Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **9** *(1997), 463–478*

Échanges de trois d'intervalles et suites sturmiennes

par Gilles DIDIER

Résumé. On appelle échange d'intervalles l'application qui consiste à réordonner les intervalles d'une partition de $[0,1[$ suivant une permutation donnée. Dans le cas des partitions en trois intervalles, nous donnons une caractérisation combinatoire des suites codant, d'après la partition définissant l'échange, l'orbite d'un point de $[0,1[$ sous l'action de cette transformation.

Abstract. An interval exchange is an application which rearrange, according to a given permutation, a set of intervals partitioning $[0,1[$. In the case of partitions into three intervals, we give a combinatorial caracterisation of sequences coding, according to the partition defining an intervals exchange, the orbit under this transformation, of a point in $[0,1[$.

Introduction

Soient s un entier supérieur ou égal à deux, σ une permutation de $\{1,\ldots,s\}$ et $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$ un élément de $\mathbb{R}^s$ à coordonnées strictement positives et telles que $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$. Posons alors $\delta_0 = 0$ et pour tout $k \in \{1,\ldots,s\}$:

$$\delta_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \text{ et } I_k = [\delta_{k-1}, \delta_k[\ .$$

L'échange d'intervalles associé à (σ,λ) , noté E , est l'isométrie par morceaux qui consiste à permuter, suivant σ , les intervalles $I_1,\ldots,I_s$.

Plus formellement, E est la bijection de $[0,1[$ vers $[0,1[$ qui associe, à tout point $x \in I_k$ avec $k \in \{1,\ldots,s\}$, le point $E(x) = x + \alpha_k$, où :

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{\sigma(k)-1} \lambda_{\sigma^{-1}(i)} - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \ .$$

Manuscrit reçu le 18 juin 1997

On peut également considérer des échanges portant sur un intervalle $[0,\gamma[$ avec $\gamma \neq 1$ que l'on définit de la même façon (on a $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = \gamma$ au lieu de $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$). Nous parlerons alors d'échanges d'intervalles non-normalisés.

On peut, sans perdre de généralité, limiter l'étude aux échanges d'intervalles associés aux permutations sur $\{1,\dots,s\}$ ne laissant invariant aucun ensemble $\{1,\dots,t\}$ avec $t < s$ qui sont dites **irréductibles**.

En effet, si la permutation associée à un échange d'intervalles n'est pas irréductible, celui-ci peut alors être décomposé, quitte à effectuer quelques renormalisations, en échanges d'intervalles irréductibles.

Avec les notations précédentes, un échange d'intervalle est dit **régulier** si l'égalité :

$$E^k(\delta_i) = \delta_j \text{ où } i \text{ et } j \in \{1,\dots,s-1\} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

implique $k = 0$ et $i = j$.

Les propriétés ergodiques des systèmes dynamiques associés aux échanges d'intervalles (i.e. de la forme $([0,1[,E))$ ont été étudiées par M. S. Keane et G. Rauzy dans [KEAN,KEAN–RAU,RAU].

Étant donné un système dynamique de ce type, il peut être utile de considérer les suites symboliques (i.e. à valeur sur un alphabet fini) construites à partir d'une partition finie du système. En associant une lettre a_k à chaque classe C_k de la partition, le codage de l'orbite d'un point x du système dynamique est alors la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_k$ si $E^n(x) \in C_k$.

Dans le cas des échanges d'intervalles, le codage le plus naturel consiste à associer une lettre différente à chaque intervalle de l'échange. On appellera **codage d'échange d'intervalles** toute suite u sur un alphabet $\mathcal{A} = \{a_1,\dots,a_s\}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_l$ si $E^n(x) \in I_l$ où $x \in [0,1[$ et E est un échange de s intervalles $I_1, I_2, \dots, I_s$.

Pour étudier une suite symbolique u , on considère souvent l'ensemble des mots finis admettant au moins une occurrence dans cette suite, appelés **facteurs** de u .

En particulier l'alphabet d'une suite est l'ensemble des lettres y apparaissant (i.e. dire que u est une suite sur un alphabet $\mathcal{A}$ sous-entend implicitement que toute lettre de $\mathcal{A}$ est un facteur de u).

La **fonction de complexité** d'une suite u , notée $p(u,n)$, est la fonction qui, à tout entier naturel n non nul, fait correspondre le nombre de facteurs différents de longueur n de u .

Une suite u est dite **uniformément récurrente** si tout facteur de u y apparaît une infinité de fois à lacunes bornées.

Dans [SAN], M. L. Santini étudie un certain nombre de propriétés des codages d'échange de trois intervalles. En particulier elle montre que, si E est un échange régulier de trois intervalles, la fonction de complexité du codage de l'orbite, sous l'action de E , de tout point de $[0,1[$ est égale à $2n+1$ pour tout entier naturel non nul n . Toutefois cette propriété ne suffit pas à caractériser ce type de codages : il existe des suites de complexité $2n+1$ qui ne sont pas des codages d'échanges de trois d'intervalles (voir par exemple [ARN–RAU]).

