Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **9** *(1997), 319–335*

Séries formelles et produit de Hadamard

par ABDELKADER NECER

RÉSUMÉ. Nous nous intéressons ici essentiellement à l'algèbre de Hadamard des séries formelles. Si des résultats importants ont été obtenus dans le cas d'une variable, il n'en est pas de même dans le cas de plusieurs variables. En effet, beaucoup de problèmes posés restent encore sans réponse. C'est le cas par exemple du problème du quotient de Hadamard, ou celui de la caractérisation des éléments de Hadamard inversibles, ou les diviseurs de zéro, ou encore le problème des multiplicateurs de certains sous-ensembles de l'algèbre des séries formelles.

Dans une première partie de ce travail, nous rappelons les propriétés arithmétiques ou algébriques des séries formelles en une ou plusieurs variables sur un corps commutatif. Nous insistons sur les différents résultats liés aux propriétés de clôture pour le produit de Hadamard des sous-ensembles des séries reconnaissables , rationnelles, algébriques ou D-finies.

Dans la seconde partie, nous présentons quelques résultats nouveaux liés au problème du quotient de Hadamard.

ABSTRACT. We are interested here in the properties of the Hadamard algebra of power series in one or many variables.

Many problems like the Hadamard quotient or the determination of some particular elements (units, zero divisors, ...) are still open in several variables.

After a survey of some facts and examples as regards to the closure properties of the sets of recognized, rational, algebraic or D-finite series, we shall recall partial answers to the problem of Hadamard quotient and a characterization of the units of the algebra of recognized series.

1. Introduction

Dans ce qui suit on s'intéresse à des sous-ensembles particuliers de l'algèbre des séries formelles sur un corps commutatif, munie de l'addition usuelle

AMS Subject Classification 13032, 13J05, 11B99.
Manuscrit reçu le 24 janvier 1997.

des séries et de l'un des produits, de Cauchy (dit de convolution) ou celui de Hadamard (the student ou children product).

Une des parties les plus intéressantes de l'algèbre des séries formelles est l'ensemble des séries D-finies c'est-à-dire les séries qui sont solutions d'un système particulier d'équations différentielles linéaires à coefficients des fractions rationnelles. On verra que, même dans le cas de plusieurs variables, ces séries forment une algèbre pour les différents produits.

Après un rappel des différentes définitions et de quelques propriétés liées au produit de Cauchy, on traitera du produit de Hadamard. On verra qu'en général les séries rationnelles et les séries algébriques ne forment pas des algèbres. On rappellera par ailleurs quelques propriétés des séries en une variable et les cas où il y a stabilité pour les différents produits.

Dans la dernière partie on énoncera de nouveaux résultats concernant le théorème de van der Poorten, sur la conjecture de Pisot du quotient de Hadamard en plusieurs variables et on caractérisera les éléments Hadamard-inversibles d'une sous-algèbre de l'algèbre des séries formelles, contenue dans l'ensemble des séries rationnelles.

2. Définitions et notations

2.1. Soit $s \in \mathbb{N}^*$, K un corps commutatif et $A = K[[x_1, \dots, x_s]]$ l'algèbre des séries formelles sur K en les variables commutatives $x_1, x_2, \dots, x_s$. Le corps des fractions de A est désigné par $K((x))$.

Un élément $(n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{N}^s$ est noté simplement n ; le monôme $x_1^{n_1} \times \dots \times x_s^{n_s}$ est noté x^n ; un élément f de A est par conséquent noté $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^s} a(n)x^n$. Quand $s = 1$, l'indéterminée est notée t pour éviter toute confusion.

L'anneau des polynômes en les variables $x_1, \dots, x_s$ est noté $K[x]$. Son corps des fractions est noté $K(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^s$ et $m \in \mathbb{N}^s$. On pose

$$\begin{aligned} |n| &= n_1 + \dots + n_s, \\ n + m &= (n_1 + m_1, \dots, n_s + m_s), \\ n \cdot m &= (n_1 \cdot m_1, \dots, n_s \cdot m_s). \end{aligned}$$

L'écriture $n < m$ (resp. $n \leq m$) veut dire :

$$\forall i \in [1, s] \qquad n_i < m_i \text{ (resp. } n_i \leq m_i).$$

2.2. Soit
$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^s} a(n)x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^s} b(n)x^n$$
deux éléments de A. Le produit de Cauchy de f et g est la série notée $f \cdot g$ et donnée par
$$(f \cdot g)(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}^s}\sum_{n\in\mathbb{N}^s} a(m)b(n)x^{m+n}.$$
Muni de l'addition usuelle et du produit de Cauchy, A est une algèbre sur K, associative, commutative, unitaire et intègre. En tant qu'anneau A est noethérien et factoriel. L'élément neutre pour le produit est la série
$$\sum_{m\in\mathbb{N}^s} e(m)x^m \text{ où } \qquad e(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Les éléments inversibles de A sont les séries de terme constant non nul.

