lambda^*) = \langle M^*, g'\rangle$, donc

$$\varphi'(\Lambda) = \{z \in P_\lambda^* \mid g'.z \equiv 0 \mod 2\}\,.$$

Posons $\varepsilon' = \sum_{j=0}^{d} \varepsilon_j$, $\varepsilon'' = \sum_{j=d}^{n-1} \varepsilon_j$, $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, et écrivons les éléments $z \in P_\lambda^*$ sous la forme $z = x + \frac{q}{\sqrt{2\lambda}}\varepsilon'_n$, $x \in \mathbb{A}_{n-1}^*$, $q \in \mathbb{Z}$. Alors,

$$\textbf{(3.1)} \qquad z \in \varphi'(\Lambda) \Leftrightarrow x.(\varepsilon' - \varepsilon'') + q \equiv 0 \mod 2\,.$$

Nous aurons besoin de quelques propriétés du réseau $\mathbb{A}_{n-1}^*$.

Il y a n couples de vecteurs minimaux de $\mathbb{A}_{n-1}^*$, représentés par les vecteurs $g_i = -\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{n}$ $(0 \leq i \leq n-1)$, de somme nulle, de norme $\frac{n-1}{n}$, et les autres vecteurs non nuls de $\mathbb{A}_{n-1}^*$ sont de norme au moins $\frac{2n-4}{n}$, cette valeur étant atteinte sur les $\frac{n(n-1)}{2}$ couples $\pm(g_i - g_j)$, $(0 \leq i < j \leq n)$; ce résultat, certainement bien connu, peut se vérifier en interprétant $\mathbb{A}_m^*$, $(m \geq 2)$ comme la projection orthogonale de $\mathbb{Z}^{m+1}$ sur l'hyperplan contenant $\mathbb{A}_m$, ce qui revient à écrire la forme quadratique correspondante (renormalisée au minimum n) sous la forme $\sum_{i=1}^m x_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq m}(x_i - x_j)^2$. En outre, les vecteurs $g_1, \ldots, g_n$ constituent une base de $\mathbb{A}_{n-1}^*$.

3.2. Proposition. *Le réseau Λ est de norme* 1 *pour tout θ de l'intervalle fermé $[a,b]$, et n'a pas d'autres vecteurs minimaux sur l'intervalle ouvert que les $2n$ couples $\pm e_i, \pm(e - e_i)$.*

Démonstration. On a $g_i.(\varepsilon' - \varepsilon'') = \pm 1$. Donc, pour $x = \sum_{i=1}^n a_i g_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$, la congruence 3.1 s'écrit $\sum a_i \equiv q \mod 2$. Par conséquent, les vecteurs minimaux de $\varphi'(\Lambda)$ sont à rechercher parmi les vecteurs de l'un des trois types suivants :

(1) $q = 0$, deux des a_i valent 1 ou -1, et les autres sont nuls.
(2) $q = \pm 2$, et les a_i sont tous nuls.
(3) $q = \pm 1$, l'un des a_i vaut ± 1, et les autres sont nuls.

Comme φ applique $e_1^* - e_2^*$, de norme $2(\alpha - \beta) = \frac{2}{1-\theta}$ (formule 2.4), sur un vecteur minimal de $\mathbb{A}_{n-1}$, φ a pour rapport de similitude $\sqrt{1-\theta}$.

Dans le cas (1), les vecteurs correspondants de Λ sont de norme $N_1 = (1-\theta)\frac{2n-4}{n}$, et l'inégalité $N_1 \leq 1$ n'est possible que pour $\theta \geq 1 - \frac{n}{2n-4} = 1 - \frac{d}{2d-2} = \frac{d-2}{2(d-1)} = b$. Dans le cas (2), les vecteurs correspondants de Λ sont de norme $N_2 = \frac{2(1-\theta)}{\lambda}$, et l'inégalité $N_2 \leq 1$ n'est possible que pour $\frac{2(1-\theta)}{\lambda} \leq 1$. En utilisant 2.5, on voit que cette inégalité équivaut à $\theta \leq \frac{d-2}{2n-1} = a$.