Nous donnons à la fin de ce travail une caractérisation combinatoire des codages non périodiques d'échanges de trois intervalles. Nous utilisons pour ce faire les résultats sur les codages de rotations que nous avons établis dans [DID].

Nous rappelons dans la section 1 quelques propriétés de ces codages en commençant par les plus remarquables d'entre eux : les suites sturmiennes. Nous présentons ensuite les caractérisations des codages de rotation que nous avons obtenus dans [DID]. Nous terminons cette section en montrant le lien entre les codages de rotation et ceux d'échanges d'intervalles associés à une permutation circulaire.

La section 2 est consacrée à l'étude des codages d'échanges de trois intervalles. Nous y distinguons tout d'abord le cas où la permutation associée à l'échange est circulaire. Nous montrons ensuite comment se ramener à ce dernier cas si la permutation n'est pas circulaire. Enfin nous énonçons la caractérisation.

1 Préliminaires — codages de rotations

Les rotations (modulo 1) sont une autre classe – mieux connue – de transformations de $[0,1[$. Pour tout réel $\alpha \in [0,1[$, on appelle rotation d'angle α et on note R_α l'application qui associe à tout point $x \in [0,1[$ le point $x+\alpha \bmod 1$. En particulier, un échange de deux intervalles $(\sigma,(\lambda_1,\lambda_2))$ avec σ irréductible est une rotation (modulo 1) d'angle λ_2 (i.e. égal à la longueur du second intervalle). Les codages que l'on peut obtenir sont bien connus. Si λ_2 est rationnel, le codage de tout point de $[0,1[$ est périodique, sinon, on obtient des suites dont la fonction de complexité est égale à $n+1$ pour tout entier naturel non nul n et qui sont appelées

suites sturmiennes.

1.1 Suites sturmiennes.

Théorème 1.1 (Hedlund & Morse [HED–MOR 1&2]). *Une suite u sur $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ est sturmienne si et seulement si il existe un nombre irrationnel $\alpha \in [0,1[$ et un nombre réel $x \in [0,1[$ tels que pour tout entier naturel n , on ait :*

$$u_n = \begin{cases} \mathbf{1} & \textit{si } x + n\alpha \bmod 1 \in I \ , \\ \mathbf{0} & \textit{sinon,} \end{cases}$$

où I est l'intervalle $[0,\alpha[$ ou $]0,\alpha]$.

Le langage d'une suite sturmienne ne dépend que de l'angle de la rotation qui lui est associée (voir par exemple [ARN–RAU]). Deux suites sturmiennes ont le même langage si et seulement si elles codent une rotation de même angle.

L'angle α associé à une suite sturmienne u apparaît sous diverses formes dans u . En particulier, une conséquence de l'équirépartition de l'ensemble $\{n\alpha \bmod 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ est que la fréquence de la lettre $\mathbf{1}$ dans cette suite existe et est égale à α (voir [BER]).

1.2 Caractérisation des codages de rotations.

Nous avons étudié plus généralement dans [DID] les codages de l'orbite d'un point de $[0,1[$ sous l'action d'une rotation d'angle irrationnel associés à une partition en un nombre fini d'intervalles.

Définition 1.1 [DID]. *Une suite sur un alphabet $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\#\mathcal{A}}\}$ est un codage de rotation s'il existe deux nombres réels $\alpha \in [0,1[$ et $x \in [0,1[$ et une partition de $[0,1[$ en $\#\mathcal{A}$ intervalles de longueurs strictement positives $\{I_1, I_2, \ldots, I_{\#\mathcal{A}}\}$, tels que, pour tout entier naturel k , on ait :*

$$u_k = a_j \ \textit{si } x + k\alpha \in I_j \ .$$

Nous avons donné une caractérisation combinatoire de ces suites que nous allons préciser. Son expression nécessite l'introduction de quelques définitions.

Elle fait tout d'abord intervenir deux automates cellulaires particuliers que nous notons f_0 et f_1 , et qui, à tout mot u de $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{\mathbb{N}}$, associent respectivement les mots $f_0(u)$ et $f_1(u)$ tels que pour tout entier naturel k , on ait :

$$f_0(u)_k = \overline{f}_0(u_k u_{k+1}) \text{ et } f_1(u)_k = \overline{f}_1(u_k u_{k+1}) ,$$

où $\overline{f}_0$ et $\overline{f}_1$ sont les fonctions de $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^2$ dans $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ définies par :

$$\begin{array}{ccc} \overline{f}_0 & & \overline{f}_1 \\ \mathbf{00} \to \mathbf{0} & & \mathbf{00} \to \mathbf{0} \\ \mathbf{01} \to \mathbf{0} & \text{et} & \mathbf{01} \to \mathbf{1} \\ \mathbf{10} \to \mathbf{1} & & \mathbf{10} \to \mathbf{0} \\ \mathbf{11} \to \mathbf{0} & & \mathbf{11} \to \mathbf{0} \end{array}$$

Ces deux automates nous ont permis de caractériser une large classe de codages de rotations associés à une partition en deux intervalles.