2.3. Il existe dans A d'autres produits que celui de Cauchy ; en particulier le produit de Hadamard. Soit
$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^s} a(n)x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^s} b(n)x^n$$
deux éléments de A. Le produit de Hadamard de f et g est la série $f \odot g$ donnée par
$$(f \odot g)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^s} a(n)b(n)x^n.$$
Muni de l'addition usuelle et du produit de Hadamard, A est une K-algèbre associative, commutative, unitaire, mais non intègre. L'élément neutre pour $\odot$ est la série
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^s} x^n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{s}(1-x_i)}.$$

2.4. Soit
$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^s} a(n)x^n \in A \quad \text{et} \quad (d_1 \times \ldots \times d_s) \in \mathbb{N}^s.$$
On dit que f est un emboîtement des $d_1 \times \ldots \times d_s$ séries $f_i(x)$ $(0 \le i < d)$ si
$$f(x) = \sum_{0\le i<d} x^i f_i(x^d).$$
Si f est un emboîtement des séries f_i $(0 \le i < d)$, et si on pose
$$f_i(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^s} a_i(n)x^n,$$

alors

$$a(d.n+i) = a_i(n), \quad \forall i,\ (0 \le i < d),\ \forall n \in \mathbb{N}^s.$$

2.5. Soit $f(x) = \sum a(n)x^n \in A$. On pose

$$(I_{12}f)(x) = \sum_{(n_1,n_3,\dots,n_s)} a(n_1,n_1,n_3,\dots,n_s)x_1^{n_1}x_3^{n_3}\cdots x_s^{n_s}.$$

On définit de manière analogue I_{ij} pour tous les i et j distincts dans $\{1,\dots,s\}$. Les I_{ij}, $(i<j$ dans $\{1,\dots,s\})$ sont alors des applications de A dans $K[[x_1,\dots,x_i,\dots,x_i,\dots,x_s]]$. On appelle diagonale toute application I composée d'applications de la forme I_{ij} et diagonale de f la série If. On appelle diagonale principale de f et on note Δf, l'application donnée par :

$$(\Delta f)(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n,n,\dots,n)t^n \in K[[t]].$$

On vérifie alors que

$$\Delta = I_{12}\circ I_{23}\circ\cdots\circ I_{s-1,s}.$$

3. Rappels et propriétés du produit de Cauchy

3.1. Séries rationnelles

Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^s} a(n)x^n$ un élément de A. On dit que f est une série rationnelle si elle représente un élément de $K(x)$; c'est-à-dire s'il existe p et q dans $K[x]$ tels que

$$q(0)\neq 0 \quad \text{et} \quad qf = p. \tag{1}$$

L'ensemble des séries rationnelles est noté $R(K)$. Cet ensemble peut être vu comme le localisé à l'origine de l'anneau des polynômes.

Muni du produit de Cauchy et des opérations usuelles, $R(K)$ est une sous-K-algèbre unitaire de A.

L'étude de $R(K)$ dans le cas d'une variable et plus particulièrement des propriétés des coefficients d'une série rationnelle, qui sont des suites récurrentes linéaires à coefficients constants, fait l'objet d'une littérature abondante. On pourra consulter [MI], [CMP] ou bien [PO1] pour une bibliographie à ce sujet.

3.2. Séries reconnaissables

Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^s} a(n)x^n$ un élément de A. On dit que f est une série reconnaissable s'il existe L, une extension finie de K, $t\in\mathbb{N}^*$, des polynômes $P_1,\dots,P_t$ dans $L[x]$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_t$ des éléments de L^s tels que

$$a(n) = \sum_{i=1}^{t} P_i(n)\alpha_i^n \quad \forall n\in\mathbb{N}^s. \tag{2}$$

L'ensemble des séries reconnaissables est noté $R_0(K)$.

