Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **9** *(1997), 251–266*

Sur les nombres premiers généralisés de Beurling. Preuve d'une conjecture de Bateman et Diamond

par Jean-Pierre KAHANE

Résumé. Soit P une partie discrète et multiplicativement libre de la demi-droite ouverte $]1,\infty[$, et N le semi-groupe unitaire engendré par P. Les éléments de P s'appellent nombres premiers généralisés et ceux de N entiers généralisés. Les fonctions de décompte correspondantes sont désignées $P(x)$ et $N(x)$. Le problème de Beurling consiste à donner des conditions sur $N(x)$ qui entrainent le "théorème des nombres premiers" $P(x) \sim x/\log x$ $(x \to \infty)$. En posant $N(x) = Dx + x\varepsilon(x)$, la condition de Beurling est $\varepsilon(x) = O((\log x)^{-a})$ avec $a > \frac{3}{2}$, et il y a un contre-exemple avec $a = \frac{3}{2}$. L'article montre que la condition $\varepsilon(x)\log x \in L^2(\mathbb{R}^+, dx/x)$ est suffisante, comme l'avaient conjecturé Bateman et Diamond.

Abstract. Given P, a discrete and multiplicatively free subset of the open half line $]1,\infty[$, let N be the multiplicative semigroup generated by 1 and P. The elements of P resp. N are called generalized primes resp. integers. The counting functions are denoted by $P(x)$ and $N(x)$. Beurling's problem is to give conditions on $N(x)$ which imply the "prime number theorem" $P(x) \sim x/\log x$ $(x \to \infty)$. Assuming $N(x) = Dx + x\varepsilon(x)$ $(\varepsilon \to 0)$, Beurling's condition is $\varepsilon(x) = O((\log x)^{-a})$ $(x \to \infty)$ with $a > \frac{3}{2}$, and $a = \frac{3}{2}$ does not work. The article proves that the condition $\varepsilon(x)\log x \in L^2(\mathbb{R}^+, dx/x)$ is sufficient, as conjectured by Bateman and Diamond.

Suivant Beurling [2], soit P une partie discrète de la demi-droite ouverte $]1,\infty[$, multiplicativement libre, et soit N le semi-groupe multiplicatif engendré par 1 et P. Les éléments de P s'appellent les nombres premiers généralisés et ceux de N les entiers généralisés. Désignons par $P(x)$ et $N(x)$ respectivement les fonctions de comptage de P et N :

$$\begin{aligned} P(x) &= \operatorname{card}(P\cap]1,x[), \\ N(x) &= \operatorname{card}(N \cap [1,x[). \end{aligned}$$

On suppose

$$N(x) = Dx + x\epsilon(x), \quad \epsilon(x) = o(1) \quad (x \to \infty),$$

Manuscrit reçu le 7 février 1997

avec $D > 0$. Le problème de Beurling est de donner une condition sur $\epsilon(x)$, aussi bonne que possible, qui entraîne

$$(TNP) \qquad P(x) \sim \frac{x}{\log\ x} \qquad (x \to \infty),$$

le "théorème des nombres premiers". La condition que donne Beurling est

$$\epsilon(x) = O\left(\frac{1}{(\log\ x)^a}\right) \quad (x \to \infty), \quad a > \frac{3}{2},$$

et un exemple montre que cette condition est précise : $a = \frac{3}{2}$ ne convient pas.

En examinant le problème la condition

$$(H) \qquad \int_1^\infty (\epsilon(x) \log\ x)^2 \frac{dx}{x} < \infty$$

s'introduit assez naturellement [1, 3, 6] et on est conduit à se demander si (H) entraîne (TNP). La question a été posée par Bateman et Diamond dans [1], p. 199, et la conjecture étayée par Diamond dans [3]. Le but de cet article est de répondre affirmativement.

THEOREME. (H) *implique* (TNP).

Je rappellerai d'abord des notations et résultats de [6].

On pose

$$\zeta(s) = \sum_{n \in N} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad s = \sigma + it,$$
$$Z(s) = \exp \sum_{p \in P} \frac{1}{p^s}.$$

Ces deux fonctions sont définies et analytiques pour $\sigma > 1$. Leur quotient est prolongeable analytiquement pour $\sigma > \frac{1}{2}$, et il est borné et d'inverse borné lorsque $\sigma > \frac{1}{2}+$ ($\frac{1}{2}+$ signifie $\frac{1}{2} + \delta$ pour un $\delta > 0$), parce que

$$\log \frac{Z(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \in P} \left(\log(1 - \frac{1}{p^s}) + \frac{1}{p^s}\right)$$

et que le terme général est $O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right)$.