Dans le cas (3), la norme est

$$N_3 = (1-\theta)(\frac{n-1}{n} + \frac{2}{\lambda}) = (1-\theta)(\frac{n-1}{n}) + \frac{1+(n-1)\theta}{n} = 1\,.$$

Il y a exactement $2n$ couples de tels vecteurs, représentés par les vecteurs $g_i \pm \frac{\varepsilon'_n}{\sqrt{2\lambda}}$, qui correspondent nécessairement aux $2n$ couples $\pm e_i, \pm(e-e_i)$ de vecteurs de norme 1 de Λ. $\square$

3.3. Remarque. On peut encore interpréter le chemin $\theta \mapsto \Lambda_\theta$ ($\theta \in [a,b]$) comme un chemin de voisinage pour l'algorithme de Voronoï relatif au groupe S_n.

4. On a identifié au n° 1 le groupe $\mathrm{Aut}(L_\theta)$ du réseau L_θ de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ au produit direct $\{\pm \mathrm{Id}\} \times S_n$. Ce groupe invarie $e = \frac{e_1 + \cdots + e_n}{d}$, et s'identifie donc à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Lambda_\theta)$.

4.1. PROPOSITION. *Soit $\sigma \in \mathrm{GL}(E)$ l'application définie par $\sigma(e_i) = e - e_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors, pour tout $\theta \in]a,b[$, σ est un automorphisme d'ordre 2 de $\Lambda = \Lambda_\theta$, et l'on a $\mathrm{Aut}(\Lambda) = \{\pm \mathrm{Id}\} \times \{\mathrm{Id}, \sigma\} \times S_n$. En outre, $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ est transitif sur $S(\Lambda)$.*

Démonstration. On a $\sigma(e) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^n (e - e_i) = \frac{n}{d}e - e = e$. Pour tout i, on a donc $\sigma^2(e_i) = \sigma(e - e_i) = e - (e - e_i) = e_i$, ce qui prouve que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. Comme σ commute avec S_n, le groupe G engendré par σ, $-\mathrm{Id}$ et S_n est bien le produit direct des trois sous-groupes de l'énoncé. Il est clair que G opère transitivement sur $S(\Lambda)$.

Les produits scalaires $e.e_i$ sont visiblement indépendants de i, et l'on a

$$N(e) = e.\frac{1}{d}\sum_i e_i = \frac{1}{d}\sum_i e.e_i = 2e.e_1\,.$$

Donc, quels que soient les indices i et j, on a $\sigma(e_i).\sigma(e_j) = (e-e_i).(e-e_j) = N(e) - 2e.e_1 + e_i.e_j = e_i.e_j$, ce qui prouve que σ est une isométrie.

Soit $\tau \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$. Par transitivité, il existe $\tau_1 \in G$ tel que $\tau' = \tau\tau_1$ fixe e_1. Pour tout $i \geq 2$, $\tau'(e_i)$ est de l'une des formes e_j, $-e_j$, $e - e_j$ ou

$-(e-e_j)$. On vérifie tout de suite que l'égalité $e_1.\tau'(e_i)=\theta$ n'est possible que lorsque $\tau'(e_1)$ est l'un des vecteurs e_j, ce qui prouve que $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ est réduit à G. □

[Variante : On a $\mathrm{Aut}(\Lambda)=\mathrm{Aut}(\Lambda^*)\simeq\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_{n-1})\times\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_1)$, et donc $|G|=|\mathrm{Aut}(\Lambda)|$.]

5. Nous nous occupons maintenant des questions d'extrémalité. Rappelons que $p_x\in\mathrm{End}^s(E)$ désigne la projection orthogonale sur la droite de E portée par le vecteur non nul x ; on a $p_x(y)=\frac{x.y}{x.x}x$.

Le groupe $\mathrm{O}(E)$ opère sur $\mathrm{End}^s(E)$ par ${}^\tau u=\tau u\tau^{-1}$; dans le cas des projections, on a ${}^\tau p_x=p_{\tau(x)}$.

Posons $u=\sum_{i=1}^n p_{e_i}$ et $v=\sum_{i=1}^n p_{(e-e_i)}$. Avec les notations de 4.1, on a $\sigma.u=v$.

5.1. Lemme. *On a* $u=v$. [On démontre en appendice que, pour $a<\theta<b$, c'est la seule relation de perfection ; autrement dit, le rang de perfection de Λ est égal à $2n-1$ sur cet intervalle.]