Remarques

1. On peut voir facilement que $R_0(K)$ est une sous-K-algèbre unitaire, pour le produit de Cauchy, de $R(K)$ et que si f est un élément de $R_0(K)$, alors f vérifie (1) avec

$$q(x) = q_1(x_1)\cdots q_s(x_s) \quad \text{où} \quad q_i(x_i) \in K[x_i] \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}\,.$$

2. Dans le cas d'une variable, on a bien entendu $R_0(K) = R(K)$. Ce n'est pas le cas si $s \geq 2$: la série rationnelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} {x_1}^n \cdots {x_s}^n = \frac{1}{1-\prod_{i=1}^{s} x_i}$ n'est pas dans $R_0(K)$.

3. Dans [HA] l'auteur appelle série reconnaissable, dans le cas d'une variable, toute série dont les coefficients forment une suite récurrente linéaire, donc toute série rationnelle. Nous reprenons ce terme pour désigner, dans le cas de plusieurs variables, les éléments d'une sous-classe $(R_0(K))$ de la classe des séries rationnelles.

3.3. Séries semi-simples

Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^s} a(n)x^n$ un élément de A. Si f vérifie l'équation (2) avec tous les P_i $(1 \leq i \leq t)$ constants, on dira que f est une série semi-simple.

L'ensemble des séries semi-simples est noté $S(K)$.

Dans [RE] l'auteur introduit le terme semi-simple pour désigner, dans le cas d'une variable, de telles séries et il démontre que, lorsque K est algébriquement clos et de caractéristique non nulle, toute série rationnelle est emboîtement de séries semi-simples. Dans le cas de plusieurs variables on obtient sans peine la

PROPOSITION 1. *Si K est algébriquement clos et de caractéristique non nulle, alors toute série reconnaissable est emboîtement de séries semi-simples.*

3.4. Séries algébriques

Soit f un élément de A. On dit que f est une série algébrique si, moyennant l'identification de $K(x)$ à un sous-corps de $K((x))$, f est algébrique sur le corps $K(x)$. C'est-à-dire, il existe $d \in \mathbb{N}$ et des polynômes $P_0, \cdots, P_d$ dans $K[x]$, non tous nuls, tels que :

$$P_d f^d + P_{d-1} f^{d-1} + \cdots + P_1 f + P_0 = 0 \tag{3}$$

L'ensemble des séries algébriques est noté $Al(K)$.

3.5. Remarques

a) Soit f un élément de A. La théorie générale des extensions de corps commutatifs montre que f est dans $Al(K)$ si et seulement si $K(x)(f)$ est un $K(x)$-espace vectoriel de dimension finie. Il en résulte que $Al(K)$ est une sous-K-algèbre de A pour le produit de Cauchy. On verra dans la section suivante que ce n'est pas toujours le cas pour le produit de Hadamard.

b) Soit δ une dérivation de A, c'est-à-dire une application de A dans A vérifiant :

$$\begin{aligned} \delta(f+g) &= \delta f + \delta g, \\ \delta(fg) &= (\delta f)g + f(\delta g). \end{aligned}$$

La partie $Al(K)$ est alors stable par δ. Pour le voir, il suffit d'appliquer δ à la relation minimale (3) vérifiée par f et de remarquer que δf est dans $K(x)(f)$.
Remarquons que, si on applique δ à la relation (1), on obtient la stabilité de $R(K)$ par δ.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, on pose $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ et on considère la K-algèbre

$$W = K < x_1, \ldots, x_s\,;\, D_1, \ldots, D_s > .$$

Elle est associative unitaire et non commutative et opère de manière naturelle sur A.
Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{N}^s$. On pose

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_s^{\alpha_s}, \;\; \forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{N}^s.$$

Pour un élément f de A, soit

$$W_f = \{D^\alpha f; \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{N}^s\}.$$

3.6. Séries D-finies

On dit qu'une série f est D-finie (differentiably finite) si le $K(x)$-espace vectoriel de A engendré par W_f est de dimension finie ($\dim_{K(x)} < W_f >$ finie).

L'ensemble des séries D-finies est noté $\mathcal{D}(K)$.

