Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **9** *(1997), 479–497*

Tables de réseaux entiers unimodulaires construits comme k-voisins de Z^n

par Roland BACHER

Résumé. Cet article énumère les réseaux entiers unimodulaires de dimension ≤ 24, vus comme $k-$voisins de $\mathbb{Z}^n$.

La première partie contient les informations nécessaires pour lire et pour travailler avec les tables. Elle ne contient aucune preuve.

La deuxième partie est formée de tables qui contiennent les données numériques pour les réseaux unimodulaires entiers indécomposable de dimension ≤ 24.

Un appendice esquisse les preuves des énoncés.

Abstract. This paper contains all informations and data for constructing all integral unimodular lattices of dimension ≤ 24 as $k-$neighbours of the standard lattice $\mathbb{Z}^n$.

0. Définitions et généralités

Considérons l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ de dimension n muni du produit scalaire $\langle \mid \rangle$.

Un *réseau de dimension* n est un sous-groupe discret cocompact de $\mathbb{E}^n$. Un réseau Λ est *entier* si le produit scalaire de $\mathbb{E}^n$ restreint aux éléments de Λ ne prend que des valeurs entières. Le *déterminant* d'un réseau Λ est le carré du volume d'un domaine fondamental $\mathbb{E}^n/\Lambda$. Un réseau entier Λ est *unimodulaire* s'il est de déterminant 1. La *norme* d'un élément $\lambda \in \Lambda$ est définie par $\langle\lambda|\lambda\rangle$. Un réseau entier est de *type II* si tous les éléments de Λ sont de norme paire. Autrement il est de *type I*. Pour qu'il existe dans $\mathbb{E}^n$ des réseaux entiers unimodulaires de type II, il faut et il suffit que n soit divisible par 8. Deux réseaux Λ et M sont *isomorphes* s'il existe une isométrie entre Λ et M. Le *groupe des automorphismes* d'un réseau $\Lambda \subset \mathbb{E}^n$ est formé des isométries de $\mathbb{E}^n$ qui préservent Λ. Un réseau est *décomposable* s'il est isomorphe à la somme orthogonale de deux réseaux non-triviaux. Il est *indécomposable* sinon.

Manuscrit reçu le 23 mai 1997

1. RÉSEAUX $k-$VOISINS DE $\mathbb{Z}^n$

Soit A un groupe abélien fini. Deux réseaux Λ et M sont $A-$*voisins* si les trois groupes $\Lambda/(\Lambda \cap M)$, $M/(\Lambda \cap M)$ et A sont isomorphes. Si A est cyclique d'ordre k on dira simplement que Λ et M sont $k-$*voisins* (cf. [Mi]). Pour $k = 2$ on retrouve la notion de réseaux voisins due à Kneser (cf. [Kn]). Deux réseaux qui sont $A-$voisins ont même déterminant. L'intérêt des réseaux entiers qui sont $k-$voisins de $\mathbb{Z}^n$ vient surtout des deux propositions suivantes:

Proposition 1. *Soit k un entier strictement positif et soit $v = (v_1, .., v_n)$ un vecteur non-nul de $\mathbb{Z}^n$ dont la norme $\langle v|v\rangle$ est un multiple de k^2. Alors*

$$\Lambda(v; k) = \{z \in \mathbb{Z}^n \mid \langle z|v\rangle \in k\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}\frac{1}{k}v$$

est un réseau entier unimodulaire qui est un $\frac{k}{d}-$voisin de $\mathbb{Z}^n$ où d est le plus grand diviseur commun de $k, v_1, .., v_n$.

De plus, tout réseau entier unimodulaire qui est $k-$voisin de $\mathbb{Z}^n$ est obtenu de cette façon.

Proposition 2. *Soit Λ un réseau entier unimodulaire. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{Z}^n$ tels que Λ est isomorphe au réseau $\Lambda(v; k)$ construit dans la proposition 1.*

Les réseaux entiers unimodulaires de type II exhibés dans la table I sont construits à l'aide de la proposition 1. La colonne intitulée "k" indique l'entier k de la proposition 1 et la colonne intitulée "Vecteur" fournit un vecteur v qui vérifie les conditions de la proposition 1. La notation

$$a_1^{i_1} a_2^{i_2} .. a_l^{i_l}$$

désigne le vecteur v dont les i_1 premières coordonnées sont égales à a_1, les i_2 coordonnées suivantes sont égales à a_2 et ainsi de suite.

Les réseaux de type I admettent une construction qui nécessite un peu moins de données lorsque le réseau est construit comme $k-$voisin de $\mathbb{Z}^n$ avec k un nombre premier impair. Le reste de ce paragraphe explique cette construction qui est utilisée dans les tables 2 et 3.

Soit p un nombre premier impair. Notons $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_p)$ l'espace projectif de dimension $n-1$ sur le corps fini $\mathbb{F}_p$. Munissons $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_p)$ des coordonnées homogènes notées $[x_1 : .. : x_n]$ et considérons la variété $V_n(\mathbb{F}_p) \subset \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_p)$ définie par

$$V_n(\mathbb{F}_p) = \{[x_1 : .. : x_n] \quad | \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \equiv 0\} \ .$$

Pour $v = (v_1, .., v_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus p\mathbb{Z}^n$ notons $\overline{v} = [v_1 \pmod p) : .. : v_n \pmod p)]$ sa classe dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_p)$.

Soit $v \in \mathbb{Z}^n \setminus p\mathbb{Z}^n$ tel que $\overline{v} \in V_n(\mathbb{F}_p)$. Définissons un sous-réseau $X_0(v)$ de $\mathbb{Z}^n$ par

$$X_0(v) = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \ \langle x|v\rangle \equiv 0 \pmod p\}$$

et des sous-ensembles $X_1(v), .., X_{p-1}(v)$ de $\frac{1}{p}\mathbb{Z}^n$ par

$$X_i(v) = \{x \in \frac{i}{p}v + \mathbb{Z}^n | \ \ \langle x|x\rangle \in \mathbb{N}\} \ .$$

Lemme 3. *L'ensemble $\Lambda(\overline{v}; p) = \cup_{i=0}^{p-1} X_i(v)$ est un réseau entier unimodulaire $p-$voisin de $\mathbb{Z}^n$ qui ne dépend que de la classe $\overline{v}$ de v dans $V_n(\mathbb{F}_p)$.*

Corollaire 4. *L'ensemble des $p-$voisins entiers de $\mathbb{Z}^n$ est en bijection avec les points de la variété $V_n(\mathbb{F}_p)$ décrite ci-dessus.*

Remarque. Le groupe des permutations et changements de signes des n coordonnées opère sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_p)$ en préservant $V_n(\mathbb{F}_p)$. Comme cette action provient d'une isométrie de $\mathbb{Z}^n$, deux réseaux $\Lambda(\overline{v}; p)$ et $\Lambda(\overline{w}; p)$ sont isomorphes si les coordonnées de $\overline{v}, \overline{w} \in V_n(\mathbb{F}_p)$ ne diffèrent que par une permutation et des changements de signes.

Pour définir un réseau entier Λ qui est $p-$voisin de $\mathbb{Z}^n$ il suffit donc de spécifier p et les n coordonnées homogènes du point $\overline{v} \in V_n(\mathbb{F}_p)$ pour lequel on a $\Lambda = \Lambda(\overline{v}; p)$. De plus, à isomorphisme de Λ près, on peut supposer

$$0 \le v_1 \le v_2 \le .. \le v_n \le \frac{p-1}{2} \ .$$

Dans les tables II et III qui suivent, la colonne intitulée “k” indique le nombre p. La colonne intitulée “Vecteur” fournit un vecteur v avec $v \pmod p) \in V_n(\mathbb{F}_p)$ permettant la construction du réseau $\Lambda(\overline{v}; p)$. La notation du vecteur v est analogue à celle de la table I.

2. Reconnaissance des systèmes de racines

Ce paragraphe rassemble quelques faits bien connus sur les systèmes de racines qui permettent de déterminer (à l'aide d'un petit programme d'ordinateur) le système de racines d'un réseau entier.