Démonstration. Il suffit de vérifier cette égalité sur les vecteurs de $\mathcal{B}^*$. On a $p_{e_i}(e_i^*)=e_i$ et $p_{e_i}(e_j^*)=0$ pour $j\neq i$, d'où $u(e_j^*)=e_j$.

On a de même $p_{e-e_i}(e_j^*)=(e.e_j^*-e_i.e_j^*)(e-e_i)$, donc $p_{e-e_i}(e_i^*)=(\frac{1}{d}-1)(e-e_i)$ et $p_{e-e_i}(e_j^*)=\frac{1}{d}(e-e_i)$ si $j\neq i$, d'où
$v(e_j^*)=(\frac{1}{d}-1)(e-e_j)+\sum_{i\neq j}\frac{1}{d}(e-e_i)=e_i$ par un calcul immédiat. □

[Variante : On utilise le fait que le carré extérieur de la représentation de S_n définie par E ne contient qu'une fois la représentation unité.]

5.2. Théorème. *Supposons $d\geq 4$ et prenons $\theta=c$ (i.e., $\Lambda=\Lambda_c$ avec $c=\dfrac{d-1}{3d-1}$). Alors, Λ est dual-extrême, mais ni Λ, ni Λ^* ne sont parfaits, et Λ n'est pas eutactique.*

Démonstration. Il est clair que ni Λ_θ, ni Λ_θ^* ne sont parfaits sur $]a,b[$, car on a $s(\Lambda)=2n<\frac{n(n+1)}{2}$ et $s(\Lambda^*)=\frac{n(n-1)}{2}<\frac{n(n+1)}{2}$. En revanche, ils sont dual-parfaits sur tout l'intervalle : en effet, les vecteurs $e_i^*-e_j^*$ forment une configuration parfaite de dimension $n-1$ (perfection du réseau $\mathbb{A}_{n-1}$), et les n vecteurs e_i sont indépendants et n'appartiennent pas à l'hyperplan engendré par les précédents ; on conclut à l'aide de [M], ch. III, prop. 5.3,(3) (qui n'utilise pas le fait qu'il s'agisse de vecteurs minimaux d'un même réseau).

Aucun des réseaux Λ_θ n'est eutactique : sinon, vu la transitivité de $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ sur $S(\Lambda)$, on aurait une relation de la forme $\mathrm{Id}=\lambda(u+v)$, et donc, vu le lemme 5.1, de la forme $\mathrm{Id} = \mu u = \mu \sum_{i=1}^{n} p_{e_i}$, ce qui est impossible car les droites d'une configuration eutactique de n droites doivent être deux à deux orthogonales, cf. [M], ch. III, prop. 6.10, (3). (En revanche, Λ^* est eutactique, puisque $S(\Lambda^*) \sim S(\mathbb{A}_{n-1}) \perp S(\mathbb{A}_1)$.)

Restreignons-nous maintenant au cas de $\theta = c$.

Pour prouver la dual-eutaxie, on utilise un argument de moyenne, montrant que, s'il existe une relation $\sum_{x \in S(\Lambda)} \rho_x p_x = \sum_{y \in S(\Lambda^*)} \rho_y p_y$ à coefficients ρ_x, ρ'_y positifs, il existe une telle relation ayant des coefficients positifs et constants sur les orbites de $\mathrm{Aut}(\Lambda)$, cf. [M], ch. III, prop. 8.8.

Ici, il y a une unique orbite ω dans $S(\Lambda)$ et deux orbites ω'_1 et ω'_2 dans $S(\Lambda^*)$ formées des vecteurs $\pm(e_i^* - e_j^*)$ et $\pm(e_1^* + \cdots + e_n^*)$. On doit considérer les sommes des projections orthogonales sur les directions de vecteurs minimaux, et l'on peut remplacer la somme sur ω_1 par $u = \sum_{i=1}^{n} p_{e_i}$ (lemme 5.1).