Théorème 1.2 [DID]. *Une suite u sur l'alphabet $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ est un codage de rotation d'angle α irrationnel associé à une partition en deux intervalles contenant tous deux un intervalle semi-ouvert de longueur α si et seulement si les suites $f_0(u)$ et $f_1(u)$ sont sturmiennes.*

Les suites sturmiennes $f_0(u)$ et $f_1(u)$ apparaissant dans le théorème précédent sont alors toutes deux associées à α , l'angle de rotation du codage initial u .

Pour tout entier naturel i strictement inférieur à $\#\mathcal{A}$, nous notons ϕ_i l'application qui à toute suite u sur l'alphabet $\mathcal{A}$ associe la suite $\phi_i(u)$ sur l'alphabet $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ définie, pour tout entier naturel k , par :

$$\phi_i(u)_k = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } u_k = a_i , \\ \mathbf{0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin nous définissons la propriété (†) sur les suites.

Définition 1.2 [DID]. *Une suite u sur un alphabet $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\#\mathcal{A}}\}$ possède la propriété (†) si, quitte à renuméroter les lettres de $\mathcal{A}$, l'inclusion suivante est vérifiée :*

$$L_2(u) \subset \{a_{\#\mathcal{A}}a_1, a_1a_2, \ldots, a_{\#\mathcal{A}-1}a_{\#\mathcal{A}}\} \cup \{a_1a_1, \ldots, a_{\#\mathcal{A}}a_{\#\mathcal{A}}\}$$

Théorème 1.3 [DID]. *Soit u une suite sur l'alphabet $\mathcal{A}$. La suite u est un codage de rotation d'angle irrationnel si et seulement si il existe deux entiers naturels strictement positifs p et q premiers entre eux tels que,* *pour tout entier naturel $i < p$ et tout entier naturel $j < q$, les assertions suivantes soient vérifiées :*

- *les suites $(u_{pn+i})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{qn+j})_{n\in\mathbb{N}}$ possèdent la propriété (†) ,*
- *les suites $f_0 \circ \phi_1((u_{pn+i})_{n\in\mathbb{N}})$, ... , $f_0 \circ \phi_{\#\mathcal{A}}((u_{pn+i})_{n\in\mathbb{N}})$ et $f_0 \circ \phi_1((u_{qn+j})_{n\in\mathbb{N}})$, ... , $f_0 \circ \phi_{\#\mathcal{A}}((u_{qn+j})_{n\in\mathbb{N}})$ sont sturmiennes.*

Les résultats précédents (théorèmes 1.2 et 1.3) caractérisent les codages de rotations au sens de la définition 1.1 . La partition associée à un tel codage peut éventuellement contenir un ou plusieurs intervalles fermés. Par contre dans le cas des codages d'échanges d'intervalles, la partition que l'on considère est uniquement constituée de semi-ouverts. Ceci pourrait poser problème pour appliquer les résultats présentés dans cette section. En fait on montre que si un codage de rotation est uniformément récurrent, on peut supposer que la partition qui lui est associée ne contient que des intervalles semi-ouverts.

PROPOSITION 1.1 [DID]. *Un codage derotation n'est pas uniformément récurrent si et seulement si deux intervalles I et J de la partition, avec I fermé à gauche et J fermé à droite ou I ouvert à gauche et J ouvert à droite, sont tels que la borne inférieure de I et la borne supérieure de J appartiennent à l'orbite, sous l'action de la rotation, du point de départ associé au codage.*

Autrement dit si un codage de rotation est uniformément récurrent toutes les bornes d'intervalles appartenant à l'orbite du point de départ associé à ce codage sont orientées dans le même sens "ouvert/fermé" et l'on peut considérer que la partition est uniquement constituée d'intervalles semi-ouverts (tous les choix "ouvert/fermé" des bornes qui n'appartiennent pas à l'orbite du point de départ sont compatibles avec le codage).

1.3 Échanges d'intervalles associés à une permutation circulaire.

Le lien entre rotations et échanges d'intervalles s'établit facilement lorsque la permutation associée à l'échange est circulaire. Nous parlerons alors d'échange circulaire d'intervalles. Notons que, mis à part l'identité, toute permutation circulaire est irréductible.

LEMME 1.1. *Si une suite non périodique u sur un alphabet $\mathcal{A}$ code l'orbite d'un point de $[0,1[$ sous l'action d'un échange circulaire d'intervalles alors u est le codage de l'orbite du même point associé à la même partition sous l'action d'une rotation et u est une suite uniformément récurrente. De plus* *il existe un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ tel que la suite obtenue à partir de u en projetant toutes les lettres appartenant à $\mathcal{B}$ sur* **1** *et les autres sur* **0** *soit sturmienne.*

Preuve. Supposons que σ soit circulaire et notons $d = \sigma(1)$. On a alors pour tout $k \in \{1, \ldots, s\}$, $\sigma(k) = k + d - 1 \bmod s$ et

$\alpha_k = \sum_{i=1}^{k+d-2 \bmod s} \lambda_{i-d+1 \bmod s} - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i$. On vérifie que, quelque soit $k \in \{1, \ldots, s\}$, on a $\alpha_k = \sum_{i=d}^{s} \lambda_i \bmod 1 = \alpha$.