Pour $\sigma > 1$

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \int_{1^-}^{\infty} x^{-s} dN(x) \;=\; \frac{D}{s-1} \;+\; \int_{1^-}^{\infty} x^{-s} d(N(x) - Dx) \\ &= \frac{D}{s-1} \;+\; D \;+\; s\int_{1}^{\infty} x^{-s}\epsilon(x)dx\end{aligned}$$

en intégrant par parties. On suppose d'abord

$$(A) \qquad \int_{1}^{\infty} \mid \epsilon(x) \mid \frac{dx}{x} \;<\; \infty.$$

Ainsi $\zeta(s)$ est définie pour $\sigma \geq 1$, et

$$\zeta(1+it) \;=\; \frac{D}{it} \;+\; D \;+\; (1+it)\int_{1}^{\infty} x^{-it}\epsilon(x)\frac{dx}{x}.$$

L'intégrale est une fonction de t qui appartient à l'algèbre de Wiener $A(\mathbb{R}) = \mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$, donc $it\zeta(1+it)$ appartient localement à cette algèbre :

$$it\zeta(1+it) \;\in\; A_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

Comme le quotient $\frac{Z}{\zeta}(1+it)$ est un multiplicateur de $A_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$,

$$it\,Z(1+it) \;\in\; A_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

De plus, comme valeur limite d'une fonction analytique de $\sigma + it$ bornée dans chaque demi-bande $\sigma > 0$, $\mid t \mid < \alpha$,

$$it\,Z(1+it) \;\neq\; 0 \;\; \text{p. p.}$$

Toujours sous l'hypothèse (A), on pose

$$\begin{aligned}\ell_\epsilon(t) &= \sum_{p\in P} \frac{1}{p^{1+\epsilon+it}}, \\ \ell(t) &= \lim_{\epsilon\to 0} \ell_\epsilon(t) \;=\; \log\; Z(1+it),\end{aligned}$$

où la première égalité définit $\ell(t)$ presque partout, et la seconde définit la branche du logarithme considérée.

LEMME. *Quand* ϵ (>0) *tend vers zéro,* ℓ_ϵ *tend vers* ℓ *dans* $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Preuve. Sur tout intervalle compact $(\epsilon+it)Z(1+\epsilon+it)$ tend vers $it\,Z(1+it)$ uniformément et par conséquent, si $Z(1+it)$ ne s'annule pas sur cet intervalle, $\ell_\epsilon(t)+\log(\epsilon+it)$ tend vers $\ell(t)+\log it$ uniformément ; cela établit la convergence de ℓ_ϵ vers ℓ dans $L^2(-a,a)$ quand $a>0$ est assez petit. Soit $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (classe de Schwartz), positive et de type positif, portée par $(-a,a)$, et soit f_b sa translatée par b. Comme, pour $0<\epsilon'<\epsilon$, la fonction presque périodique $\ell_{\epsilon'}(t)-\ell_\epsilon(t)$ a ses coefficients positifs, on voit que

$$\int f_b(t)\left|\ell_{\epsilon'}(t)-\ell_\epsilon(t)\right|^2 dt \;\le\; \int f(t)\left|\ell_{\epsilon'}(t)-\ell_\epsilon(t)\right|^2 dt,$$

et la seconde intégrale tend vers 0 quand ϵ et ϵ' tendent vers 0. Donc les ℓ_ϵ convergent dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, et la limite s'identifie à ℓ.

On tire du lemme la “formule de Fourier pour les nombres premiers de Beurling”

$$(FF)\qquad \int f(t)\ell(t)dt \;=\; \sum_{p\in P}\frac{1}{p}\hat f(\log p)$$

où $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et

$$\hat f(x) \;=\; \int f(t)e^{-itx}dt.$$

On peut étendre (FF) à la classe des fonctions f qui sont localement dans L^2, avec $\sum_{x\in\mathbb{Z}}\left(\int_x^{x+1}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}<\infty$, mais nous n'en aurons pas besoin. Nous utiliserons parfois (FF) sous la forme

$$(FF1)\qquad \int f(t)\Re\mathrm{e}\,\ell(t)dt \;=\; \sum_{p\in P}\frac{1}{2p}\left(\hat f(\log p)+\hat f(-\log p)\right).$$

Voici les théorèmes établis en [6] à l'aide de (FF).