Soit R un système de racines dont les éléments sont tous de norme 2. Associons à R un graphe fini $G(R)$ défini comme suit. Les sommets de $G(R)$ sont les paires de racines opposées de R. Deux sommets correspondant aux paires de racines $\{\pm r\}$ et $\{\pm s\}$ sont joints par une arête dans $G(R)$ si et seulement si $\langle r|s\rangle^2 = 1$.

Les composantes connexes de $G(R)$ sont en bijection avec les composantes irréductibles de R. Chaque composante connexe de $G(R)$ est un graphe régulier. Son degré est égal à $2h-4$ où h est le nombre de Coxeter du système de racines (cf. [CS], page 429).

Proposition 5. *Le nombre de sommets et le degré des graphes attachés aux systèmes de racines irréductibles avec normes des racines égales à 2 sont donnés comme suit:*

$G(A_n)$ *a* $\frac{1}{2}n(n+1)$ *sommets et son degré est* $2(n-1)$*,*

$G(D_n)$ *a* $n(n-1)$ *sommets et son degré est* $4(n-2)$ *(ici* n *vaut au moins 4),*

$G(E_6)$ *a* 36 *sommets et son degré est* 20*,*

$G(E_7)$ *a* 63 *sommets et son degré est* 32*,*

$G(E_8)$ *a* 120 *sommets et son degré est* 56*.*

De plus, si $G(R)$ *est un graphe connexe construit comme ci-dessus, le nombre de sommets et le degré de* $G(R)$ *déterminent* R *sans ambigüité.*

3. La construction des deux 2-voisins canoniques d'un réseau de type I en dimension $4m$

Soit Λ un réseau entier unimodulaire de dimension n. Les vecteurs de norme paire de Λ forment un réseau noté Λ_e. Le réseau Λ_e est un sous-réseau d'indice 2 de Λ et il est aussi contenu dans le réseau dual $\Lambda_e^\sharp$ qui est défini par

$$\Lambda_e^\sharp = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x|\mu\rangle \in \mathbb{Z} \ \ \forall \mu \in \Lambda_e\} \ .$$

Il est connu que pour n divisible par 4 tous les éléments de $\Lambda_e^\sharp$ sont de norme entière. Ceci implique en particulier (pour n divisible par 4) que $\Lambda_e^\sharp$ contient trois réseaux entiers unimodulaires distincts qui sont engendré par $\langle \Lambda_e, a\rangle$,

$\langle\Lambda_e, b\rangle$ et $\langle\Lambda_e, a+b\rangle$ où a et b désignent des représentants de deux classes distinctes non-triviales du groupe $\Lambda_e^\sharp/\Lambda_e$. Ces trois réseaux contiennent tous Λ_e comme sous-réseau d'indice 2; ils sont donc 2-voisins. Un des trois réseaux est le réseau initial Λ, les deux autres sont par définition les deux 2-voisins canoniques de Λ. Les deux 2-voisins canoniques de Λ sont de type I si $\dim(\Lambda) \equiv 4 \pmod 8$ et de type II si $\dim(\Lambda) \equiv 0 \pmod 8$. Dans la suite de ce paragraphe nous construisons les deux 2-voisins canoniques de Λ comme $2k-$voisins de $\mathbb{Z}^n$ pour Λ un réseau entier unimodulaire de type I qui est $k-$voisin de $\mathbb{Z}^n$ (l'entier n est divisible par 4).

Soit $n = 4m$ un entier naturel divisible par 4 et k un entier naturel impair. Soit $v = (v_1, .., v_n) \in \mathbb{Z}^n$ un vecteur dont la norme $\langle v|v\rangle$ est un multiple de k^2. Définissons $\epsilon_i \in \{0,1\}$ par $\epsilon_i \equiv 1 + v_i \pmod 2$ et posons

$$\begin{aligned} v' =&(v_1+\epsilon_1 k^2, v_2+\epsilon_2 k^2, .., v_n+\epsilon_n k^2) \\ v'' =&(v_1+\epsilon_1 k^2+2k^2, v_2+\epsilon_2 k^2, .., a_n+\epsilon_n k^2)\ . \end{aligned}$$

Un petit calcul montre que les normes de v' et de v'' sont des multiples de $(2k)^2$. La proposition 1 permet donc de construire trois réseaux entiers unimodulaires Λ, Λ' et Λ''par

$$\begin{aligned} \Lambda =&\{z \in \mathbb{Z} | \langle z|v\rangle \in k\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}\frac{1}{k}v\ , \\ \Lambda' =&\{z \in \mathbb{Z} | \langle z|v'\rangle \in 2k\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}\frac{1}{2k}v'\ , \\ \Lambda'' =&\{z \in \mathbb{Z} | \langle z|v''\rangle \in 2k\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}\frac{1}{2k}v''\ . \end{aligned}$$

Rappelons que Λ_e désigne le sous-réseau d'indice 2 de Λ qui est engendré par les vecteurs de norme paire de Λ.

Proposition 6.

(i) On a

$$\Lambda \cap \Lambda' = \Lambda \cap \Lambda'' = \Lambda' \cap \Lambda'' = \Lambda_e\ .$$

(ii) Les réseaux Λ' et Λ'' sont de type II si et seulement si la dimension de Λ est un multiple de 8.

(iii) Si Λ contient un vecteur de norme 1, alors Λ' et Λ'' sont isomorphes.

Remarque. La proposition 6 permet de construire tous les réseaux de type II en dimension 8, 16 et 24. La table I dans laquelle on a construit ces réseaux est donc en fait superflue.

4. Numérotation et Lecture des tables

La table I énumère tous les réseaux entiers unimodulaires de type II en dimension 8, 16 et 24. La table indique une construction de tous les réseaux indécomposables comme $k-$voisin de $\mathbb{Z}^n$. Les réseaux décomposables sont facilement construits à partir de leurs sous-réseaux indécomposables. Les réseaux en dimension 8 et 16 sont numérotés par leur dimension suivie de l'ordre dans lequel ils apparaissent dans la table 16.7 de [CS]. Pour noter les 24 réseaux entiers unimodulaires de type II en dimension 24 la table 1 suit la convention de la Table 16.1 de [CS] où ils sont désignés par les lettres de l'alphabet grec. Comme dans les tables II et III, nous indiquons la construction du réseau en question suivie de la description de son système de racines qui se trouve dans la colonne "Système de racines". La dernière colonne "t_2" indique le nombre des racines. Toutes ces informations (à part la construction du réseau comme $k-$voisin de $\mathbb{Z}^n$) ainsi que bien d'autres se trouvent également dans [CS].

La table II permet de construire les réseaux entiers unimodulaires indécomposables de type I qui sont de dimension ≤ 23. Ces réseaux sont numérotés par leur dimension suivie de l'ordre dans lequel ils apparaissent dans la Table 16.7 de [CS]. Pour faciliter la comparaison avec la Table 16.7 de [CS], la table II mentionne aussi les réseaux de type II qui apparaissent en dimension 8 et 16. Comme dans le cas de la table I, seuls les réseaux indécomposables sont construits.

Les réseaux entiers unimodulaires de type I en dimension 24 ont été classés par Borcherds. La liste se trouve dans les Tables 17.1a, 17.1b et 17.1c de [CS]. Ces tables contiennent quelques erreurs qui sont signalées au début de la table III. La table III reprend la numérotation de Borcherds dans [CS]. La colonne "Vsp." (pour voisins pairs) indique les deux réseaux pairs qui sont les 2-voisins canoniques car ils permettent de distinguer les réseaux ayant même système de racines. Les réseaux 153 et 154 sont décomposables.

Les groupes d'automorphismes des réseaux considérés n'ont pas été calculés pour construire ces tables. Cet article n'est donc pas une vérification de la classification des réseaux entiers unimodulaires de dimension ≤ 24.

Bibliographie.

[1] R.Bacher, *Réseaux unimodulaires sans automorphismes*, Thèse N^0 2597, Université de Genève, 1993.