Dans un article de 1980, R. P. Stanley étudie les pr0priétés des séries D-finies dans le cas d'une variable et démontre en particulier la

Proposition 2. *([ST]) Pour $s = 1$, K de caractéristique nulle et $f \in K[[t]]$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est D-finie,*
(2) *les coefficients de f forment une suite P-récursive.*

Rappelons qu'une suite $a = (a(n))_{n\geq 0}$ d'éléments de K est dite P-récursive (ou encore que c'est une suite récurrente linéaire à coefficients polynomiaux) si a vérifie une relation de la forme :

$$P_0(n)a(n+h) = P_1(n)a(n+h-1) + \ldots + P_h(n)a(n) \qquad \forall n \geq n_0,$$

où

$$h \in \mathbb{N},\ n_0 \in \mathbb{N},\ (P_0, \ldots, P_h) \in K[t]^{h+1}.$$

Le plus petit h pour lequel une telle relation existe est appelé ordre de la suite a.

3.7. Remarques

1. La généralisation de la notion de P-récursivité au cas de plusieurs variables n'est pas évidente. Il existe par exemple des multi-suites qui vérifient des relations de récurrence à coefficients polynomiaux mais les séries qui leur sont associées ne sont pas D-finies. Voir l'article de Lipshitz [LI2] pour une bonne définition de la P-récursivité et d'autres propriétés des séries D-finies. Dans [ZE] les séries D-finies sont appelées séries P-finies et sont étudiées de manière plus algébrique dans le cadre des systèmes holonomes.

2. La formule de dérivation de Leibnitz permet de voir que $\mathcal{D}(K)$ est une K-algèbre pour le produit de Cauchy. En effet, soit f et g dans $\mathcal{D}(K)$; on a

$$\forall i \in [1, s],\ \ D_i(fg) = fD_ig + gD_if$$

donc $D^\alpha(fg)$ est dans le $K(x)$-espace vectoriel E de A engendré par

$$\{D^\alpha(f) \times D^\beta(g)\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}^s,\ \beta \in \mathbb{N}^s\}.$$

Comme les sous-espaces engendrés par W_f et W_g sont de dimension finie, il en va de même pour E.

4. On a les inclusions :

$$S(K) \subset R_0(K) \subset R(K) \subset Al(K) \subset \mathcal{D}(K).$$

4. Produit de Hadamard, propriétés de clôture

4.1. Produit de Hadamard et diagonales

Soient $f(x) = \sum a(n)x^n$ et $g(x) = \sum b(n)x^n$ deux éléments de A. Introduisons s nouvelles variables, notées $x_{s+1}, \ldots, x_{2s}$, on a alors

$$f(x_1, \ldots, x_s)g(x_{s+1}, \ldots, x_{2s}) = \sum_{n,m} a(n)b(m)x_1^{n_1} \cdots x_s^{n_s} x_{s+1}^{m_1} \cdots, x_{2s}^{m_s}$$

et donc

$$(f \odot g)(x_1, \ldots, x_s) = I_{1,s+1} \circ I_{2,s+2} \circ \cdots \circ I_{s,2s}(f \cdot g).$$

Autrement dit le produit de Hadamard de deux séries s'obtient comme la diagonale du produit de Cauchy de deux séries.

Réciproquement, soit $f(x) = \sum a(n)x^n$ dans A. On a

$$(I_{1,2}f)(x) = f \odot \left(\frac{1}{1 - x_1 x_2} \prod_{j=3}^{s} \frac{1}{1 - x_j} \right).$$

De la même façon on obtient $I_{i,j}f$ comme produit de Hadamard de f par une série rationnelle. Soit P un sous-ensemble de A contenant $R(K)$. Ces remarques permettent de prouver l'équivalence des assertions suivantes :

1. P est fermée pour le produit de Hadamard.
2. P est fermée pour les diagonales.

Lipshitz montre, dans [LI1], en utilisant entre autres cette remarque que si K est de caractéristique nulle, alors toute diagonale d'une série D-finie est une série D-finie et obtient donc le

Theorème 1. *Si K est de caractéristique nulle alors $(D(K), \odot)$ est une K-algèbre.*

4.2. Séries rationnelles et algébriques

Contrairement au cas d'une variable l'exemple suivant montre que $R(K)$ n'est pas stable pour le produit de Hadamard.
Soit K de caractéristique différente de 2 et soit $s \geq 2$. La série

$$f(x_1, x_2) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \binom{m+n}{n} x_1^m x_2^n = \frac{1}{1 - (x_1 + x_2)} \quad \text{est dans} \quad R(K). \tag{4}$$

Mais son carré de Hadamard n'est pas une série rationnelle :

$$f \odot f(x_1, x_2) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \binom{m+n}{n}^2 x_1^m x_2^n = (1 - (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2)^{-\frac{1}{2}} \notin R(K).$$

Remarquons que

$$\Delta(f) = \sum \binom{2n}{n} t^n = (1 - 4t)^{-\frac{1}{2}} \in Al(K) \setminus R(K).$$

On a cependant la

Proposition 3.
Soit K un corps commutatif.