T1. Si $\zeta(1+it)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et si $it\,\zeta(1+it)$ est absolument continue sur $\mathbb{R}$, on a (TNP).

T2. La somme des ordres des zéros de $\zeta(1+it)$ ne dépasse pas 1.

(On dit que $F(t)$ a un zéro d'ordre α en t_0 si $F(t_0) = 0$ et

$$\alpha = \liminf_{t \to t_0} \frac{\log \mid F(t) \mid}{\log \mid t - t_0 \mid}.)$$

Comme les zéros de $\zeta(1+it)$ vont par paires $(\theta, -\theta)$, l'ordre maximum d'un zéro est $\frac{1}{2}$. En corollaire de T1 et T2, on a donc :

T3. Si $\zeta(1+it)$ appartient à une classe de Hölder $\Lambda_{\frac{1}{2}+}$ localement sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et que $it\,\zeta(1+it)$ est absolument continue sur $\mathbb{R}$, on a (TNP). (Ici comme plus tard, $\frac{1}{2}+$ signifie $\frac{1}{2}+\delta$ pour un $\delta > 0$).

T4. La condition

$$\int_1^\infty (\epsilon(x) \log x)^{2-} \frac{dx}{x} < \infty$$

entraîne (TNP) ($2-$ signifie $2-\delta$ pour un $\delta > 0$).

La conjecture de Bateman et Diamond était restée ouverte.

Désormais nous faisons l'hypothèse (H). Il nous suffit de montrer, d'après T1, que $\zeta(1+it)$ ne s'annule pas. Supposons le contraire, soit $\zeta(1+i\theta) = 0$. Une normalisation permet de se borner au cas $\theta = 1$. L'hypothèse (H) signifie que l'intégrale qui figure dans l'expression de $\zeta(1+it)$ appartient à la classe H^1 de Sobolev, c'est-à-dire que sa dérivée au sens des distributions appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Ecrivons

$$\zeta(1+it) = \frac{D}{it} + (1+it)H^1$$

en convenant que H^1 représente ici un élément de la classe H^1. Comme $\frac{Z}{\zeta}(1+it)$ est un multiplicateur de H^1 et que $\frac{1}{it}\left(\frac{Z}{\zeta}(1+it) - \frac{Z}{\zeta}(1)\right)$ appartient à H^1, on peut écrire, avec la même convention que ci-dessus,

$$Z(1+it) = \frac{C}{it} + (1+it)H^1 \qquad (1)$$

avec $C > 0$.

Rappelons deux propriétés, faciles à établir, des fonctions $F \in H^1$. D'abord

$$F(t+h) - F(t) = o(\mid h \mid^{1/2}) \qquad (h \to 0)$$

uniformément sur $\mathbb{R}$, ce que nous écrirons $F \in \lambda_{1/2}$. Ensuite, $\mid F \mid \in H^1$. Pour la commodité du lecteur, nous donnons en appendice un exposé rapide des propriétés de H^1.

Démontrons maintenant, sous la double hypothèse que (H) a lieu et que $Z(1+i) = Z(1-i) = 0$, trois propositions auxiliaires, qui vont nous permettre d'aboutir à une contradiction.

P0. On a, pour $\mid t \mid$ assez petit (dépendant de $\frac{1}{2}+$)

$$|Z(1+i+it)| \geq \mid t \mid^{\frac{1}{2}+} .$$

Preuve. On sait que

$$\Re\mathrm{e}\, \ell(t) \;=\; \log \frac{1}{\mid t \mid} + O(1) \qquad (t \to 0)$$

et, comme $Z(1+it)$ appartient localement à $\lambda_{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} \Re\mathrm{e}\, \ell(1+t) \;&\leq\; \frac{1}{2} \log \mid t \mid + \log\, o(1) \qquad (t \to 0) \\ \Re\mathrm{e}\, \ell(-1+t) \;&\leq\; \frac{1}{2} \log \mid t \mid + \log\, o(1). \end{aligned}$$