La transformation $E = (\sigma, \lambda)$ est alors une rotation d'angle α , et si la suite u est le codage de l'orbite d'un point x de $[0, 1[$ sous l'action de E , elle peut également se définir pour tout entier naturel n par $u_n = l$ si $x + n\alpha \bmod 1 \in I_l$.

On en déduit qu'une condition nécessaire pour qu'une suite code un échange circulaire d'intervalles est que cette suite soit engendrée par rotation. De plus, comme tous les intervalles de la partition associée à ce codage sont semi-ouverts, la proposition 1.1 nous assure du caractère uniformément récurrent de u .

Toutefois un codage de rotation n'est pas nécessairement un codage (naturel) d'échange circulaire d'intervalles. En effet, dans ce dernier cas, l'angle de rotation est égal à la somme des longueurs d'un certain nombre (compris entre 1 et $s - 1$) d'intervalles successifs de la partition, condition qui n'est pas, en général, vérifiée par les codages de rotations.

Cette condition sur la partition s'exprime de façon combinatoire : la suite obtenue à partir du codage en projetant un certain sous-ensemble de l'alphabet sur **1** et son complémentaire sur **0**, est sturmienne (théorème 1.1) . □

2 Échanges de trois intervalles

Nous allons nous intéresser dans cette section aux codages d'échanges de trois intervalles. Dans ce cas il y a trois permutations irréductibles :

- σ_1 : $1/2/3 \to 3/2/1$
- σ_2 : $1/2/3 \to 3/1/2$
- σ_3 : $1/2/3 \to 2/3/1$

Remarquons que les permutations σ_2 et σ_3 sont circulaires.

2.1 Échanges circulaires de trois intervalles.

En fait dans le cas des échanges circulaires de trois intervalles, nous allons voir que la conjonction des deux conditions nécessaires du lemme 1.1 est suffisante.

Commençons par remarquer qu'un codage d'échange circulaire d'intervalles code indifféremment un échange d'intervalles associé à la permutation σ_2 ou à la permutation σ_3 .

LEMME 2.1. *Une suite u code l'orbite du point x sous l'action de l'échange d'intervalles $E = (\sigma_2, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))$ si et seulement si elle code l'orbite du point $1 - x$ sous l'action de l'échange d'intervalles $E' = (\sigma_3, (\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1))$.*

Preuve. Supposons que u code l'orbite du point x sous l'action de l'échange $E = (\sigma_2, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))$ et notons f la bijection de $[0, 1[$ qui associe à tout réel $x \in [0, 1[$ le réel $f(x) = 1 - x$. On a pour tout entier naturel n :

$$u_n = a_l \text{ si } E^n(x) \in I_l \ ,$$

avec $E(x) = x + \lambda_3 \bmod 1$.

Comme f est une bijection on a également :

$$u_n = a_l \text{ si } (f \circ E \circ f^{-1})^n(f(x)) \in f(I_l) \ .$$

et $(f \circ E \circ f^{-1})(x) = x + 1 - \lambda_3 \bmod 1$.

Considérons l'échange $E' = (\sigma_3, (\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1))$. On vérifie que $E' = f \circ E \circ f^{-1}$ et qu'en notant I'_1 , I'_2 et I'_3 les intervalles de la partition associée à E' , on a :

$$I'_1 = f(I_3) \ , \ I'_2 = f(I_2) \text{ et } I'_3 = f(I_1) \ .$$

La suite u peut également être définie par :

$$u_n = a_l \text{ si } {E'}^n(f(x)) \in I'_l \ .$$

Le codage de l'orbite du point x sous l'action de E code également l'orbite du point $f(x)$ sous l'action de E' . □

LEMME 2.2. *Une suite non périodique u sur l'alphabet $\{a_1, a_2, a_3\}$ code l'orbite d'un point x sous l'action d'un échange circulaire de trois intervalles* *si et seulement si u est un codage de rotation uniformément récurrent tel que* $\phi_1(u)$, $\phi_2(u)$ *ou* $\phi_3(u)$ *soit sturmienne.*

Preuve. L'un des sens de l'équivalence étant donné par le lemme 1.1 , il reste à montrer qu'un codage de rotation sur trois lettres uniformément récurrent code un échange circulaire d'intervalles si l'une de ses images par les fonctions indicatrices des lettres est sturmienne.

Supposons donc que u code l'orbite d'un point x sous l'action d'une rotation d'angle α , le cercle unité étant partitionné en trois intervalles J_1 , J_2 et J_3 .

Comme u est uniformément récurrente, on peut supposer que les intervalles de la partition sont semi-ouverts. Quitte à renverser le sens de rotation et à remplacer α par $1-\alpha$, supposons que les intervalles sont semi-ouverts à droite.

On a donc, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = a_l \text{ si } x + n\alpha \bmod 1 \in J_l \ ,$$

Supposons par exemple que $\phi_1(u)$ est sturmienne. Cette suite peut être définie par :

$$\phi_1(u)_n = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } x + n\alpha \bmod 1 \in J_1 \ , \\ \mathbf{0} & \text{si } x + n\alpha \bmod 1 \in J_2 \cup J_3 \ , \end{cases}$$

On déduit des remarques suivant le théorème 1.1 que la longueur de l'intervalle J_1 est égale soit à α , soit à $1-\alpha$.