Posons $w = \sum_{1 \le i < j \le n} p_{e_i^* - e_j^*}$ et $w' = p_{e_1^* + \cdots + e_n^*}$. On cherche les relations de dual-eutaxie de la forme $u = \rho w + \rho' w'$, et, vu l'invariance de u, w, w' sous $\mathrm{Aut}(\Lambda)$, il suffit de tester l'égalité sur un vecteur de E dont l'orbite sous $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ engendre E. Faisons-le pour e_1. On pose $N^* = N(\Lambda^*)$ $(= \frac{2}{1-\theta})$.

On a $p_{e_1}(e_1) = e_1$, $p_{e_i}(e_1) = \theta e_1$ $(i > 1)$, donc $u(e_1) = e_1 + \sum_{i=2}^{n} \theta e_i$. De même,

$$w(e_1) = \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{(e_i^* - e_j^*).e_1}{N^*} (e_i^* - e_j^*) = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{N^*} (e_1^* - e_j^*)$$

et $w'(e_1) = \frac{1}{N^*}(e_1^* + \cdots + e_n^*)$.

En faisant les produits scalaires avec e_1 et avec un autre vecteur e_i (au choix), on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcrcl} 1 + (n-1)\theta^2 & = & \frac{n-1}{N^*}\rho_1 & + & \frac{1}{N^*}\rho_2 \\ 2\theta + (n-2)\theta^2 & = & -\frac{1}{N^*}\rho_1 & + & \frac{1}{N^*}\rho_2 \end{array}$$

dont l'unique solution est $\rho_1 = \dfrac{N^*}{n}(1-\theta)^2$ et $\rho_2 = \dfrac{N^*}{n}(1+(n-1)\theta)^2$.

On a donc construit une relation de dual-eutaxie à coefficients strictement positifs. □

On remarque que les réseaux Λ_c sont rationnels, c'est-à-dire proportionnels à des réseaux entiers. On sait (Bergé, [B]) que les réseaux dual-extrêmes sont algébriques. Il serait intéressant d'exhiber des réseaux dual-extrêmes qui soient algébriques irrationnels. Noter ([B-M]) que de tels réseaux n'existent pas en dimension $n \leq 4$.

Voici les principaux invariants de réseaux Λ_c. Comme il s'agit de réseaux rationnels, on peut considérer la plus petite norme N qui les rend entiers, et l'*invariant de Smith* $\mathrm{Smith}(\Lambda)$ *de* Λ, suite des diviseurs élémentaires du quotient Λ^*/Λ une fois Λ renormalisé à $N(\Lambda) = N$; le produit de m_1 groupes cycliques d'ordre a_1, de m_2 groupes cycliques d'ordre a_2, ... est noté $a_1^{m_1}.a_2^{m_2}\dots$, et r désigne le *rang de perfection de* Λ, dimension du sous-espace de $\mathrm{End}^s(E)$ engendré par les projections orthogonales sur les s directions de vecteurs minimaux. Enfin, on note s^*, r^*, N^* les quantités analogues relatives à Λ^*.

$\boxed{\text{Invariants de } \Lambda_c}$	$s = 2n$	$r = 2n-1$	$s^* = \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$	$r^* = s^*$
	d impair :	$N = \dfrac{3d-1}{2}$	$\mathrm{Smith} = d^{n-1}$	$N^* = 2.$
	d pair :	$N = 3d-1$	$\mathrm{Smith} = 4d.(2d)^{n-2}$	$N^* = 4.$

On a $\gamma'(\Lambda_c)^2 = \dfrac{3d-1}{d} = 3 - \dfrac{2}{n}$ pour tout $d \geq 3$, valeur conjecturale de ${\gamma'_6}^2$ dans le cas $d = 3$, mais modeste dans les dimensions supérieures en comparaison avec les exemples de [C-S2] ou de [Mar], ch. XIV. Toutefois, cet exemple surpasse $\mathbb{A}_n$ et $\mathbb{D}_n$, pour lesquels on a $\gamma'(\mathbb{A}_n)^2 = \dfrac{2n}{n+1} = 2 - \dfrac{2}{n+1}$ et $\gamma'(\mathbb{D}_n)^2 = 2$.