Supposons, en visant la contradiction, que pour des θ arbitrairement voisins de 0 on ait

$$|Z(1+i+i\theta)| \;< \mid \theta \mid^{\frac{1}{2}+} .$$

Comme $Z(1+it)$ appartient localement à $\lambda_{\frac{1}{2}}$ il s'ensuit que

$$|Z(1+i+it)| \;<\; 2 \mid \theta \mid^{\frac{1}{2}+}$$

pour $\mid t - \theta \mid \leq \mid \theta \mid^{1+}$ et $\mid \theta \mid$ assez petit (ici 1^+ signifie $2(\frac{1}{2}+)$). Posons $\epsilon = \mid \theta \mid^{1+}$, et

$$m \;=\; \Delta_\epsilon \, * \, \left(\delta_0 + \frac{1}{2}(\delta_\theta + \delta_{-\theta})\right) \, * \, \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{\mid n \mid}{N}\right) \delta_n$$

où $\Delta_\epsilon(t) \;=\; \frac{1}{\epsilon}\Delta(\frac{t}{\epsilon})$ et $\Delta(t) = (1 - \mid t \mid)^+$ (fonction triangle). Ainsi $\hat{m} \geq 0$, et $(FF1)$ donne

$$I \;=\; \int m(t) \Re\mathrm{e}\, \ell(t) dt \;\geq\; 0.$$

Cette intégrale se décompose en dix morceaux : neuf intégrales de la forme

$$I_a = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} m(t)\Re\mathrm{e}\,\ell(t)dt$$

avec $a = 0, \pm1, \pm\theta, \pm(1+\theta)$ et $\pm(1-\theta)$ (nous choisissons θ assez petit pour que les intervalles $(a-\epsilon,\, a+\epsilon)$ soient disjoints), et le reste, qui est borné quand, N étant fixé, $\theta \to 0$. Les estimations qui précèdent donnent

$$I_0 = \int \Delta_\epsilon(t)\log\frac{1}{|\,t\,|}dt + O(1) \qquad (\theta \to 0)$$

$$I_1 + I_{-1} \le \left(1-\frac{1}{N}\right)\int \Delta_\epsilon(t)\log|\,t\,|\,dt + \log o(1)$$

$$I_\theta + I_{-\theta} = \log\frac{1}{|\,\theta\,|} + O(1)$$

$$I_{1+\theta} + I_{-1-\theta} \le \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{2}+\right)\log|\,\theta\,| + O(1)$$

$$I_{1-\theta} + I_{-1+\theta} \le \left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{1}{2}\log|\,\theta\,| + O(1).$$

Pour N assez grand (dépendant de $\frac{1}{2}+$) et pour $|\,\theta\,|$ assez petit (dépendant de N) on obtient $I < 0$. La contradiction établit P0.

P1. On a

$$P(e^y) = O\left(\frac{1}{y}e^y\right) \qquad (y \to \infty).$$

Preuve. On opère comme dans la preuve de T1 [6]. Mais au lieu d'écrire que, pour tout $y > 0$ et toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell(t)\varphi(t)}{1+it}e^{ity}dt = F(y) = \int_{-\infty}^{y} \hat\varphi(-x)e^{x-y}P(e^{y-x})dx,$$

nous écrirons ici, en application de $(FF1)$,

$$4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\Re\mathrm{e}\,\ell(t)}{1+it}\cos\frac{\pi}{2}t\,e^{ity}dt = \sum_{\pm\pm} F(\pm y \pm \frac{\pi}{2}) \qquad (y > \frac{\pi}{2}).$$

Le premier membre s'estime comme dans [6], à condition de vérifier, ce que nous allons faire dans un instant, que la fonction $\Re e\, \ell(t) \cos \frac{\pi}{2} t$ est absolument continue au voisinage de 1. En fixant φ et en faisant croître y à l'infini, c'est

$$\frac{4\pi}{y}\varphi(0) \, + \, o\left(\frac{1}{y}\right).$$

Il en résulte que, pour tout $\delta > 0$, on a, en posant $Q(y) = e^y P(e^y)$,

$$(1-\delta) \sum_{\pm\pm} Q\left(-\delta - (\pm y \pm \frac{\pi}{2})\right) \, \leq \, \frac{2}{y} \, + \, o\left(\frac{1}{y}\right),$$

d'où P1.

Reste à vérifier que $\Re e\, \ell(1+t) \cos \frac{\pi}{2}(1+t)$, ou aussi bien $t\, \Re e\, \ell(1+t)$, est absolument continue au voisinage de 0. Posons $\psi(t) = \Re e\, \ell(1+t)$ et remarquons que $e^{\psi(t)}$ est le module de $Z(1+i+it)$, qui appartient à H^1_{loc} au voisinage de 0. On sait qu'au voisinage de 0 on a $\psi \in L^1_{\text{loc}}$, $e^\psi \in H^1_{\text{loc}}$ c'est-à-dire $\psi' e^\psi \in L^2_{\text{loc}}$, et aussi, par P0, que $e^\psi \geq \mid t \mid^{\frac{1}{2}+}$ pour $\mid t \mid$ assez petit. Cette dernière inégalité entraîne $te^{-\psi} \in L^2_{\text{loc}}$, ce qui, joint à $\psi' e^\psi \in L^2_{\text{loc}}$, entraîne $t\psi' \in L^1_{\text{loc}}$, ce qui, joint à $\psi \in L^1_{\text{loc}}$, entraîne $(t\psi)' \in L^1_{\text{loc}}$ au voisinage de 0, ce qu'on avait à vérifier.