On étudie ces deux cas séparément :

- Si $|J_1| = \alpha$, on note y la borne supérieure de J_1 . Considérons alors $I_3 = R_{1-y}(J_1)$ et $x' = R_{1-y}(x)$. Si la borne inférieure de $R_{1-y}(J_2)$ est nulle, on pose $I_1 = R_{1-y}(J_2)$, $I_2 = R_{1-y}(J_3)$; sinon on pose $I_1 = R_{1-y}(J_3)$, $I_2 = R_{1-y}(J_2)$.
- Si $|J_1| = 1-\alpha$, on note y la borne inférieure de J_1 . Considérons alors $I_1 = R_{1-y}(J_1)$ et $x' = R_{1-y}(x)$. Si la borne supérieure de $R_{1-y}(J_2)$ est égale à 1 , on pose $I_3 = R_{1-y}(J_2)$, $I_2 = R_{1-y}(J_3)$; sinon on pose $I_3 = R_{1-y}(J_3)$, $I_2 = R_{1-y}(J_2)$.

Dans les deux cas la suite u est alors, à une bijection d'alphabets près, le codage de l'orbite du point x' sous l'action de l'échange $(\sigma_3, (|I_1|, |I_2|, |I_3|))$. □

Le lemme précédent nous permet en utilisant le théorème 1.3 de caractériser les codages d'échanges circulaires de trois intervalles. Toutefois cette caractérisation fait intervenir des suites extraites en progressions arithmétiques. Nous allons voir qu'il est possible, dans ce cas précis, de donner un critère plus direct.

Notons g_2 l'application qui, à toute suite u de $\{a_1, a_2, a_3\}^{\mathbb{N}}$, associe la suite $g_2(u)$ de $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^{\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel k par :

$$g_2(u)_k = \overline{g_2}(u_k u_{k+1}) ,$$

où $\overline{g_2}$ est la fonction définie pour tout $bc \in \{a_1, a_2, a_3\}^2$ par :

$$\overline{g_2}(bc) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } b = a_2 \text{ ou } bc = a_1 a_3 , \\ \mathbf{0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.1. *Une suite u non périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$ à trois lettres code un échange circulaire de trois intervalles si et seulement si elle vérifie les trois conditions :*

- *la suite u est uniformément récurrente ;*
- *il existe une numérotation $\{a_1, a_2, a_3\}$ des lettres de $\mathcal{A}$ telle que les mots $a_3 a_2$ et $a_2 a_1 a_3$ ne sont pas facteurs de u ;*
- *pour cette numérotation, les suites $\phi_1(u)$, $f_0 \circ g_2(u)$, $f_1 \circ g_2(u)$ sont sturmiennes.*

Preuve. Supposons tout d'abord que u code un échange circulaire de trois intervalles. D'après le lemme 2.2 , la suite u est alors un codage de rotation d'angle α irrationnel associé à une partition en trois intervalles semi-ouverts $\{I_1, I_2, I_3\}$.

Sans perdre de généralité, nous supposons $\alpha < \frac{1}{2}$. En effet, si cette inégalité n'est pas vérifiée, il suffit d'inverser le sens de rotation et de remplacer α par $1 - \alpha$ pour l'obtenir.

Le lemme 2.2 nous assure qu'un des intervalles de la partition — I_1 pour fixer les idées — est de longueur égale à α ou $1 - \alpha$. La suite $\phi_1(u)$ est sturmienne (théorème 1.1).

Quitte à renuméroter ces intervalles et les lettres de $\mathcal{A}$ leur correspondant, nous supposerons que les intervalles I_1 , I_2 et I_3 apparaissent dans cet ordre lorsqu'on suit le sens de rotation.

Ainsi, comme on a supposé $\alpha < \frac{1}{2}$, le mot $a_2 a_1 a_3$ n'apparaît pas dans u .

Lorsqu'on suit le sens de rotation, l'intervalle I_2 est directement consécutif à l'intervalle I_1 de longueur supérieure ou égale à α . Ceci implique que le mot a_3a_2 ne peut être facteur de la suite u .

Nous allons à présent montrer que la suite $g_2(u)$ est un codage de rotation associé à une partition en deux intervalles contenant tous deux un intervalle semi-ouvert de longueur α .

Remarquons que, comme I_1 et son complémentaire (constitué de l'union de I_2 et I_3) sont deux intervalles semi-ouverts, l'un de longueur α et l'autre de longueur $1-\alpha$, ils contiennent tous deux un intervalle semi-ouvert de longueur α .

En notant $J = I_1 \bigcap R_{-\alpha}(I_3)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n u_{n+1} = a_1 a_3 \text{ si } x + n\alpha \bmod 1 \in J\ .$$

Et, en notant $K = I_2 \bigcup J$, on a :

$$g_2(u)_n = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } x + n\alpha \bmod 1 \in K\ , \\ \mathbf{0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $|I_2| \geq \alpha$ alors on a $I_1 \bigcap R_{-\alpha}(I_3) = \emptyset$ et $K = I_2$. De plus, le complémentaire de I_2 contenant I_1 , il contient nécessairement un semi-ouvert de longueur α .