- *a)* $(S(K), \odot)$ *et* $(R_0(K), \odot)$ *sont des K-algèbres.*

- *b) Si K est de caractéristique nulle alors*

$$R(K) \odot R(K) \subset Al(K) \quad \textit{si et seulement si} \quad s = 2.$$

Le b) n'est pas évident. La preuve qui en est donnée dans [WS2] utilise une généralisation du théorème de Puiseux sur les séries algébriques au cas de deux variables.

4.3. Toujours en caractéristique nulle, l'exemple qui suit montre que le produit de Hadamard d'un élément de $R(K)$ par un élément de $Al(K)$ n'est pas toujours dans $Al(K)$. Ce qui montre *a fortiori* que $Al(K)$ n'est pas stable pour le produit de Hadamard.
Soit f comme en (4) et soit

$$g(x_1, x_2) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} x_1^n x_2^n = (1 - x_1 x_2)^{-1}.$$

On a $f \odot f \in Al(K)$, $g \in R(K)$ mais, voir [JU],

$$(g \odot f \odot f)(x_1, x_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n}^2 x_1^n x_2^n \notin Al(K).$$

Remarque.
En caractéristique nulle, même dans le cas d'une variable, $Al(K)$ n'est pas stable pour le produit de Hadamard, comme le montre l'exemple classique suivant :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n} t^n \in Al(K) = (1 - 4t)^{-\frac{1}{2}} \in Al(K).$$

Cependant

$$f \odot f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n}^2 t^n \quad \text{n'est pas algébrique.}$$

Dans [WS3] les auteurs montrent en fait que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n}^e t^n \quad \text{est algébrique si et seulement si} \quad e \in \{0, 1\}.$$

En revanche, en caractéristique non nulle on sait depuis 1967 (voir [FU]) que pour $s = 1$ l'ensemble $Al(K)$ est stable pour le produit de Hadamard. Ce résultat se généralise comme suit

Théorème 2. *([WS1] ou [AL])*
Si K est de caractéristique non nulle alors $(Al(K), \odot)$ est une K-algèbre.

Il en résulte que toute diagonale d'une série algébrique est une série algébrique.

En particulier toute diagonale d'une série rationnelle est algébrique. Inversement, on montre (voir [CH]) que si $s = 2$ et K parfait alors toute série rationnelle est diagonale d'une série algébrique.

4.4. Algèbre des multiplicateurs

Soit $\mathcal{E}$ une partie non vide de A et

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \{f \in A \; ; \; f \odot g \in \mathcal{E} \; \forall g \in \mathcal{E}\}$$

l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{E}$.

On vérifie que $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ est une K-algèbre pour le produit de Hadamard.

Si $s = 1$, il est évident que $\mathcal{M}(R(K)) = R(K)$ et que $R(K) \subset \mathcal{M}(Al(K))$. Si en outre on suppose que $K = \mathbb{C}$, Bézivin montre dans [BE1] que $R(K) = \mathcal{M}(Al(K))$.
La question de savoir si on a toujours l'égalité est encore ouverte.

Maintenant si $s \geq 2$ et K de caractéristique nulle on vérifie facilement que

$$R_0(K) \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}), \quad \text{pour} \quad \mathcal{E} = R(K) \quad \text{ou} \quad \mathcal{E} = Al(K).$$

A-t-on l'égalité ?

5. Problème du quotient de Hadamard

Dans cette section K est de caractéristique nulle et F désignera un sous-anneau de K de type fini sur $\mathbb{Z}$.
Nous nous intéressons à la

5.1. Conjecture

Soit

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^s} a(n) x^n \in R(K) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^s} b(n) x^n \in R(K).$$

On suppose que

$$b(n) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad h(n) = \frac{a(n)}{b(n)} \in F \qquad \forall n \in \mathbb{N}^s.$$

Alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^s} h(n) x^n \in R(K).$$

Dans le cas d'une seule variable, c'est la fameuse conjecture de Pisot (1959). Elle a été résolue en 1988 par van der Poorten. On trouvera dans [PO2] une bibliographie complète sur la question.