P2. Quand t est assez grand, on a

$$\mid Z(1+it) \mid \geq \, t^{-9}.$$

Preuve. En application de (FF) nous allons écrire de nouveau

$$I \, = \int m(t) \Re e\, \ell(t) dt \, \geq \, 0,$$

avec ici

$$m \, = \, \Delta_\epsilon * \left(\delta_0 + \frac{2}{3}(\delta_1 + \delta_{-1}) + \frac{1}{3}(\delta_2 + \delta_{-2})\right) * \\ * \left(\delta_0 + \frac{2}{3}(\delta_\theta + \delta_{-\theta}) + \frac{1}{3}(\delta_{2\theta} + \delta_{-2\theta})\right),$$

où ϵ est petit (à choisir) et θ grand. D'après (1) nous avons

$$Z(1+it) \, = \, O(t) \qquad (t \to \infty). \tag{2}$$

L'intégrale I se décompose maintenant en 25 intégrales I_a, à savoir I_0, I_1, I_{-1}, I_2, I_{-2}, I_θ, $I_{-\theta}$ et toutes les autres. On a

$$\begin{aligned} I_0 + I_1 + I_{-1} &\leq \frac{1}{3}\int \Delta_\epsilon(t)\log\frac{1}{\mid t\mid}dt + \log o(1) \qquad (\epsilon \to 0) \\ I_2 + I_{-2} &= O(1) \end{aligned}$$

et, si l'on suppose $\mid Z(1+it) \mid \leq 2\theta^{-a}$ sur l'intervalle $(\theta-\epsilon, \theta+\epsilon)$,

$$I_\theta + I_{-\theta} \leq -\frac{4}{3}(a \log\theta - \log 2).$$

Compte-tenu de (2), la somme de toutes les autres intégrales est majorée par

$$A \log\theta + O(1) \qquad (\theta\to\infty,\ \epsilon\to 0),$$

A étant la somme des coefficients, soit

$$A = \left(1+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 - \left(1+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right) - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}.$$

Supposons maintenant $\mid Z(1+i\theta) \mid < \theta^{-a}$ pour une suite de valeurs $\theta\to\infty$. Choisissons $\epsilon = \theta^{-2(a+1)}$, de sorte que $\mid Z(1+it) \mid \leq 2\theta^{-a}$ sur l'intervalle $(\theta-\epsilon, \theta+\epsilon)$ quand θ est assez grand, et observons que

$$\int \Delta_\epsilon(t)\log\frac{1}{\mid t\mid}dt = \log\frac{1}{\epsilon} + O(1) \qquad (\epsilon\to 0).$$

En ajoutant, on obtient

$$I \leq \left(\frac{2}{3}(a+1) - \frac{4}{3}a + \frac{14}{3}\right)\log\theta + O(1) \qquad (\theta\to\infty))$$

donc $I < 0$ si $a > 8$ et si θ est assez grand. En choisissant $a = 9$ la contradiction établit P2.

P0 est intervenue dans la preuve de P1. Dans la suite, nous n'utiliserons que P1 et P2.

Posons maintenant

$$\ell_0(t) = \int_0^\infty (1-\cos u)e^{-iut}\frac{du}{u} \left(= \log\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)$$

(c'est l'exemple de Beurling) et

$$\ell(t) \;=\; \ell_0(t) + L(t).$$

Ecrivons, par commodité,

$$L(t) \;=\; \int_0^\infty e^{-iut} h(u) \frac{du}{u}$$

avec

$$1 - \cos\, u + h(u) \;\geq\; 0.$$

Il faut entendre par là que $h(u)du$ est une mesure, telle que la mesure $(1 - \cos\, u)du + h(u)du$ est positive. La commodité consistera, dans les écritures, à traiter h comme une fonction. Décomposons L sous la forme

$$L \;=\; L_1 \;+\; L_2,$$

où $L_1 = L\varphi$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, paire, et telle que $\varphi(t) = 1$ quand $-2 \leq t \leq 2$. Posons enfin

$$h_1(u) \;=\; u \int_0^\infty \frac{h(v)}{v} \hat{\varphi}(u - v) dv, \quad h_2 = h - h_1,$$

de façon que

$$L_j(t) \;=\; \int_{-\infty}^\infty e^{-iut} h_j(u) \frac{du}{u} \qquad (j = 1, 2).$$

Comme L_1 est à support compact, h_1 est continue, restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction entière de type exponentiel, et de plus réelle parce que φ est paire.