Si $|I_2| < \alpha$, l'ensemble $I_1 \bigcap R_{-\alpha}(I_3)$ est un intervalle de longueur égale à $\alpha - |I_2|$ contigu à l'intervalle I_2 . En effet, on déduit du fait que I_1 et $I_2 \bigcup I_3$ sont de longueurs supérieures à α que la borne inférieure de $R_{-\alpha}(I_3)$ appartient à I_1 alors que sa borne supérieure appartient à $I_2 \bigcup I_3$. L'ensemble K est donc un intervalle semi-ouvert de longueur α .

Dans les deux cas l'ensemble K est un intervalle tel que lui-même et son complémentaire contiennent un intervalle semi-ouvert de longueur α . Le théorème 1.2 nous permet de conclure que les suites $f_0 \circ g_2(u)$, $f_1 \circ g_2(u)$ sont sturmiennes.

Réciproquement, supposons que u est uniformément récurrente et telle que les mots a_3a_2 et $a_2a_1a_3$ ne sont pas facteurs de u et que les suites $\phi_1(u)$, $f_0 \circ g_2(u)$, $f_1 \circ g_2(u)$ sont sturmiennes.

On déduit des théorèmes 1.1 et 1.2 que les suites $\phi_1(u)$ et $g_2(u)$ sont définies, pour tout entier naturel n , par :

$$\phi_1(u)_n = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } x + n\alpha_1 \bmod 1 \in J_1\ , \\ \mathbf{0} & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$g_2(u)_n = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } x + n\alpha_2 \bmod 1 \in J_2 \ , \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \ ; \end{cases}$$

où $x \in [0,1[$, α_1 et α_2 sont deux réels irrationnels dans $[0, \frac{1}{2}[$ et J_1 et J_2 deux intervalles inclus dans $[0,1[$.

Notons que supposer que les suites $\phi_1(u)$ et $g_2(u)$ sont associées à un même point de départ x n'enlève aucune généralité car il est toujours possible de translater le découpage associé à l'une de ces suites.

Nous allons tout d'abord établir que $\alpha_1 = \alpha_2$.

Pour cela considérons la fréquence de la lettre $\mathbf{1}$ respectivement dans $f_0 \circ \phi_1(u)$ et $f_1 \circ g_2(u)$.

Par définition, on a :

$$f_0 \circ \phi_1(u)_n = \mathbf{1} \text{ ssi } u_n u_{n+1} = a_1 a_2 \text{ ou } u_n u_{n+1} = a_1 a_3$$

et

$$f_1 \circ g_2(u)_n = 1 \text{ ssi } \begin{array}{l} u_n u_{n+1} = a_1 a_2 \text{ ou } u_n u_{n+1} = a_3 a_2 \text{ ou,} \\ u_n u_{n+1} u_{n+2} = a_1 a_1 a_3 \text{ ou } u_n u_{n+1} u_{n+2} = a_3 a_1 a_3 \ . \end{array}$$

Par hypothèse les mots $a_3 a_2$ et $a_2 a_1 a_3$ n'apparaissent pas dans u et on peut simplifier cette dernière expression pour obtenir :

$$f_1 \circ g_2(u)_n = \mathbf{1} \text{ ssi } u_n u_{n+1} = a_1 a_2 \text{ ou } u_{n+1} u_{n+2} = a_1 a_3 \ .$$

On en déduit que la fréquence de la lettre $\mathbf{1}$ est la même dans $f_0 \circ \phi_1(u)$ et $f_1 \circ g_2(u)$.

Or la fréquence de la lettre $\mathbf{1}$ dans la suite $f_0 \circ \phi_1(u)$ est égale à l'angle α_1 de la rotation associée à ce codage. De même la fréquence de cette lettre dans $f_1 \circ g_2(u)$ est égale à l'angle α_2 associé à cette suite.

On en conclut que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ et la suite u peut être définie, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = \begin{cases} a_1 & \text{si } x + n\alpha \bmod 1 \in J_1 \ , \\ a_2 & \text{si } x + n\alpha \bmod 1 \in J_2 \bigcap {J_1}^C \ , \\ a_3 & \text{si } x + n\alpha \bmod 1 \in (J_2 \bigcup J_1)^C \ . \end{cases}$$

Il reste à montrer que les ensembles $J_2 \bigcap {J_1}^C$ et $(J_2 \bigcup J_1)^C$ sont des intervalles (ces deux ensembles pouvant éventuellement être des unions d'intervalles).

Si le mot a_1a_3 n'apparaît pas dans u alors on a $J_2 \bigcap {J_1}^C = J_2$. De plus l'intervalle J_2 contient un semi-ouvert de longueur α . Comme par hypothèse le mot a_3a_2 n'est pas facteur de u , l'ensemble $(J_2 \bigcup J_1)^C$ ne contient pas d'intervalle situé entre J_1 et J_2 lorsqu'on suit le sens de rotation. La borne inférieure de J_2 coïncide donc avec la borne supérieure de J_1 et l'ensemble $(J_2 \bigcup J_1)^C$ est également un intervalle.