[2] J.H.Conway et N.J.A.Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer, 1988.

[3] M.Kneser, *Klassenzahlen definiter quadratischer Formen*, Arch. der Math. vol. VIII (1957), 241–250.

[4] Y.Mimura, *Explicit examples of unimodular lattices with the trivial automorphism group*, Proceeding of KAIST Mathematics Workshop, vol.5, Algebra and topology, Korea Adv.Inst.Sci.Tech., Taejon, 91–95.

[5] R.Schulze-Pillot, *An algorithm for computing genera of ternary and quaternary quadratic forms*, Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Bonn (1991), 134–143.

Table I. Réseaux de type II en dimension 8,16 et 24

(cf. Table 16.7 et Table 16.1 dans Conway-Sloane.)

Num.	k	Vecteur	Système de racines	t_2
8.1	2	1^8	E_8	240
16.1		somme directe de 2 fois 8.1	E_8^2	480
16.2	2	1^{16}	D_{16}	480
α	2	1^{24}	D_{24}	1104
β		somme directe de 8.1 et 16.2	$D_{16}E_8$	720
γ		somme directe de 3 fois 8.1	E_8^3	720
δ	6	$1^{20}3^35$	A_{24}	600
ϵ	6	$1^{11}3^{12}5$	D_{12}^2	528
ζ	6	$1^{18}3^6$	$A_{17}E_7$	432
η	10	$1^75^{10}7^7$	$D_{10}E_7^2$	432
θ	6	$1^{13}3^95^2$	$A_{15}D_9$	384
ι	10	$1^83^55^87^3$	D_8^3	336
κ	10	$1^{13}3^75^37$	A_{12}^2	312
λ	10	$1^93^65^79^2$	$A_{11}D_7E_6$	288
μ	22	$1^63^55^69^211^5$	E_6^4	288
ν	10	$1^73^95^69^2$	$A_9^2D_6$	240
ξ	14	$1^53^55^67^611\ 13$	D_6^4	240
o	14	$1^93^45^87^3$	A_8^3	216
π	14	$1^83^25^67^511^3$	$A_7^2D_5^2$	192
ρ	14	$1^73^75^77^3$	A_6^4	168
σ	22	$1^43^45^59^511^421^2$	$A_5^4D_4$	144
τ	22	$1^33^35^47^49^411^4\ 19\ 21$	D_4^6	144
υ	22	$1^53^45^57^49^311^3$	A_4^6	120
ϕ	26	$1^43^45^39^413^315^319^3$	A_3^8	96
χ	34	$1^33^35^37^39^211^313^315^217^2$	A_2^{12}	72
ψ	46	$1\ 3\ 5^27^2...21^223^243\ 45$	A_1^{24}	48
ω	94	$5\ 7\ 9\ ...45\ 47\ 91\ 93$	Leech	0

Table II. Réseaux indécomposables de type I jusqu'en dimension 23

(Table 16.7 de [CS]. Elle contient une erreur pour les systèmes de racines de 21.7 et 22.16).

Num.	k	Vecteur	Système de racines	t_2
8.1		type II	E_8	240
12.1	3	1^{12}	D_{12}	264
14.1	5	$1^7 2^7$	E_7^2	252
15.1	3	1^{15}	A_{15}	240
16.1		type II	E_8^2	480
16.2		type II	D_{16}	480
16.3	5	$1^8 2^8$	D_8^2	224
17.1	5	$1^{11} 2^6$	$A_{11} E_6$	204
18.1	3	1^{18}	$A_1 A_{17}$	308
18.2	7	$1^{10} 2\ 3^7$	$A_1 D_{10} E_7$	308
18.3	7	$1^6 2^6 3^6$	D_6^3	180
18.4	5	$1^9 2^9$	A_9^2	180
19.1	11	$1^6 2^6 4^2 5^5$	$E_6^3 O_1$	216
19.2	5	$1^{12} 2^7$	$A_{11} D_7 O_1$	216
19.3	7	$1^8 2^6 3^5$	$A_7^2 D_5$	152
20.1	5	1^{20}	D_{20}	760
20.2		somme directe de 12.1 et de E_8	$D_{12} E_8$	504
20.3	7	$1^{12} 3^8$	$D_8 D_{12}$	376
20.4	11	$1^7 2^6 4^7$	$D_6 E_7^2$	312
20.5	5	$1^{15} 2^5$	$A_{15} D_5$	280
20.6	11	$1^8 2^3 3^5 5^4$	$D_4 D_8^2$	248
20.7	7	$1^{11} 2^3 3^6$	$A_3 A_{11} E_6$	216
20.8	11	$1^6 2^6 3^2 5^6$	$A_1^2 D_6^3$	184
20.9	5	$1^{10} 2^{10}$	$A_1^2 A_9^2$	184
20.10	7	$1^8 2^5 3^7$	$A_7^2 D_5 O_1$	152
20.11	11	$1^4 2^4 3^4 4^4 5^4$	D_4^5	120
20.12	11	$1^6 2^5 3^4 5^5$	A_5^4	120

Num.	k	Vecteur	Système de racines	t_2
21.1	3	1^{21}	$A_{20}O_1$	420
21.2	7	$1^{14}3^7$	$A_{13}E_7O_1$	308
21.3	7	$1^{11}2^93$	$A_{11}D_9O_1$	276
21.4	5	$1^{13}2^8$	$A_8A_{12}O_1$	228
21.5	11	$1^82^64\ 5^6$	$A_7E_6D_7O_1$	212
21.6	7	$1^{10}2^53^6$	$A_5A_9D_6O_1$	180
21.7	7	$1^92^83^4$	$A_4A_8^2O_1$	164
21.8	11	$1^82^53^24\ 5^5$	$A_3A_7D_5^2O_1$	148
21.9	7	$1^72^73^7$	$A_2A_6^3O_1$	132
21.10	11	$1^62^53^54\ 5^4$	$A_1A_5^3D_4O_1$	116
21.11	11	$1^52^53^44^35^4$	$A_4^5O_1$	100
21.12	13	$1^42^33^44^45^36^3$	A_3^7	84
22.1	11	$1^{14}3\ 5^7$	$A_1D_{14}E_7$	492
22.2		somme directe de 14.1 et de E_8	$E_7^2E_8$	492
22.3	11	$1^{10}2\ 3^24^9$	$A_1^2D_{10}^2$	364
22.4	5	$1^{16}2^6$	$A_{15}D_6O_1$	300
22.5	11	$1^{10}3^54^65$	$D_6^2D_{10}$	300
22.6	13	$1^82^53^25^7$	$A_1D_6D_8E_7$	300
22.7	7	$1^{13}2^23^7$	$A_1A_{13}D_7O_1$	268
22.8	11	$1^82^23^65^6$	$A_1^2D_6^2D_8$	236
22.9	5	$1^{11}2^{11}$	$A_{10}^2O_2$	220
22.10	13	$1^62^53^55^6$	$A_5^2E_6^2$	204
22.11	7	$1^{12}2^53^5$	$A_1A_5A_{11}D_5$	204
22.12	11	$1^{10}3^75^5$	$A_5A_9D_7O_1$	204
22.13	13	$1^{10}2^55^26^5$	$A_1A_9D_5E_6O_1$	204
22.14	13	$1^62^43^44\ 5^66$	$A_1^2D_4^2D_6^2$	172
22.15	11	$1^82^63\ 4^25^5$	$A_7^2D_6O_2$	172
22.16	7	$1^{10}2^43^8$	$A_1A_7A_9D_4O_1$	172
22.17	7	$1^92^73^6$	$A_6^2A_8O_2$	156
22.18	11	$1^82^43^54^25^3$	$A_1^2A_3^2A_7^2$	140
22.19	11	$1^62^53^54^55$	$A_5^2D_5^2O_2$	140
22.20	11	$1^82^53^34^25^4$	$A_1A_3A_5A_7D_5O_1$	140
22.21	11	$1^72^73^35^5$	$A_4^2A_6^2O_2$	124
22.22	17	$1^42^43^24^45^26\ 7\ 8^4$	$A_1^6D_4^4$	108
22.23	11	$1^62^63^44^25^4$	$A_1^3A_3A_5^3O_1$	108
22.24	11	$1^62^43^44^35^5$	$A_3^2A_5^2D_4O_2$	108
22.25	11	$1^52^53^54^45^3$	$A_2^2A_4^4O_2$	92
22.26	13	$1^42^43^44^35^46^3$	$A_1^2A_3^6O_2$	76
22.27	17	$1^32^33^34^35^36^27^28^3$	$A_2^{10}O_2$	60
22.28	23	$1^22^23^2\ ...\ 9^210^211^2$	A_1^{22}	44
23.1		somme directe de 15.1 et de E_8	$A_{15}E_8$	480
23.2	5	$1^{19}2^4$	A_4A_{19}	400
23.3	7	$1^{12}2^{11}$	$A_{11}D_{11}O_1$	352