Interprétons d'abord P1 à l'aide de h. P1 s'écrit

$$\int_0^y (1 - \cos u + h(u)) e^u \frac{du}{u} \;=\; O\left(\frac{1}{y} e^y\right) \qquad (y \to \infty)$$

donc

$$\int_0^y h(u) \frac{du}{u} \;=\; O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Il en résulte que h_1 est bornée et, comme c'est une fonction entière de type exponentiel, que h_1' est bornée. Il en résulte également que $h_1(u)$ est à décroissance rapide quand $u \to -\infty$.

Comme L_1 est à support compact et continue sauf aux points 1 et -1, où l'on a

$$\lim_{t\to 0}\,(L_1(1+t)\ +\ L_1(-1-t))\ =\ -\infty,$$

la formule de Poisson s'applique sous la forme

$$\lim_{\rho\uparrow 1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\rho^{|n|}\frac{h_1(2\pi n)}{n}\ =\ \sum_{n\in\mathbb{Z}}L_1(n)\ =\ -\infty$$

($\frac{h_1(2\pi 0)}{0}$ devant s'interpréter comme $2\pi h_1'(0)$). Comme

$$\sum_{n\leq 0}\left|\frac{h_1(2\pi n)}{n}\right|\ <\ \infty,$$

on a

$$\lim_{\rho\uparrow 1}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\frac{h_1(2\pi n)}{n}\ =\ -\infty.$$

Considérons les ensembles d'entiers

$$\Lambda_j\ =\ \left\{n\geq 1\ ;\ h_1(2\pi n)\ \in\,]-2^{-j},-2^{-(j+1)}]\right\}.$$

La dernière formule s'écrit aussi

$$\sum{}'\,\frac{h_1(2\pi n)}{n}\ =\ -\infty,$$

$\sum'$ étant la somme étendue aux entiers n tels que $h_1(2\pi n)<0$, soit

$$\sum_j\left(2^{-j}\sum_{n\in\Lambda_j}\frac{1}{n}\right)\ =\ \infty.$$

On a donc

$$\sum_j 2^{-j}\log|\Lambda_j| = \infty, \tag{3}$$

$|\Lambda_j|$ désignant le cardinal de Λ_j.

Désignons par $k(u)$ la plus petite fonction ≥ 0, de classe C^1 par morceaux, telle que $k(2\pi n)=2^{-j-1}$ pour $n\in\Lambda_j$, $j\in\mathbb{N}$, et que

$$|k'(u)|\leq\ M\ =\ \sup_t|h_1'(u)|+2.$$

k est donc une somme de fonctions triangles, de pentes $\pm M$, portées par les intervalles $I_n = \left[2\pi n - \frac{1}{M}2^{-j-1},\ 2\pi n + \frac{1}{M}2^{-j-1}\right]$ $(n \in \Lambda_j,\ j \in \mathbb{N})$. Observons que, lorsque u appartient à la réunion des I_n,

$$1 - \cos\, u + h_1(u) \ \leq\ -k(u).$$

Or

$$1 - \cos\, u + h_1(u) + h_2(u) \ \geq\ 0.$$

Donc $h_2(u) \geq k(u)$ quand $u \in \cup I_n$.

Soit maintenant Δ une fonction telle que

$$\Delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \Delta \geq 0, \quad \int \Delta = 1, \quad \text{support } \Delta \subset [-1,1]$$

et

$$\Delta_\delta(u) \ =\ \frac{1}{\delta}\Delta(\frac{u}{\delta}) \qquad (\delta > 0).$$

Pour tout intervalle $I = (a,b)$ de longueur supérieure à 2δ, désignons par $I(\delta)$ l'intervalle $(a-\delta, b+\delta)$. Ainsi

$$h_2 * \Delta_\delta(u) \ \geq\ k * \Delta_\delta(u)$$

quand $u \in I_n(\delta)$ et $2\delta <\mid I_n \mid$. Choisissons $\delta = \frac{1}{M}2^{-j-3}$ et $n \in \Lambda_j$. Alors

$$\int_{I_n(\delta)} \mid k * \Delta_\delta \mid^2 \geq \int \mid 2^{-j-2}\mathbb{1}_{I_n(2\delta)} * \Delta_\delta \mid^2 \geq \frac{1}{M}2^{-3j-6}.$$