Si le mot a_1a_3 est facteur de u , on a $J_1 \bigcap J_2 \neq \emptyset$. Nous allons tout d'abord montrer que l'on ne peut pas avoir $J_1 \subset J_2$. En effet cette inclusion implique que la lettre a_1 est toujours suivie de la lettre a_3 dans u et le mot a_1a_2 n'apparaît pas dans u . Comme on suppose de plus que le mot a_3a_2 n'est pas facteur de u , la lettre a_2 ne peut donc être précédée que par elle même dans la suite u qui est, par hypothèse, uniformément récurrente. Il n'y a alors que deux possibilités : soit $u = a_2^{\infty}$, soit la lettre a_2 n'admet pas d'occurrence dans u . Dans les deux cas il y a contradiction avec le fait que u est une suite sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

On a nécessairement $J_1 \not\subset J_2$ et l'ensemble $J_2 \bigcap {J_1}^C$ est un intervalle ayant une borne commune avec l'intervalle J_1 ; l'ensemble $(J_2 \bigcup J_1)^C$ est donc également un intervalle.

Dans tous les cas l'ensemble $\{J_1, J_2 \bigcap {J_1}^C, (J_2 \bigcup J_1)^C\}$ constitue une partition de $[0,1[$ en trois intervalles et u est un codage de rotation associé à ce découpage.

De plus et par hypothèse, la suite u est uniformément récurrente avec $\phi_1(u)$ sturmienne. Le lemme 2.2 nous permet de conclure que u est un codage d'échange circulaire d'intervalles. □

2.2 Échanges associés à la permutation σ_1.

Nous allons voir que l'on peut se ramener à un échange circulaire d'intervalles par une méthode directement issue de l'induction de Rauzy (voir [RAU] ou [SAN]).

Notons τ l'application de $\{a_1, a_2, a_3\}$ dans $\{a_1, a_2, a_3\}^*$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} & \tau & \\ a_1 & \to & a_1 \\ a_2 & \to & a_2a_3 \\ a_3 & \to & a_3 \end{array}$$

Cette application se prolonge par concaténation en une application de $\{a_1, a_2, a_3\}^{\mathbb{N}}$ dans $\{a_1, a_2, a_3\}^{\mathbb{N}}$ que nous noterons également τ .

Lemme 2.3. *Soit une suite u non périodique sur l'alphabet $\{a_1, a_2, a_3\}$. La suite u est un codage d'échange d'intervalles associé à la permutation*

σ_1 si et seulement si, quitte à renuméroter les lettres de $\mathcal{A}$, $\tau(u)$ est un codage d'échange circulaire d'intervalles.

Preuve. Nous allons en fait montrer qu'une suite u est un codage d'échange d'intervalles associé à la permutation σ_1 si et seulement si $\tau(u)$ est un codage d'échange d'intervalles associé à la permutation σ_2 . Le lemme 2.1 nous permet alors de conclure.

Soit E l'échange d'intervalles $(\sigma_1,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3))$.

Considérons l'intervalle $[0,1+\lambda_2[$ partitionné en quatre intervalles consécutifs I_1 , I_2 , I_3 et I_4 , de longueurs respectives λ_1 , λ_2 , λ_3 et λ_2 . Notons alors σ' la permutation $1/2/3/4 \to 3/4/1/2$ et E' l'échange non normalisé $(\sigma',(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_2))$ (E' est dit non-normalisé car $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_2 \neq 1$).

Pour tout $y \in [0,1[$, on a : $E'(y) = E(y)$ si $y \in I_1 \cup I_3$ et ${E'}^2(y) = E(y)$ si $y \in I_2$. De plus l'image de tout point de I_2 par E' appartient à I_4 .

Soit $x \in [0,1[$. Notons u (resp. u') le codage de l'orbite de x sous l'action de E (resp. E'). D'après les remarques précédentes, la suite u' peut être obtenue en insérant une occurrence de la lettre a_4 après chaque occurrence de la lettre a_2 dans la suite u . Réciproquement, on obtient u en supprimant toutes les occurrences de la lettre a_4 dans u' .

Autrement dit, on a $u' = \tau'(u)$ où τ' est l'application de $\{a_1,a_2,a_3\}$ dans $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}^*$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} & \tau' & \\ a_1 & \to & a_1 \\ a_2 & \to & a_2a_4 \\ a_3 & \to & a_3 \end{array}$$

Une suite u code donc l'orbite d'un point x sous l'action de E si et seulement si $\tau'(u)$ code l'orbite de x sous l'action de E' .