Num.	k	Vecteur	Système de racines	t_2
23.4	11	$1^{11}2^5 4^7$	$A_5A_{11}E_7$	288
23.5	11	$1^{10}2^6 5^7$	$A_9E_6E_7O_1$	288
23.6	13	$1^9 2\ 3^6 4\ 6^6$	$D_9E_6^2O_2$	288
23.7	7	$1^{15}2^2 3^6$	$A_2A_{14}E_6O_1$	288
23.8	11	$1^9 3^8 5^6$	$A_7^2D_9$	256
23.9	5	$1^{14}2^9$	$A_1A_8A_{13}O_1$	256
23.10	11	$1^{12}2^2 3^5 5^4$	$A_3A_{11}D_8O_1$	256
23.11	11	$1^8 2^5 3^8 4^2$	$A_7^2D_8O_1$	224
23.12	11	$1^8 2^7 3\ 5^7$	$A_7D_7^2O_2$	224
23.13	7	$1^{12}2^4 3^7$	$A_4A_7A_{11}O_1$	208
23.14	7	$1^{10}2^{10}3^3$	$A_1A_2A_9A_{10}O_1$	208
23.15	17	$1^6 2^5 4^5 5\ 6^2 8^4$	$D_5^3E_6O_2$	192
23.16	13	$1^6 2^6 4^5 5^6$	$A_5^2D_6E_6O_1$	192
23.17	11	$1^8 2^7 4^3 5^5$	$A_3A_7D_5D_7O_1$	192
23.18	11	$1^9 2\ 3^6 5^7$	$A_2A_6A_8E_6O_1$	192
23.19	7	$1^{11}2^7 3^5$	$A_6A_{10}D_5O_2$	192
23.20	11	$1^{10}2^5 3^2 5^6$	$A_1A_9D_5D_6O_2$	192
23.21	17	$1^5 2^5 3\ 4^5 5\ 7^2 8^4$	$D_5^4O_3$	160
23.22	11	$1^{10}2^4 3^4 5^5$	$A_4^2A_5A_9O_1$	160
23.23	11	$1^6 2^6 3^6 5^5$	$A_5^2D_5D_6O_2$	160
23.24	11	$1^8 2^5 3^3 4^6 5$	$A_1A_3A_5A_7D_6O_1$	160
23.25	11	$1^9 2^7 3\ 4\ 5^5$	$A_2A_6A_8D_5O_2$	160
23.26	7	$1^9 2^6 3^8$	$A_1A_5A_7A_8O_2$	160
23.27	11	$1^9 2^3 3^5 4^2 5^4$	$A_2^2A_5^2A_8O_1$	144
23.28	11	$1^8 2^4 3^7 5^4$	$A_3A_4A_7^2O_2$	144
23.29	11	$1^8 2^6 3^2 4^3 5^4$	$A_1^2A_6^2A_7O_2$	144
23.30	17	$1^5 2^4 3^3 4^2 5^4 7^5$	$A_3^4D_5^2O_1$	128
23.31	11	$1^8 2^3 3^4 4^4 5^4$	$A_3^2A_7D_4^2O_2$	128
23.32	11	$1^8 2^5 3^5 5^5$	$A_1A_4^2A_5A_7O_2$	128
23.33	17	$1^6 2^5 3^4 4\ 5\ 6\ 8^5$	$A_1^2A_5^2D_4D_5O_2$	128
23.34	11	$1^7 2^7 3^4 4\ 5^4$	$A_4A_6^2D_4O_3$	128
23.35	11	$1^7 2^5 3^4 4^2 5^5$	$A_2A_4^2A_6D_5O_2$	128
23.36	11	$1^6 2^6 3^5 4^3 5^3$	$A_1A_4A_5^3O_3$	112
23.37	11	$1^7 2^5 3^3 4^5 5^3$	$A_1A_2A_3A_4A_5A_6O_2$	112
23.38	17	$1^4 2^4 3^4 4^2 5^4 7\ 8^4$	$A_3^4D_4^2O_3$	96
23.39	13	$1^6 2^3 3^4 4^3 5^5 6^2$	$A_2^4A_3A_5^2O_2$	96
23.40	13	$1^6 2^3 3^4 4^4 5^2 6^4$	$A_1^3A_3^3A_5D_4O_2$	96
23.41	13	$1^5 2^5 3^4 4^2 5^3 6^4$	$A_2^2A_4^3D_4O_3$	96
23.42	11	$1^6 2^5 3^3 4^4 5^5$	$A_1A_3^2A_4^2A_5O_3$	96
23.43	13	$1^5 2^3 3^4 4^4 5^4 6^3$	$A_3^5A_4O_4$	80
23.44	13	$1^5 2^5 3^3 4^4 5^3 6^3$	$A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2O_3$	80
23.45	17	$1^4 2^3 3^2 4^4 5^2 6^2 7^4 8^2$	$A_1^8A_3^4O_3$	64
23.46	17	$1^4 2^4 3^3 4^4 5^3 7^2 8^3$	$A_1^2A_2^4A_3^3O_4$	64
23.47	19	$1^3 2^3 3^3 4^2 5^2 6^3 7^2 8^3 9^2$	$A_1^6A_2^6O_5$	48
23.48	29	$1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9^2 11\ 13^2 14^2$	$A_1^{16}O_7$	32
23.49	47	1 2 3 ... 21 22 23	O_{23}	0

TABLE III. RÉSEAUX INDÉCOMPOSABLES DE TYPE I EN DIMENSION 24

Erreurs dans la Table 17.1, pages 424-426 de [CS]:

Numéro 3: Le système de racines est $A_1^{12}O_{12}$

Numéro 16: Le système de racines est $A_1^2A_2^4A_3^3$

Numéro 20: Le système de racines est $A_3^6O_6$

$w_2 = 1^2 2^2 3\ 4^2 5\ 6\ 7^2 8\ 9\ 10^2 11\ 12\ 13^2\ 14\ 15\ 17\ 18^2$

Num.	k	Vecteur	Syst. de racines	Vsp.	t_2
1	53	$[1,26]\setminus\{2,7\}$	O_{24}	$\psi\omega$	0
2	37	w_2	$A_1^8O_{16}$	$\psi\psi$	16
3	29	$1^2 3^2 4^2 6^2 7^2 .. 13^2 14^2$	$A_1^{12}O_{12}$	$\chi\psi$	24
4	29	$1^2 2^2 .. 7^2 8^2 10\ 11^2 12\ 13^2 14^2$	$A_1^{16}O_8$	$\phi\psi$	32
5	29	$1^3 2^3 3\ 4^2 5^2 .. 8^2 9^2 11\ 12\ 13\ 14^2$	$A_1^{10}A_2^2O_{10}$	$\chi\chi$	32
6	37	$1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 7^2 8^2 9^2 11^2 13\ 14\ 17^2 18^2$	A_1^{24}	$\tau\psi$	48
7	23	$1^3 2^3 3^2 4^3 5^2 6^2 7^3 8^2 10^2 11^2$	$A_1^8A_2^4O_8$	$\phi\chi$	40
8	19	$1^3 2^3 3^3 4^2 5^3 6^2 7^3 8^3 9^2$	$A_1^6A_2^6O_6$	$\upsilon\chi$	48
9	23	$1^4 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9^2 10\ 11^3$	$A_1^{12}A_3^2O_6$	$\phi\phi$	48
10	19	$1^4 2^3 3^2 4^3 5^2 6^2 7^3 8^2 9^3$	$A_1^6A_2^4A_3O_7$	$\phi\phi$	48
11	17	$1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^3 8^3$	$A_2^8O_8$	$\phi\phi$	48
12	23	$1^3 2^3 3^3 4^3 6^2 7^3 8^3 10^2 11^2$	$A_1^4A_2^8O_4$	$\sigma\chi$	56
13	17	$1^4 2^4 3^2 4^3 5^3 6^3 7^3 8^2$	$A_1^4A_2^4A_3^2O_6$	$\upsilon\phi$	56
14	19	$1^4 2^2 3^4 4^2 5^4 6^2 7^3 8^2 9$	$A_1^8A_3^4O_4$	$\tau\phi$	64
15	17	$1^4 2^4 3^2 4^4 5^2 6^2 7^2 8^4$	$A_1^8A_3^4O_4$	$\sigma\phi$	64
16	17	$1^4 2^4 3^3 4^3 5^4 6^2 7^2 8^2$	$A_1^2A_2^4A_3^3O_5$	$\sigma\phi$	64
17	17	$1^5 2^3 3^3 4^3 5^2 6^4 7\ 8^3$	$A_1^4A_2^4A_3A_4O_5$	$\upsilon\upsilon$	64
18	17	$1^4 2^4 3^3 4^4 5^2 6^3 7\ 8^3$	$A_1^2A_2^2A_3^4O_6$	$\upsilon\upsilon$	64
19	17	$1^4 2^4 3^4 4^3 5\ 6^3 7^2 8^3$	$A_2^4A_3^4O_4$	$\rho\phi$	72
20	13	$1^4 2^4 3^4 4^4 5^4 6^4$	$A_3^6O_6$	$\tau\upsilon$	72
21	17	$1^5 2^3 3^3 4^3 5^3 6\ 7^4 8^2$	$A_1^4A_2^4A_4^2O_4$	$\sigma\upsilon$	72
22	17	$1^5 2^4 3^3 4^3 5^2 6^3 8^4$	$A_1^2A_2^2A_3^3A_4O_5$	$\sigma\upsilon$	72
23	17	$1^4 2^4 3^4 4^2 5^4 7^3 8^3$	$A_1^4A_3^6O_2$	$\pi\phi$	80
24	13	$1^5 2^4 3^4 4^3 5^5 6^3$	$A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2O_4$	$\rho\upsilon$	80
25	29	$1^4 2^2 3^2 4^2 5^2 6\ 7^2 8\ 9\ 10^2 12^4 14$	$A_1^{16}D_4^2$	$\tau\tau$	80
26	17	$1^4 2^4 3^4 4^3 5^2 6\ 7^2 8^4$	$A_1^4A_3^4D_4O_4$	$\sigma\tau$	80
27	17	$1^6 2^3 3^4 4^2 5^4 7^2 8^3$	$A_1A_2^4A_3^2A_5O_4$	$\sigma\sigma$	80
28	13	$1^5 2^5 3^2 4^4 5^4 6^4$	$A_1^2A_3^3A_4^2O_5$	$\sigma\sigma$	80
29	17	$1^6 2^2 3^4 4^2 5^4 6^2 8^4$	$A_1^7A_3^3A_5O_3$	$\sigma\sigma$	80
30	19	$1^4 2^4 3^2 4^4 5^2 6\ 7^3 8^3 9$	$A_1^4A_3^4D_4O_4$	$\sigma\sigma$	80

Num.	k	Vecteur	Syst. de racines	Vsp.	t_2
31	17	$1^5 2^3 3^3 4^3 5^3 6^2 7\ 8^4$	$A_2^6 A_4 D_4 O_4$	$\sigma\sigma$	80
32	23	$1^4 3^4 4^4 5^3 7^3 10^3 11^3$	A_3^8	$\xi\phi$	96
33	13	$1^5 2^5 3^4 4^5 5^2 6^3$	$A_1^2 A_2^2 A_3 A_4^3 O_3$	$\pi\upsilon$	88
34	13	$1^5 2^3 3^3 4^4 5^5 6^4$	$A_3^4 A_4^2 O_4$	$\pi\upsilon$	88
35	13	$1^6 2^4 3^4 4^3 5^3 6^4$	$A_1 A_2^2 A_3^2 A_4 A_5 O_4$	$\rho\sigma$	88
36	17	$1^5 2^5 3^2 4^5 5^2 8^5$	$A_1^4 A_4^4 O_4$	$\rho\sigma$	88
37	13	$1^5 2^3 3^5 4^5 5^3 6^3$	$A_3^3 A_4^3 O_3$	$o\upsilon$	96
38	17	$1^4 2^4 3^4 4^4 6\ 7^4 8^3$	$A_3^4 D_4^2 O_4$	$\pi\tau$	96
39	11	$1^6 2^5 3^4 4^5 5^4$	$A_1 A_3^2 A_4^2 A_5 O_4$	$\pi\sigma$	96
40	13	$1^6 2^4 3^4 4^2 5^6 6^2$	$A_1^6 A_3^2 A_5^2 O_2$	$\pi\sigma$	96
41	17	$1^6 2^4 3^2 4^4 5\ 6^3 8^4$	$A_1^3 A_3^3 A_5 D_4 O_3$	$\pi\sigma$	96
42	13	$1^5 2^5 3^5 4^3 5^2 6^4$	$A_2^2 A_4^3 D_4 O_4$	$\pi\sigma$	96
43	13	$1^7 2^3 3^3 4^3 5^4 6^4$	$A_2^3 A_3^3 A_6 O_3$	$\rho\rho$	96
44	13	$1^6 2^3 3^6 4^2 5^4 6^3$	$A_2^2 A_3^2 A_5^2 O_4$	$\rho\rho$	96
45	13	$1^6 2^5 3^2 4^4 5^2 6^5$	$A_1^3 A_4^3 A_5 O_4$	$\rho\rho$	96
46	17	$1^5 2^5 4^5 5^4 7\ 8^4$	$A_3^2 A_4^4 O_2$	$\nu\upsilon$	104
47	13	$1^6 2^6 3^3 4^3 5^2 6^4$	$A_2^2 A_3 A_4 A_5^2 O_3$	$o\sigma$	104
48	11	$1^7 2^3 3^5 4^4 5^5$	$A_1^2 A_2 A_3 A_4^2 A_6 O_3$	$\pi\rho$	104
49	11	$1^6 2^6 3^2 4^5 5^5$	$A_1^2 A_4^2 A_5^2 O_4$	$\pi\rho$	104
50	23	$1^4 2^4 3^2 4^2 5^4 7^2 8\ 9\ 11^4$	$A_1^8 D_4^4$	$\xi\tau$	112
51	13	$1^6 2^4 3^6 4^3 5^4 6$	$A_1^2 A_3^2 A_5^2 D_4 O_2$	$\xi\sigma$	112
52	11	$1^6 2^4 3^6 4^5 5^3$	$A_3 A_4^2 A_5^2 O_3$	$\nu\sigma$	112
53	13	$1^6 2^6 4^4 5^4 6^4$	$A_1^2 A_3^2 A_5^2 D_4 O_2$	$\nu\sigma$	112
54	11	$1^7 2^4 3^3 4^4 5^6$	$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 O_3$	$o\rho$	112
55	11	$1^7 2^5 3^5 4^3 5^4$	$A_2 A_4^2 A_6 D_4 O_4$	$\pi\pi$	112
56	17	$1^5 2^5 3^3 4^3 5^2 7^5 8$	$A_2^2 A_4^3 D_5 O_3$	$\pi\pi$	112
57	13	$1^8 2^2 3^4 4^4 5^3 6^3$	$A_1^4 A_3^4 A_7 O_1$	$\pi\pi$	112
58	17	$1^6 2^4 3^2 4^4 5^2 6\ 8^5$	$A_1^2 A_5^2 D_4^2 O_4$	$\pi\pi$	112
59	17	$1^6 2^4 3^4 4^3 5\ 6^2 8^4$	$A_1^3 A_3^3 A_5 D_5 O_2$	$\pi\pi$	112
60	17	$1^5 2^3 3^4 4\ 5^3 6^4 8^4$	$A_3^4 D_4 D_5 O_3$	$\pi\pi$	112
61	11	$1^6 2^6 3^6 4^4 5^2$	$A_5^4 O_4$	$\xi\rho$	120
62	11	$1^7 2^4 3^7 4^3 5^3$	$A_2^2 A_3^2 A_6^2 O_2$	$\nu\rho$	120
63	11	$1^7 2^6 3^3 4^3 5^5$	$A_2 A_3 A_5^2 A_6 O_3$	$\nu\rho$	120
64	17	$1^6 3^4 4^6 5^4 6^2 7^2$	$A_1^4 A_5^4$	$\mu\sigma$	128
65	13	$1^6 2^6 3^4 5^5 6^3$	$A_1 A_3 A_5^3 D_4 O_1$	$\lambda\sigma$	128
66	11	$1^7 2^5 3^4 4^6 5^2$	$A_1^2 A_3 A_4 A_6^2 O_3$	$o\pi$	120
67	11	$1^8 2^4 3^3 4^5 5^4$	$A_3^2 A_4^2 A_7 O_3$	$o\pi$	120
68	13	$1^6 2^6 3^4 4\ 5^2 6^5$	$A_1^2 A_5^2 D_4 D_5 O_3$	$\xi\pi$	128
69	17	$1^5 2^4 3^4 4^3 5^3 7^5$	$A_3^4 D_5^2 O_2$	$\xi\pi$	128
70	13	$1^7 2^4 3^4 4^3 5\ 6^5$	$A_2 A_4^2 A_6 D_5 O_3$	$\nu\pi$	128
71	11	$1^8 2^4 3^4 4^2 5^6$	$A_1^3 A_3 A_5 A_7 D_4 O_2$	$\nu\pi$	128