Un cas particulier de ce que l'on appelle désormais le théorème de van der Poorten, est le résultat suivant :

Proposition 4. *([CA])*
K et F étant comme ci-dessus ; soit $s = 1$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n)t^n \in R(K) \qquad et \qquad P[t] \in K[t].$$

On suppose que

$$P(n) \neq 0 \qquad et \qquad \frac{a(n)}{P(n)} \in F \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a(n)}{P(n)} t^n \in R(K).$$

5.2. Remarques.
a) Il y a des quotients de Hadamard de séries rationnelles qui ne le sont pas. Un exemple simple est donné par la série

$$\sum_{n\geq 0, m\geq 0} \frac{1}{(n+1)(m+1)} x_1^{n+1} x_2^{m+1}$$

qui n'est pas rationnelle mais est quotient des séries rationnelles

$$\sum_{n\geq 0, m\geq 0} x_1^{n+1} x_2^{m+1} = \frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

et

$$\sum_{n\geq 0, m\geq 0} (n+1)(m+1) x_1^{n+1} x_2^{m+1} = \frac{x_1 x_2}{(1-x_1)^2(1-x_2)^2}.$$

b) L'hypothèse que les coefficients d'une série rationnelle sont dans un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$ provient du fait que ces coefficients vérifient des relations de récurrence linéaires. Remarquons que cette propriété est vérifiée par les coefficients d'une série D-finie.

5.3. Pour plus de clarté et afin d'alléger l'écriture, on prendra $s = 2$ et on notera les variables x et y au lieu de x_1 et x_2. Sur une idée de J.-P. Bézivin, nous obtenons le cas particulier de la conjecture donné par la

Proposition 5. *([NE1])*
Soit $f(x,y)=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a(n,m)x^ny^m\in R(K)$, *et soient* $g(t)=\sum_{n\geq 0}b(n)t^n$ *et* $h(t)=\sum_{n\geq 0}c(n)t^n$ *deux séries rationnelles à une variable et à coefficients dans* K. *On suppose que*

$$b(n)c(m)\neq 0\ ;\ \frac{a(n,m)}{b(n)c(m)}\in F\quad \forall(n,m)\in\mathbb{N}^2.$$

On a alors

$$\sum_{n,m}\frac{a(n,m)}{b(n)c(m)}x^ny^m\in R(K).$$

Il est alors facile d'obtenir le

Corollaire. *Soit* $f(x,y)=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a(n,m)x^ny^m$ *dans* $R(K)$ *et soit* (P,Q) *dans* $K[t]^{*2}$.
On suppose que

$$P(n)Q(m)\neq 0\quad et\quad h(n,m)=\frac{a(n,m)}{P(n)Q(m)}\in F\qquad \forall(n,m)\in\mathbb{N}^2.$$

Alors

$$h(x,y)=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} h(n,m)x^ny^m\in R(K).$$

5.3. La preuve de la proposition utilise le théorème de van der Poorten, la proposition 3 et le fait que si on écrit

$$f(x,y)=\frac{p(x,y)}{q(x,y)}\quad \text{où}\quad (p,q)\in K[x,y]^2,$$

et si on pose

$$f(x,y)=\sum_{n\geq 0}\phi_n(x)y^n\quad \text{où}\quad \phi_n(x)=\sum_{m\geq 0}a(m,n)x^m,$$

alors

$$\phi_n(x)=\frac{p_n(x,0)}{n!q(x,0)^{n+1}}\quad \text{où}\quad p_n(x,y)\in K[x,y].$$

Ensuite en travaillant dans $K(y)[x]$, on montre que les coefficients de f sont dans $B[x,\frac{1}{q(x,0)}]$ où B est un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$ et on applique le théorème de van der Poorten.

5.4. La conjecture est encore vraie si on suppose que la série f est dans $R_0(K)$ et les coefficients de la série g sont des polynômes. De manière plus précise, on a la

Proposition 6. *Soit*

$$f(x,y) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a(n,m)x^n y^m \in K[[x,y]]$$

et soit $P(x,y) \in K[x,y]$.
On suppose qu'il existe $t \in \mathbb{N}^*, (\alpha_1,\ \beta_1), \dots, (\alpha_t, \beta_t)$ *dans* K^2 *et des polynômes* $P_1, \dots, P_t$ *dans* $K[x,y]$ *tels que*

$$1) \quad a(n,m) = \sum_{j=1}^{t} P_j(n,m)\alpha_j^n \beta_j^m \qquad \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,$$

et

$$2) \quad P(n,m) \neq 0 \quad et \quad h(n,m) = \frac{a(n,m)}{P(n,m)} \in F \quad \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2.$$

Alors

$$h(x,y) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} h(n,m)x^n y^m \in R(K).$$

L'idée de la preuve est de montrer que, pour tout j dans $\{1, \dots, t\}$, le polynôme $P(x,y)$ divise $P_j(x,y)$ dans $K(y)[x]$, et d'appliquer la proposition précédente.