Donc, pour δ ainsi choisi,

$$\int_{\mathbb{R}} \mid h_2 * \Delta_\delta \mid^2 \geq \frac{1}{M}2^{-3j-6} \mid \Lambda_j \mid .$$

Or, par l'égalité de Parseval,

$$\int_{\mathbb{R}} |h_2 * \Delta_\delta|^2 \ =\ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|L_2'\hat{\Delta}_\delta\right|^2.$$

Admettons provisoirement que

$$\int_{\mathbb{R}} \left|t^{-A}L_2'(t)\right|^2 dt \ <\ \infty \tag{4}$$

pour un A assez grand. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \left| L_2' \hat{\Delta}_\delta \right|^2 = O\left(\delta^{-A}\right) \qquad (\delta \to 0),$$

donc

$$2^{-3j} \mid \Lambda_j \mid = O(2^{jA}) \qquad (j \to \infty)$$

donc $\log \mid \Lambda_j \mid = O(j)$ et cela contredit (3).

Pour achever la preuve du théorème il suffit donc de prouver (4). Comme $\ell_0' \in L^2(0,\infty)$, il suffit de vérifier que

$$\int_2^\infty \mid t^{-A}\ell'(t) \mid^2 dt < \infty.$$

Or, d'après (1), $t^{-1}e^\ell$ appartient à H^1 sur $(2,\infty)$, c'est-à-dire $-t^{-2}e^\ell + \ell' t^{-1}e^\ell \in L^2(2,\infty)$, donc

$$\ell' t^{-1} e^\ell \in L^2(0,\infty).$$

C'est ici qu'intervient P2, qui dit que $\mid e^\ell \mid \geq \mid t \mid^9$ pour t assez grand. Donc $\ell' t^{-10} \in L^2(2,\infty)$, (4) a lieu avec $A = 10$, et le théorème est démontré.

Concluons par quelques commentaires.

Les propositions P0, P1 et P2 sont un peu décevantes, parce qu'elles expriment des propriétés d'une fonction $Z(1+it)$ et d'une fonction $P(e^y)$ qui n'existent pas. Cependant on peut en sauver quelque chose.

Au lieu de (H), supposons seulement (A). Alors, comme on l'a vu, $it\,\zeta(1+it)$ et $it\,Z(1+it)$ appartiennent à A_{loc}. Ajoutons l'hypothèse que $it\,\zeta(1+it)$, donc aussi $it\,Z(1+it)$, appartient à H^1_{loc}. Alors les propositions P0 et P1 sont valables.

La question se pose, naturellement, de savoir si elles s'appliquent à des fonctions qui existent. La réponse est positive, et la construction de telles fonctions est indiquée dans la dernière partie de [6]. La construction est délicate, parce que l'on exige à la fois (A) et $it\,Z(1+it) \in H^1_{\text{loc}}$. La construction devient un peu plus facile si l'on renonce à la condition (A).

La condition (A) paraît naturelle, et je m'y suis tenu dans [6] ainsi que dans le présent article, où je n'ai pas eu à m'en préoccuper puisqu'elle résulte de (H). Cependant la théorie peut devenir plus simple et plus complète si on oublie $\epsilon(x)$ pour s'attacher exclusivement aux propriétés de la fonction $Z(1+it)$ qui entraînent (TNP). J'y reviendrai peut-être plus tard. Voici quelques indications.

On suppose que la fonction

$$(s-1)Z(s) \;=\; (s-1)\exp\int x^{-s}dP(x)$$

est analytique dans le demi-plan $\sigma > 1$ et se prolonge par continuité au demi-plan fermé $\sigma \geq 1$. Cela suffit à définir $\ell(t)$ et à établir (FF). Les énoncés T1 et T2, qui s'appliquent à $Z(1+it)$ comme à $\zeta(1+it)$, restent valables. Dans la suite, on suppose, au lieu de (1),

$$Z(1+it) \;=\; \frac{C}{it} \,+\, H^1_{\mathrm{loc}}.$$

Les propositions P0 et P1 restent valables, avec des preuves inchangées. Pour obtenir P2, nous avons utilisé (2), qui est une conséquence de (1), et nous avons encore utilisé (1), tout à la fin, en écrivant que $t^{-1}\ell$ appartient à H^1 sur $(2,\infty)$. C'est ce qui nous a permis d'obtenir (4) et de conclure. Mais, pour avoir (4) avec un certain A, il nous suffit que pour un $B>0$ convenable on ait

$$t^{-B}\ell \,\in\, H^1(2,\infty). \tag{5}$$

Cela entraîne une version affaiblie de P2, où 9 est remplacé par un autre exposant, et permet de conclure comme dans le cas $B=1$.