Num.	k	Vecteur	Syst. de racines	Vsp.	t_2
72	11	$1^8 2^5 3^6 4\ 5^4$	$A_1 A_4^2 A_5 A_7 O_3$	$\nu\pi$	128
73	11	$1^8 2^3 3^6 4^2 5^5$	$A_2^2 A_5^2 A_7 O_3$	oo	128
74	19	$1^4 2^4 3^4 5^4 7^4 8^4$	D_4^6	$\iota\tau$	144
75	11	$1^7 2^7 3^5 4^2 5^3$	$A_1 A_4 A_5 A_6^2 O_2$	$\lambda\rho$	136
76	11	$1^8 2^6 3^3 4^4 5^3$	$A_1 A_2 A_5 A_6 A_7 O_3$	νo	136
77	11	$1^9 2^4 3^4 4^3 5^4$	$A_3^2 A_4^2 A_8 O_2$	νo	136
78	11	$1^7 2^5 3^6 5^6$	$A_5^2 A_6^2 O_2$	$\kappa\rho$	144
79	13	$1^6 2\ 3\ 4^5 5^6 6^5$	$A_1^2 A_5^2 D_5^2 O_2$	$\mu\pi$	144
80	11	$1^7 2^7 3^4 4^5 5$	$A_4 A_6^2 D_5 O_3$	$\lambda\pi$	144
81	13	$1^8 2^4 3^3 4^3 5^5 6$	$A_3^2 A_7 D_4 D_5 O_2$	$\lambda\pi$	144
82	17	$1^6 2^6 4^5 5\ 7^4 8^2$	$A_1^2 A_5^2 D_5^2 O_2$	$\lambda\pi$	144
83	11	$1^8 2^6 3^4 4\ 5^5$	$A_1^3 A_3 A_5 A_7 D_5 O_1$	$\lambda\pi$	144
84	19	$1^6 2^2 3^4 5^4 6^2 7\ 8^4 9$	$A_1^6 D_4^3 D_6$	$\xi\xi$	144
85	13	$1^6 2^5 3^4 4^3 5^6$	$A_3^2 A_5^2 D_6 O_2$	$\nu\xi$	144
86	11	$1^9 2^3 3^6 4^3 5^3$	$A_3 A_5^2 A_8 O_3$	$\nu\nu$	144
87	17	$1^6 2^6 4^3 5^5 8^4$	$A_3^2 A_5^2 D_6 O_2$	$\nu\nu$	144
88	11	$1^8 2^4 3^2 4^8 5^2$	$A_1^4 A_7^2 D_4 O_2$	$\nu\nu$	144
89	11	$1^8 2^7 3\ 4^4 5^4$	$A_4^2 A_7^2 O_2$	$\kappa\pi$	152
90	11	$1^9 2^6 3^4 4^2 5^3$	$A_1 A_2 A_5 A_6 A_8 O_2$	λo	152
91	11	$1^8 2^4 3^7 4^4 5$	$A_7^2 D_4^2 O_2$	$\iota\pi$	160
92	13	$1^8 2^4 3^5 5^2 6^5$	$A_3^2 A_7 D_5^2 O_1$	$\iota\pi$	160
93	11	$1^9 2^4 3^3 4^6 5^2$	$A_3 A_4 A_7 A_8 O_2$	κo	160
94	17	$1^5 2^5 3\ 4^5 5\ 6\ 7\ 8^5$	$D_5^4 O_4$	$\mu\xi$	160
95	13	$1^6 2^6 3\ 4^6 5^5$	$A_5^2 D_5 D_6 O_3$	$\lambda\xi$	160
96	11	$1^9 2^7 3^2 4^2 5^4$	$A_2 A_6 A_8 D_5 O_3$	$\lambda\nu$	160
97	13	$1^8 2^4 4^6 5\ 6^5$	$A_1 A_3 A_5 A_7 D_6 O_2$	$\lambda\nu$	160
98	11	$1^{10} 2^4 3^5 4\ 5^4$	$A_1^2 A_3 A_5 A_9 D_4 O_1$	$\lambda\nu$	160
99	7	$1^8 2^8 3^8$	$A_7^3 O_3$	ιo	168
100	13	$1^8 2^5 4^6 5^4 6$	$A_7^2 D_4 D_5 O_1$	$\theta\pi$	176
101	11	$1^{10} 2^5 3^3 4\ 5^5$	$A_2 A_5 A_6 A_9 O_2$	$\kappa\nu$	168
102	11	$1^9 2^4 3^2 4^9$	$A_3^2 A_8^2 O_2$	$\kappa\nu$	168
103	11	$1^8 2^7 3^2 4\ 5^6$	$A_1^2 A_7^2 D_6 O_2$	$\iota\nu$	176
104	17	$1^6 2^4 3^2 5^6 7^2 8^4$	$A_1^4 D_4^2 D_6^2$	$\iota\xi$	176
105	13	$1^7 4^5 5^7 6^5$	$A_7^2 D_5^2$	$\eta\pi$	192
106	11	$1^9 2^8 4^2 5^5$	$A_7^2 A_8 O_2$	θo	184
107	17	$1^6 2^6 3^5 7^2 8^5$	$A_1^2 A_5^2 D_5 E_6 O_1$	$\lambda\mu$	176
108	13	$1^7 2^6 3^4 4\ 6^6$	$A_4 A_6^2 E_6 O_2$	$\lambda\lambda$	176
109	17	$1^8 2^4 3^3 4^2 6^5 8^2$	$A_3^2 A_7 D_4 E_6 O_1$	$\lambda\lambda$	176
110	11	$1^{10} 2^2 3^5 4^2 5^5$	$A_1^3 A_9 D_5^2 O_2$	$\lambda\lambda$	176
111	13	$1^7 2\ 3^6 4^5 6^5$	$A_1 A_5^3 D_7 O_1$	$\lambda\lambda$	176
112	7	$1^{11} 2^6 3^7$	$A_1 A_5 A_6 A_{10} O_2$	$\kappa\lambda$	184
113	7	$1^{10} 2^9 3^5$	$A_5 A_8 A_9 O_2$	$\theta\nu$	192