6. Éléments Hadamard-inversibles

6.1. Soit $\mathcal{A}$ une des parties $R_0(K), R(K), Al(K)$ ou $\mathcal{D}(K)$ et soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^s} a(n)x^n$ un élément de $\mathcal{A}$.

Définition
On dit que f *est Hadamard-inversible dans* A *si*

$$\forall n \in \mathbb{N}^s, \quad a(n) \neq 0 \quad et \quad \sum \frac{1}{a(n)} x^n \in \mathcal{A}.$$

Si $\mathcal{A} = R_0(K)$ ou bien $\mathcal{A} = \mathcal{D}(K)$ (dans le cas où K est de caractéristique nulle), l'ensemble des éléments Hadamard-inversibles est donc le groupe des éléments inversibles de l'algèbre $(\mathcal{A}, \odot)$.

Dans le cas d'une variable et quelle que soit la caractéristique de K, les séries rationnelles Hadamard-inversibles sont les emboîtements de séries géométriques. On a le

THEORÈME 3. *([RE] ou [BEN])*
Si $s = 1$, les séries rationnelles Hadamard-inversibles sont les séries dont les coefficients sont non nuls et qui s'écrivent

$$f(t) = A(t) + \sum_{j=0}^{d-1} \frac{c_j t^j}{1 - \alpha_j t^d}, \tag{5}$$

où

$$d \in \mathbb{N},\ (c_0, \dots, c_{d-1}) \in L^{*d},\ (\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}) \in L^{*d} \quad et \quad A(t) \in L[t].$$

Ici L désigne une extension de degré fini de K.

On sait également caractériser les éléments Hadamard-inversibles de $Al(K)$, dans le cas de la caractéristique nulle. On trouvera dans [BE3] la preuve du

THEORÈME 4. *Soit K de caractéristique nulle. Pour qu'un élément de $Al(K)$ soit Hadamard-inversible, il faut et il suffit qu'il soit de la forme (5) ci-dessus.*

6.2. Concernant les éléments Hadamard-inversibles de $\mathcal{D}(K)$, B. Benzaghou a conjecturé en 1991, dans le cas $s = 1$ et K de caractéristique nulle, qu'un tel élément est un emboîtement de séries dont les coefficients forment une suite P-récursive d'ordre 1 (voir la section 3 pour la définition).

Cette conjecture a reçu une réponse partielle en 1992 (voir [BB]) : les auteurs montrent que la conjecture est vraie si on suppose au départ que les coefficients forment une suite P-récursive d'ordre 2.
En 1994, M. Singer construit une théorie de Galois aux différences basée sur des algèbres (aux différences) simples et réduites et démontre le

THEORÈME 5. *([SI])*
Soit K de caractéristique nulle et soit $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n)t^n$ dans $\mathcal{D}(K)$. Alors f est Hadamard-inversible si et seulement si $a(n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et il existe $d \in \mathbb{N}$, et $F_0, \dots, F_{d-1}$ des fractions rationnelles, tels que

$$a(d(n+1)+i) = F_i(n)a(dn+i) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{0, 1, \cdots d-1\}.$$

6.2. Dans le cas de plusieurs variables on connaît très peu de résultats. En s'inspirant cependant des méthodes développées dans [RE], on obtient le

THEORÈME 6. *([NE2])*
Les éléments Hadamard-inversibles de $R_0(K)$ sont les emboîtements de séries géométriques.

Signalons que dans [TA], l'auteur arrive au même résultat en utilisant les propriétés de l'algèbre duale de l'algèbre de Hopf des polynômes. Les éléments de $R_0(K)$ sont ici des formes linéaies s'annulant sur un idéal de codimension finie de l'anneau des polynômes. Cette méthode à l'avantage d'être effective. Pour plus de détails concernant les propriétés de l'algèbre de Hopf des multi-suites, voir également [CP].