6. L'étude des réseaux Λ_b (i.e., pour $\theta = b = \frac{d-2}{2(d-1)}$) présente quelque intérêt. Il résulte de 2.1 et de la démonstration de la prop. 3.2 que l'on a $s = \frac{n(n+3)}{2}$, les couples de vecteurs minimaux étant représentés par les vecteurs e_i, $e - e_i$ et $e - e_j - e_k$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j < k \leq n$. On a $s^* = 1$ (c'est le cas $\lambda < 1$), et l'hyperplan H orthogonal à cette unique direction de vecteurs minimaux coupe Λ suivant un réseau Λ' de dimension $n-1$, dont le dual ${\Lambda'}^*$ est la projection orthogonale de Λ^* sur H. C'est donc un réseau semblable au réseau obtenu en supprimant dans les vecteurs de $\varphi(L^*)$ la composante portée par ε_n. On reconnaît là le réseau $\mathbb{A}_{n-1}^2$ de Coxeter (les réseaux $\mathbb{A}_m^r$, $r | m+1$ sont décrits dans [M], ch. V, § 2). Il en résulte que Λ' est semblable au réseau $\mathbb{A}_{n-1}^{n/2}$ de Coxeter, réseau parfait, avec $s = \frac{n(n-1)}{2}$, de groupe d'automorphismes $\{\pm \mathrm{Id}\} \times S_n$, dont les vecteurs minimaux sont les $\pm(e - e_i - e_j)$, $i < j$. On en déduit que Λ lui-même est parfait, vu qu'il possède n vecteurs minimaux indépendants en dehors de l'hyperplan de Λ', par exemple les n vecteurs e_i.

D'autre part, comme il y a au plus deux orbites de vecteurs minimaux, on peut, compte tenu du lemme 5.1, tester l'eutaxie en recherchant des relations de la forme

$$\mathrm{Id} = \alpha \sum_{i<j} p_{e-e_i-e_j} + 2\beta \sum_i p_{e_i}\,.$$

La trace fournit la relation $n = \frac{n(n-1)}{2}\alpha + 2n\beta$; en déterminant β par composition avec la projection sur e (vecteur orthogonal aux $e - e_i - e_j$), on obtient la relation

$$\mathrm{Id} = \frac{2\theta}{1+(n-1)\theta} \sum_{i<j} p_{e-e_i-e_j} + \frac{1}{2(1+(n-1)\theta)} \sum_i p_{e_i} + p_{e-e_i}\,,$$

qui montre que Λ_b est eutactique, donc extrême.

Ce résultat est encore valable pour $d = 3$, où Λ' est semblable à $\mathbb{A}_5^3$ et Λ à $\mathbb{E}_6^*$. Pour $d = 4$, Λ' est semblable à $\mathbb{E}_7^*$, et Λ à l'unique réseau parfait qui le contient comme section hyperplane de même norme (réseau P_8^7 de Laïhem, [L]).

Les invariants des réseaux Λ_b, avec les notations utilisées au numéro 5 pour Λ_c, sont $s = \dfrac{n(n+3)}{2}$, $r = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $s^* = r^* = 1$, $N = 2d-2$, $N^* = 2d$ si $d \equiv \pm 1 \mod 3$ et $N^* = \dfrac{2d}{3}$ si $d \equiv 0 \mod 3$; l'invariant de Smith dépend de d modulo 6.

L'énoncé suivant résume l'essentiel de ce qui précède :

6.1. Théorème. *Pour tout $n \geq 6$, le réseau Λ_b est un réseau extrême dont les sections hyperplanes les plus denses sont semblables au réseau $\mathbb{A}_{n-1}^{n/2}$ de Coxeter.*

Appendice : un calcul de rang de perfection

Soit E un espace euclidien de dimension n, soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, soit $d \in [2, n]$ un entier, et soit $e = \dfrac{e_1 + e_2 + \cdots + e_n}{d}$. On se propose de calculer le rang de perfection de la famille $e_i, e - e_i$, justifiant la remarque qui accompagne le lemme 5.1.