Num.	k	Vecteur	Syst. de racines	Vsp.	t$_2$
114	11	$1^9 2^4 3^5 5^6$	$A_3A_5A_9D_6O_1$	$\theta\nu$	192
115	11	$1^8 2^7 3^6 5^3$	$A_7A_8^2O_1$	ζo	200
116	11	$1^8 2^5 3^4 4^7$	$A_3A_7D_5D_7O_2$	$\iota\lambda$	192
117	11	$1^{10} 2^3 3^7 4\ 5^3$	$A_2^2A_9^2O_2$	$\kappa\kappa$	192
118	17	$1^6 2^6 4^4 6^6 7^2$	$A_1^2D_4D_6^3$	$\eta\xi$	208
119	11	$1^{10} 2^7 3^3 5^4$	$A_1A_7A_9D_6O_1$	$\eta\nu$	208
120	11	$1^{10} 2^6 4^4 5^4$	$A_1A_7A_9D_6O_1$	$\zeta\nu$	208
121	11	$1^{12} 2^4 3^2 4\ 5^5$	$A_3A_{11}D_4D_5O_1$	$\theta\lambda$	208
122	11	$1^{10} 2^5 3\ 4^7 5$	$A_1^2A_5A_9D_7O_1$	$\theta\lambda$	208
123	17	$1^8 3^4 4^4 6^3 7^4 8$	$D_4^4D_8$	$\iota\iota$	208
124	7	$1^{12} 2^3 3^9$	$A_3A_8A_{11}O_2$	$\theta\kappa$	216
125	23	$1^5 2^5 3\ 4^5 5\ 8^5 9^2$	$D_5^2E_6^2O_2$	$\eta\mu$	224
126	11	$1^{10} 2^6 3\ 4\ 5^6$	$A_1A_9D_6E_6O_2$	$\eta\lambda$	224
127	13	$1^7 2^7 3^4 5^6$	$A_3A_7D_7E_6O_1$	$\eta\lambda$	224
128	11	$1^{11} 2^6 4^5 5^2$	$A_6A_{10}E_6O_2$	$\zeta\lambda$	224
129	11	$1^{12} 3^6 4^2 5^4$	$A_1A_5A_{11}D_6O_1$	$\zeta\lambda$	224
130	29	$1^6 3^6 7^6 12^6$	D_6^4	$\epsilon\xi$	240
131	11	$1^8 2^8 4\ 5^7$	$A_7^2D_8O_2$	$\theta\iota$	224
132	7	$1^{13} 2^7 3^4$	$A_4A_7A_{12}O_1$	$\zeta\kappa$	232
133	23	$1^6 2^6 3^2 4\ 5^3 9^5 10$	$A_1^4D_6^2D_8$	$\eta\iota$	240
134	11	$1^{12} 2^5 4\ 5^6$	$A_{11}D_5D_7O_1$	$\epsilon\lambda$	256
135	5	$1^{12} 2^{12}$	$A_{11}^2O_2$	$\epsilon\kappa$	264
136	11	$1^9 3^7 4^7 5$	$A_7^2D_9O_1$	$\eta\theta$	256
137	7	$1^{14} 2^4 3^6$	$A_1A_3A_{13}D_6O_1$	$\zeta\theta$	256
138	13	$1^8 2^4 3^4 5^8$	$D_4^2D_8^2$	$\epsilon\iota$	272
139	23	$1^6 2^6 3^4 7^3 10^5$	$A_1D_4D_6^2E_7$	$\eta\eta$	272
140	13	$1^{10} 3^7 6^7$	$A_7A_9E_7O_1$	$\zeta\eta$	272
141	7	$1^{13} 3^{11}$	$A_{11}A_{12}O_1$	$\delta\kappa$	288
142	11	$1^{12} 4^9 5^3$	$A_3A_{11}D_9O_1$	$\epsilon\theta$	288
143	13	$1^{10} 3^6 4^2 6^6$	$A_1^2D_6^2D_{10}$	$\epsilon\eta$	304
144	7	$1^{15} 2\ 3^8$	$A_8A_{15}O_1$	$\delta\theta$	312
145	13	$1^8 3^8 4^8$	D_8^3	$\gamma\iota$	336
146	17	$1^8 2^7 5^5 7^4$	D_8^3	$\beta\iota$	336
147	5	$1^{17} 2^7$	$A_7A_{16}O_1$	$\delta\zeta$	328
148	7	$1^{15} 2^8 3$	$A_{15}D_8O_1$	$\beta\theta$	352
149	23	$1^7 2^7 3\ 5^2 7^7$	$A_1^2D_8E_7^2$	$\gamma\eta$	368
150	23	$1^7 2^6 4^5 8^5 11$	$A_1D_6D_{10}E_7$	$\beta\eta$	368
151	11	$1^{15} 2^2 5^7$	$A_1A_{15}E_7O_1$	$\beta\zeta$	368
152	11	$1^{12} 3^4 4^8$	$D_4D_8D_{12}$	$\beta\epsilon$	400
153		somme directe de 8.1 et de 16.3	$D_8^2E_8$		464
154		somme directe de 2 fois 12.1	D_{12}^2		528
155	3	1^{24}	$A_{23}O_1$	$\alpha\delta$	552
156	11	$1^{16} 4^2 5^6$	D_8D_{16}	$\alpha\beta$	592

Appendice : Preuves.

Preuve de la proposition 1. Un petit calcul montre que $\Lambda(v;k)$ est un réseau entier. Soit d le plus grand diviseur commun de $k, v_1, .., v_n$. On a

$$\Lambda(v;k) = \Lambda(\frac{v}{d};\frac{k}{d}) \ .$$

Quitte à remplacer v par $\frac{v}{d}$ et k par $\frac{k}{d}$ on peut donc supposer que $k, v_1, .., v_n$ sont premiers entre eux. Ceci implique que le sous-réseau Λ_0 de $\mathbb{Z}^n$ défini par

$$\Lambda_0 = \{z \in \mathbb{Z}^n \mid \langle z|v\rangle \in k\mathbb{Z}\}$$

est d'indice exactement k dans $\mathbb{Z}^n$. Comme $\frac{i}{k}v$ appartient à $\mathbb{Z}^n$ si et seulement si i est un multiple de k le réseau Λ_0 est un sous-réseau d'indice au moins k dans $\Lambda(v;k)$. Comme $\Lambda(v;k)$ est entier cet indice est plus petit ou égal à k. On voit donc que $\Lambda_0 = \Lambda(v;k) \cap \mathbb{Z}^n$ est un sous-réseau d'indice k dans les deux réseaux $\mathbb{Z}^n$ et $\Lambda(v;k)$. D'où l'unimodularité de $\Lambda(v;k)$. Le groupe $\Lambda(v;k)/\Lambda_0$ est engendré par la classe de $\frac{v}{k} \pmod{\Lambda_0}$ et le groupe $\mathbb{Z}^n/\Lambda_0$ par $(a_1, .., a_n)$ où les $a_i \in \mathbb{Z}$ sont tels que $\sum a_i v_i \equiv 1 \pmod{k}$. Les deux groupes sont donc cycliques d'ord re k.

Soit maintenant Λ un réseau entier unimodulaire $k-$voisin de $\mathbb{Z}^n$. Soit $\lambda \in \Lambda$ tel que $\lambda \pmod{\Lambda \cap \mathbb{Z}^n}$ est un générateur du groupe cyclique $\Lambda/(\Lambda \cap \mathbb{Z}^n)$. Ceci montre que λ est de la forme $\frac{1}{k}v$ avec $v \in \mathbb{Z}^n$ et $k, v_1, .., v_n$ premiers entre eux. Comme Λ est entier on a

$$\Lambda \cap \mathbb{Z}^n \subset \{z \in \mathbb{Z}^n \mid \langle \lambda, z\rangle \in k\mathbb{Z}\}$$

et pour des raisons d'indice on a en fait égalité. Ceci démontre que $\Lambda = \Lambda(v;k)$. □

Pour la preuve de la proposition 2 on a besoin d'une espèce de transitivité de la notion de réseau $k-$voisin.