Remerciements. Je tiens à exprimer ici mes remerciements aux arbitres pour leurs remarques et suggestions, à J.-P. Allouche pour sa disponibilité et son soutien et à M. Bousquet-Mélou pour m'avoir indiqué de nombreuses questions et références.

Bibliographie.

[AL] J.-P. Allouche, *Note sur un article de Sharif et Woodcook*, Sém. Théorie des Nombres, Bordeaux **1** (1989), 163–187.

[BB] B. Benzaghou et J.-P. Bézivin, *Propriétés algébriques de suites différentiellement finies*, Bull. Soc. Math. France **120** (1992), 327–346.

[BEN] B. Benzaghou, *Algèbre de Hadamard*, Bull. Soc. Math. France **98** (1970), 209–252.

[BE1] J.-P. Bézivin, *Sur les propriétés arithmétiques du produit de Hadamard*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Série 5, **11** (1990), 7–19.

[BE2] J.-P. Bézivin, *Indépendance linéaire des valeurs des solutions de certaines équations fonctionnelles II*, Acta Arith. **55** (1990), 233–240.

[BE3] J.-P. Bézivin, *Sur un théorème de Polya*, J. Reine Angew. Math. **364** (1986), 60–68.

[CA] D. J. Cantor, *On arithmetic properties of the Taylor series of rational functions*, Canad. J. Math. **21** (1969), 378–382.

[CH] G. Christol, *Diagonales de fractions rationnelles*, Séminaire de Théorie des Nombres, (1986/87), 65–90. Progr. Math., 75, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1988.

[CMP] L. Cerlienco, M. Mignotte, F. Piras, *Suites récurrentes linéaires : proriétés algébriques et arithmétiques*, Enseign. Math. **33** (1987), 67–108.

[CP] L. Cerlienco et F. Piras, *On the continuous dual of a polynomial bialgebra*, Commun. Algebra **19** (1991), 2707–2727.

[FU] H. Furstenberg, *Algebraic functions over finite fields*, J. Algebra **7** (1967), 271–277.

[HA] G. Hansel, *Une démonstration simple du théorème de Skolem-Mahler-Lech*, Theoret. Comput. Sci. **43** (1986), 91–98.

[JU] R. Jungen, *Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur leur cercle de convergence*, Comment. Math. Helv. **3** (1931), 266–306.

[LI1] L. Lipshitz, *The diagonal of a D-finite power series is D-finite*, J. Algebra **113** (1988), 373–378.

[LI2] L. Lipshitz, *D-finite power series*, J. Algebra **122** (1989), 355–373.

[MI] M. Mignotte, *Propriétés arithmétiques des suites récurrentes linéaires*, Sém. Théorie des Nombres de Bordeaux, (1988/89), fasc. **1**, 30 pages.

[NE1] A. Necer, *Quotient de Hadamard en plusieurs variables*, Prépublication de l'Inst. Math. Alger, (1993).

[NE2] A. Necer, *Éléments inversibles de $R_0(K)$*, Prépublication de l'Inst. Math. Alger, (1992).

[PO1] A. J. van der Poorten, *Some facts that should be better known, especially about rational functions*, in: Number Theory and Applications, R. A. Mollin (ed.), (1989), 497–528.

[PO2] A. J. van der Poorten, *Solution de la conjecture de Pisot sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles*, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I **306** (1988), 97–102.

[RE] C. Reutenauer, *Sur les éléments inversibles de l'algèbre de Hadamard*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 225–232.

[SI] M. Singer, *Notes on difference equations*, Prépublication (1994).

[ST] R. P. Stanley, *Differentiably finite power series*, Eur. J. Comb. **1** (1980), 175–188.

[TA] E. J. Taft, *Hadamard invertibility of linearly recursive sequences in several variables*, Discrete Math. **139** (1995), 393–397.

[WS1] C. F. Woodcock et H. Sharif, *Algebraic functions over a field of positive characteristic and Hadamard product*, J. London Math. Soc. **37** (1988), 395–403.

[WS2] C. F. Woodcock et H. Sharif, *Hadamard product of rational power series*, J. Algebra **128** (1990), 517–527.

[WS3] C. F. Woodcock et H. Sharif, *On the transcendance of certain series*, J. Algebra **121** (1989), 364–369.

[ZE] D. Zeilberger, *A holonomic approach to special functions identities*, J. Comput. Appl. Math. **32** (1990), 321–368.

Abdelkader Necer
Faculté des Sciences
Mathématiques
123, av. A. Thomas
87060 Limoges Cedex