Il reste à montrer que $\tau'(u)$ code l'orbite d'un point x sous l'action de E' si et seulement si $\tau(u)$ est un codage de rotation associé à la permutation σ_2 . Supposons tout d'abord que $\tau'(u)$ est un codage de l'orbite de x sous l'action de E' . Si l'on note ϕ l'application

$$\begin{array}{rcl} & \phi & \\ a_1 & \to & a_1 \\ a_2 & \to & a_2 \\ a_3 & \to & a_3 \\ a_4 & \to & a_3 \end{array} ,$$

on a $\tau = \phi \circ \tau'$. On en déduit, la transformation E' ne séparant pas les intervalles I_3 et I_4 , que la suite $\tau(u)$ code l'orbite du point x sous l'action de l'échange $(\sigma_2, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_2))$. En renormalisant, elle code également l'orbite de $\frac{x}{1+\lambda_2}$ sous l'action de l'échange $(\sigma_2, (\frac{\lambda_1}{1+\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}, \frac{\lambda_3+\lambda_2}{1+\lambda_2}))$.

Réciproquement supposons que u est une suite non périodique sur l'alphabet $\{a_1, a_2, a_3\}$ et que $\tau(u)$ code l'orbite d'un point x' sous l'action de l'échange d'intervalle $E'' = (\sigma_2, (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3))$.

Pour obtenir $\tau'(u)$ à partir de $\tau(u)$, il suffit de remplacer toute occurrence de la lettre a_3 suivant une occurrence de la lettre a_2 par a_4 . D'après la définition de τ , chaque occurrence de la lettre a_2 est suivie d'au moins une occurrence de la lettre a_3 dans $\tau(u)$. Comme u n'est pas périodique, $\tau(u)$ ne l'est pas non plus et E'' est une rotation d'angle α irrationnel. La densité de $\{n\alpha \bmod 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ implique alors que $E''(I'_2) \subset I'_3$. De plus, par définition, la borne supérieure de $E''(I'_2)$ est égale à 1. Il existe donc un intervalle J tel qu'on ait $I'_3 = J \cup E''(I'_2)$.

On peut alors obtenir $\tau(u')$ par

$$\tau(u')_n = \begin{cases} a_1 & \text{si } E''^n(x') \in I'_1 , \\ a_2 & \text{si } E''^n(x') \in I'_2 , \\ a_3 & \text{si } E''^n(x') \in J , \\ a_4 & \text{si } E''^n(x') \in E''(I'_2) , \end{cases}$$

pour tout entier naturel n . Notons que l'intervalle J ne peut pas être vide car la lettre a_3 n'admettrait alors aucune occurrence dans u .

La suite $\tau'(u)$ codedonc l'orbite du point x' sous l'action de l'échange d'intervalles $(\sigma', (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3 - \lambda'_2, \lambda'_2))$. □

2.3 Une caractérisation générale.

On obtient finalement le théorème suivant en combinant le théorème 2.1 et le lemme 2.3 . Pour alléger son énoncé, nous introduisons la propriété $(\diamond)$.

DÉFINITION 2.1. *Une suite u sur l'alphabet $\mathcal{A}$ à trois lettres possède la propriété $(\diamond)$ si elle vérifie les trois conditions :*

- *la suite u est uniformément récurrente ;*
- *il existe une numérotation $\{a_1, a_2, a_3\}$ des lettres de $\mathcal{A}$ telle que les mots a_3a_2 et $a_2a_1a_3$ ne sont pas facteurs de u ;*
- *pour cette numérotation, les suites $\phi_1(u)$, $f_0 \circ g_2(u)$, $f_1 \circ g_2(u)$ sont sturmiennes.*

Théorème 2.3. *Soit u une suite non périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$ à trois lettres. La suite u est un codage d'échange de trois intervalles si et seulement si elle vérifie l'une des conditions suivantes :*

- *soit u possède la propriété $(\diamond)$.*
- *soit, quitte à renuméroter les lettres de $\mathcal{A}$, $\tau(u)$ possède la propriété $(\diamond)$.*

Bibliographie

[ARN–RAU] P. Arnoux et G. Rauzy, *Représentation géométrique de suites de complexité* $2n+1$, Bull. Soc. math. France **119** (1991), 199–215.

[BER] V. Berthé, *Fréquences des facteurs des suites sturmiennes*, Theoretical Computer Science **165** (1996), 295–309.

[DID] G. Didier, *Codages de rotations*, accepté pour publication dans Acta Arithmetica.

[KEA] M.S. Keane, *Intervalle exchange transformations*, Math. Z. **141** (1975), 25–31.

[KEA–RAU] M.S. Keane et G. Rauzy, *Stricte ergodicité des échanges d'intervalles*, Math. Z. **174** (1980), 203–212.

[HED–MOR1] G.A. Hedlund and M. Morse, *Symbolic Dynamics*, Amer. J. Math. **60** (1938), 815–866.

[HED–MOR2] G A. Hedlund et M. Morse, *Symbolic Dynamics II. Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1940), 287–306.

[RAU] G. Rauzy, *Échanges d'intervalles et transformations induites*, Acta Arithmetica **XXXIV** (1979), 315–328.

[SAN] M.L. Santini–Bouchard, *Échanges de trois intervalles et suites minimales*, Theoretical Computer Science **174** (1997), 171–191.

Gilles DIDIER
Institut de Mathématiques de Luminy
CNRS-UPR 9016 Case 907
163, avenue de Lunminy
13288 Marseille Cedex 9
email : didier@iml.univ-mrs.fr