Lemme auxiliaire. *Soit Λ et M deux réseaux entiers unimodulaires avec Λ $k-$voisin de $\mathbb{Z}^n$ et M $k'-$voisin de Λ. Supposons k et k' premiers entre eux. Alors M est $kk'-$voisin de $\mathbb{Z}^n$.*

Preuve du lemme auxiliaire: Soit $v \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\Lambda = \Lambda(v;k)$ (avec les notations de la proposition 1). Comme k et k' sont premiers entre eux on a aussi $\Lambda = \Lambda(k'v; k)$ et on a $k'v \in \mathbb{Z}^n \cap \Lambda \cap M$. De même il existe $w \in \Lambda$ tel que

$$M = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle w|\lambda\rangle \in k'\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}\frac{1}{k'}w$$

et comme k et k' sont premiers entre eux on a aussi

$$M = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle kw|\lambda\rangle \in k'\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}\frac{1}{k'}kw \ .$$

Le vecteur kw appartient aussi à $\mathbb{Z}^n \cap \Lambda \cap M$. Posons $u = {k'}^2 v + k^2 w$. Une petite vérification montre qu'on a

$$M = \Lambda(u; kk') = \{z \in \mathbb{Z}^n \mid \langle u|z\rangle \in kk'\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}\frac{1}{kk'}u \ . \quad \square$$

Preuve de la proposition 2. Soit E l'ensemble des classes d'isomorphisme de tous les réseaux entiers unimodulaires qui sont $k-$voisins de $\mathbb{Z}^n$ pour $k = 1, 2, 3, ...$ L'ensemble E est fini et il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que tout élément de E est représenté par un réseau $k-$voisin de $\mathbb{Z}^n$ avec $k \leq m$. Soit p un nombre premier plus grand que m. Par le lemme auxiliaire la classe de tout $p-$voisin d'un réseau dont la classe est dans E est aussi dans E. La preuve de Kneser adaptée au premier p montre que E contient toutes les classes de réseaux entiers unimodulaires (pour le type II on utilise le fait qu'il existe un réseau de type II qui est $2-$voisin de $\mathbb{Z}^{8n}$). $\square$

Preuve du lemme 3. Si la norme de v est divisible par p^2, on voit qu'on a $\cup_{i=0}^{p-1} X_i = \{z \in \mathbb{Z}^n \mid \langle z, v\rangle \in p\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}\frac{1}{p}v$ et on saît par la proposition 1 que ceci est un réseau entier unimodulaire qui est un $p-$voisin de $\mathbb{Z}^n$.

Il suffit donc de vérifier que ce réseau ne dépend pas du choix d'un vecteur v particulier. Soit donc $v' \in \mathbb{Z}^n \setminus p\mathbb{Z}^n$ avec $\overline{v'} = \overline{v} \in V_n(\mathbb{F}_p)$ et $\langle v'|v'\rangle \in p^2\mathbb{N}$. On a $v' = jv + px$ pour un certain $j \in [1, .., p-1]$ et pour un certain $x \in \mathbb{Z}^n$ ce qui implique

$$\langle v'|v'\rangle = j^2\langle v|v\rangle + 2jp\langle v|x\rangle + p^2\langle x|x\rangle \ .$$

Comme $\langle v'|v'\rangle \equiv \langle v|v\rangle \pmod{p^2}$ on en déduit $\langle v|x\rangle \equiv 0 \pmod{p}$. Ceci démontre que $x \in \Lambda(v; p)$. Il en résulte que $\frac{v'}{p} = j\frac{v}{p} + x \in \Lambda(v; p)$ et donc $\Lambda(v'; p) \subset \Lambda(v; p)$. L'égalité se déduit ensuite par symétrie entre v et v'. $\square$

Preuve du corollaire 4. Le lemme 3 montre que tout point de $V_n(\mathbb{F}_p)$ permet de construire un réseau entier unimodulaire $p-$voisin de $\mathbb{Z}^n$. Deux points distincts de $V_n(\mathbb{F}_p)$ correspondent à deux réseaux distincts (mais peut-être isomorphes). De plus, la deuxième partie de la propositi on 1 montre que tout réseau entier unimodulaire qui est $p-$voisin de $\mathbb{Z}^n$ est obtenu de cette façon. □

Preuve de la proposition 5. C'est une vérification qui peut être fait en utilisant les tables du Chapitre 6, Groupes et algèbres de Lie de Bourbaki. Le degré du graphe $G(A_n)$ est égal au degré de $G(D_l)$ si et seulement si $n = 2l - 3$. Pour que ces graphes aient le même nombre de sommets il faut alors que $l = 1$ ou $l = 3$ ce qui est impossible car les graphes $G(D_l)$ n'existent que pour $l \geq 4$. On vérifie de même que les graphes pour E_6, E_7 et E_8 sont caractérisés par leur cardinalité et leur degré. □

Preuve de la proposition 6. (i) Montrons d'abord qu'on a

$$\Lambda \cap \Lambda' \cap \mathbb{Z}^n = \Lambda_e \cap \mathbb{Z}^n \ .$$

Soit $a \in \Lambda \cap \Lambda' \cap \mathbb{Z}^n$. On a donc $\langle a|v\rangle \in k\mathbb{Z}$ et $\langle a|v'\rangle \in 2k\mathbb{Z}$. Comme toutes les coordonnées de v' sont impaires, on voit que $\langle a|v'\rangle \in 2\mathbb{Z}$ si et seulement si les coordonnées impaires de a sont en nombre pair. Le vecteur $a \in \mathbb{Z}^n$ est donc de norme paire. Comme les coordonnées de v et de v' sont congrues $\pmod k$ pour k impair on obtient

$$\langle a|v\rangle \in k\mathbb{Z} \text{ et } \langle a|a\rangle \in 2\mathbb{N} \Longleftrightarrow \langle a|v'\rangle \in 2k\mathbb{Z} \ .$$

Une petite vérification montre alors que le produit scalaire de $\frac{2}{k}v$ avec tous les éléments de Λ' est entier. Le vecteur $\frac{2}{k}v$ appartient donc à Λ'. Comme 2 est inversible dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, tout élément x de norme paire de Λ peut s'écrire comme $x = 2j\frac{v}{k} + z$ avec $j \in [0,..,k-1]$ et $z \in \Lambda_e \cap \mathbb{Z}^n$. Ceci montre bien que x appartient à Λ_e.

La preuve pour $\Lambda \cap \Lambda''$ est pareille.

Finalement il suffit de vérifier que les trois réseaux Λ, Λ' et Λ'' sont tous distincts. Ceci résulte du fait que les produit scalaires entre $\frac{v}{k}, \frac{v'}{2k}$ et $\frac{v''}{2k}$ ne sont pas entiers.

(ii) Le sous-réseau

$$\Lambda_e \cap \mathbb{Z}^n = \{z \in \mathbb{Z}^n \mid \langle z|v'\rangle \in 2k\mathbb{Z}\} = \{z \in \mathbb{Z} \mid \langle z|v''\rangle \in 2k\mathbb{Z}\}$$

ne contient que des vecteurs de norme paire et v', v'' sont de norme paire si et seulement si $4m = n \equiv 0 \pmod 8$.

(iii) Soit $r \in \Lambda$ un élément de norme 1. Un petit calcul montre que la réflexion

$$\sigma_r(x) = x - 2\langle r|x\rangle r$$

échange Λ' et Λ''. □

Roland BACHER
Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
B.P. 74
38402 St. Martin d'Hères Cedex
email: bacher@ujf-grenoble.fr