Ainsi, dans le cadre que nous venons de donner, (5) implique (TNP).

La suite de l'étude consisterait à déterminer, autant que faire se peut, les fonctions $\alpha(t)$ telles que $\alpha\ell \in H^1(2,\infty)$ entraîne (TNP). Le lecteur attentif peut s'y exercer.

La formule (FF) a été présentée pour la première fois dans un cours donné à l'Université de Crète à Héraclion en avril 1995, dans le cadre de la "chaire Pichorides", puis exposée en juillet 1995 à Anogia (Crète) lors du colloque "Harmonic analysis from the Pichorides viewpoint". Une rédaction en a été publiée, avec divers articles issus de ce colloque, par les soins de Myriam Déchamps [5]. La forme primitive de (FF), appliquée aux nombres premiers ordinaires, figure dans le numéro de la *Gazette des mathématiciens* consacré au centenaire du théorème des nombres premiers [4]. Le colloque organisé à Bordeaux pour célébrer ce centenaire m'a permis de faire le point en janvier 1996. Enfin, en avril 1996, le colloque de Montréal à la mémoire de Carl Herz a été l'occasion pour moi de m'essayer à contredire la conjecture de Bateman et Diamond ; j'ai mentionné plus haut les exemples que je suis parvenu à construire [6]. Bien évidemment, c'est l'analyse de l'échec de la construction de contre-exemples qui m'a conduit, laborieusement, au présent article.

Je remercie M. Balazard pour toute une série de très utiles suggestions.

Appendice sur $H^1 = H^1(\mathbb{R})$

Définitions équivalentes : 1) $F \in H^1$ signifie que F est continue sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée au sens des distributions appartient à $L^2(\mathbb{R})$; 2) $F \in H^1$ signifie que F est transformée de Fourier d'une fonction appartenant à $L^2(\mathbb{R}, (1+u^2)du)$.

La seconde définition montre que H^1 est contenu dans $A(\mathbb{R})$; en particulier, les fonctions appartenant à H^1 sont continues et bornées. Jointe à ce dernier fait, la première définition montre que H^1 est une algèbre. On utilise encore la première définition pour les propriétés qui suivent, concernant une fonction $F \in H^1$:

i) $|F(x+h) - F(x)| = \left|\int_x^{x+h} F'(y)dy\right| \leq |\, h\,|^{1/2} \left|\int_x^{x+h} |\, F'(y)\,|^2 \, dy\right|^{1/2}$

donc

$$F(x+h) - F(x) = o\left(|\, h\,|^{1/2}\right) \qquad (h \to 0)$$

uniformément sur $\mathbb{R}$.

ii) Soit $A = |\, F\,|$ et $F = Ae^{i\varphi}$. Alors $F' = (A' + iA\varphi')e^{i\varphi}$, donc $|\, A'\,| \leq |\, F'\,|$, donc $A \in H^1$.

Bibliographie

[1] BATEMAN P. T. and DIAMOND H. G., *Asymptotic distribution of Beurling's generalized prime numbers*, Studies in number theory, M.A.A. Studies **6**, (W. J. Leveque, ed.), 1969.

[2] BEURLING A., *Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés*, Acta Math. **68** (1937), 255–291.

[3] DIAMOND H. G., *The prime number theorem for Beurling's generalized numbers*, J. Number Theory **1** (1969), 200–207.

[4] KAHANE J.-P., *Une formule de Fourier sur les nombres premiers*, Gazette des Mathématiciens **67** (janvier 1996), 3–9.

[5] KAHANE J.-P., *Une formule de Fourier pour les nombres premiers, application aux nombres premiers généralisés de Beurling*, Publ. Math. Orsay **96.1** (1996), "Harmonic analysis from the Pichorides viewpoint " (Myriam Déchamps, ed.).

[6] KAHANE J.-P., *A Fourier formula for prime numbers*, Canadian Mathematical Society Conference Proceedings **21** (1997), 89–102.

Jean-Pierre KAHANE
CNRS URA 757
Université de Paris-Sud
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex
e-mail : jean-pierre.kahane@math.u-psud.fr