A1. Proposition. *Le rang de perfection de t vecteurs pris parmi les $2n$ vecteurs $e_i, e - e_i$ est égal à t, sauf si $t = 2n = 4d$, cas dans lequel il est égal à $t - 1 = 2n - 1$.*

Démonstration. On note X_i et Y_i les vecteurs-colonnes des composantes dans $\mathcal{B}$ des vecteurs e_i et $e - e_i$. Le rang de perfection est le rang dans

$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ du sous-espace engendré par les matrices $X_i{}^tX_i$ et $Y_i{}^tY_i$. Les coefficients $\alpha_{i,j}$ de $X_i{}^tX_i$ sont nuls sauf $\alpha_{i,i} = 1$, et ceux de $Y_i{}^tY_i$ sont $\beta_{i,i} = \frac{(d-1)^2}{d^2}$, $\beta_{i,k} = \beta_{k,i} = \frac{-(d-1)}{d^2}$ pour $k \neq i$ et $\beta_{k,\ell} = \frac{1}{d^2}$ si $k \neq i \neq \ell$. On considère une relation de dépendance $\sum_{i=1}^n x_i X_i{}^tX_i + \sum_{i=1}^n y_i Y_i{}^tY_i = 0$.

Le calcul des termes diagonaux donne les équations

$$x_i + \frac{(d-1)^2}{d^2} y_i + \frac{1}{d^2} \sum_{j \neq i} y_j = 0$$

et celui des termes non diagonaux les équations

$$\frac{-(d-1)}{d^2}(y_i + y_j) + \frac{1}{d^2} \sum_{k \neq i,j} y_k = 0\,.$$

En introduisant l'inconnue supplémentaire $y = \sum_{k=1}^n y_k$, on transforme l'équation ci-dessus en $y - d(y_i + y_j) = 0$. En faisant les différences deux à deux de ces équations, on voit que les inconnues y_i doivent être égales, et, finalement, le système de départ est équivalent au système suivant de $2n+1$ équations à $2n+1$ inconnues :

$x_i = -\frac{1}{2d^3} y$,

$y_i = \frac{1}{2d} y$,

$y = y_1 + \cdots + y_n$.

En remplaçant dans la dernière équation y_i par sa valeur tirée de la relation précédente, on obtient $(1 - \frac{n}{2d})y = 0$.

Si $n \neq 2d$, on a $y = 0$, donc $x_i = y_i = 0$ pour tout i, d'où le résultat dans ce cas. Sinon, la dernière équation est conséquence des précédentes, lesquelles se résolvent en fonction du paramètre y. On a donc dans ce cas une relation de dépendance, qui est unique à proportionalité près, ce qui prouve d'abord que le rang de perfection de la famille des $2n$ vecteurs $e_i, e - e_i$ est $2n-1$, puis, vu que cette relation est à coefficients non nuls, que, pour $t < 2n$, le rang de t quelconques d'entre eux est exactement t. $\square$

Remerciements. L'auteur remercie Anne-Marie Bergé pour les discussions qu'il a eues avec elle sur la caractérisation des réseaux dual-extrêmes, ainsi que Jean-Luc Baril et Christian Batut, dont les programmes ont été d'une grande utilité au cours de la phase expérimentale de ce travail ; il remercie également chaleureusement le rapporteur (*referee*) pour sa lecture détaillée de cet article.

Bibliographie

[B] A-M. Bergé, *Minimal vectors of pairs of dual lattices*, J. Number Theory **52** (1995), 284–298.

[B-M] A-M. Bergé, J. Martinet, *Sur un problème de dualité lié aux sphères en géométrie des nombres*, J. Number Theory **32** (1989), 14–42.

[C-S] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, Grundlehren n°290, Heidelberg, 1988, (seconde édition : 1993).

[C-S1] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Low-dimensional lattices. III. Perfect forms*, Proc. Royal Soc. London **A 418** (1988), 43–80.

[C-S2] J.H. Conway, N.J.A Sloane, *On Lattices Equivalent to Their Duals*, J. Number Theory **48** (1994), 373–382.

[L] M. Laïhem, *Thèse, Bordeaux*, 1992.

[M] J. Martinet, *Les réseaux parfaits des espaces euclidiens*, Masson, Paris, 1996.

[W] G.L. Watson, *On the minimum points of a positive quadratic form*, Mathematika **18** (1971), 60–70.

[Z] N.V. Zahareva, *Centerings of* 8*-dimensional lattices that preserve a frame of successive minima*, Proc. Steklov Inst. math. **152** (1982), 107–134, (original en russe : 1980).

Jacques Martinet
Université Bordeaux 1
Institut de Mathématiques
351, cours de la Libération
F–33405 TALENCE cedex
e-mail : martinet@math.u-bordeaux.fr