Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux ***9*** *(1997), 351–369*

Propriétés d'invariance des mots sturmiens

par Bruno PARVAIX

Résumé. Un mot *sturmien* est un mot infini, binaire, équilibré et non ultimement périodique. On détermine l'évolution de la *pente* et de l'*intercept* d'un mot sturmien, sous l'action du monoïde de Sturm. À l'aide des matrices de Raney, on énonce une condition que doivent satisfaire les pentes des mots laissés fixes par une *substitution* non triviale. Puis on prouve que cette condition est suffisante pour un ensemble particulier de mots dont l'intercept est une homographie de la pente.

Abstract. An infinite binary word is said to be *Sturmian* if it is *balanced* and not *ultimately periodic*. We compute the *slope* and the *intercept* of $f(x)$ for any Sturmian word x and any Sturmian *morphism* f. Using continued fraction expansions of Raney, we characterize the slopes of the words which are left invariant under a non-trivial substitution. Then we prove that the converse also holds for a particular class of sturmian words the intercept of which is an homography of the slope.

1. Préliminaires

On munit l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ de la loi de concaténation, afin de former le monoïde $\mathcal{A}^*$ des mots binaires finis. On considère une catégorie particulière de mots infinis dits *sturmiens*. Les premières traces de leur existence semblent remonter aux travaux de J. Bernoulli, [1], et aux développements de la dynamique symbolique de Hedlund et Morse, [12]. À un irrationnel α et un réel ρ, on associe les mots de *pente* α et d'*intercept* ρ :

$$s_{\alpha,\rho} = (\lfloor (n+1)\alpha + \rho \rfloor - \lfloor n\alpha + \rho \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N})$$

et

$$s'_{\alpha,\rho} = (\lceil (n+1)\alpha + \rho \rceil - \lceil n\alpha + \rho \rceil - \lfloor \alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}).$$

Ces suites sont sturmiennes, et réciproquement, tout mot sturmien est ainsi représenté.

Une *substitution* est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^*$, prolongée aux mots binaires finis et infinis. On dit qu'une substitution est sturmienne,

---

Manuscrit reçu le 25 juin 1997.

si elle préserve globalement l'ensemble des mots sturmiens. L'article [15] décrit les morphismes sturmiens comme les éléments du monoïde de Sturm St, engendré par le morphisme d'inversion $E \ : \ \begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \end{array}$, le morphisme de Fibonacci $\varphi \ : \ \begin{array}{l} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 0 \end{array}$, et son image miroir $\tilde{\varphi} \ : \ \begin{array}{l} 0 \mapsto 10 \\ 1 \mapsto 0 \end{array}$. On pose $G = \varphi E$, $D = \tilde{\varphi} E$, et ainsi $St = \{E, G, D\}^*$. Un morphisme est dit *faiblement sturmien* s'il préserve un mot sturmien. Cette définition est introduite par J. Berstel et P. Séébold, voir [2]. Ils montrent notamment que tout morphisme faiblement sturmien se décompose sur le monoïde de Sturm.

2. Résultats

2.1. Caractérisation des pentes. Les notions de pentes et d'intercepts sont définies à un entier près, ce qui permet de supposer que α désigne un irrationnel de l'intervalle $]0,1[$, et ρ un réel de $[0,1[$ ou $]0,1]$ selon les cas. On établira l'action des générateurs du monoïde de Sturm sur les mots sturmiens.

Proposition 1. *Si $\rho \in [0,1[$ on a $E(s_{\alpha,\rho}) = s'_{1-\alpha,1-\rho}$, $G(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\rho}{\alpha+1}}$ et $D(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}}$. De plus, si $\rho \in \,]0,1]$ on a $E(s'_{\alpha,\rho}) = s_{1-\alpha,1-\rho}$, $G(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\rho}{\alpha+1}}$ et $D(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}}$.*

En référence à l'article [6], on introduit une classe particulière de nombres algébriques :

Définition 1. *Les nombres de Sturm sont les irrationnels λ pouvant être écrits sous l'une des formes suivantes, où n désigne un entier supérieur à deux :*

- $\lambda = [0, 1+k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1+k_n}\ ]$ *avec* $(k_1,k_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *et* $k_j \in \mathbb{N}^*$ *pour* $2 \le j \le n-1$
- $\lambda = [0, 1, k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1+k_n}\ ]$ *avec* $k_j \in \mathbb{N}^*$ *pour* $2 \le j \le n$.

À l'aide des développements matriciels de G. N. Raney, voir [13], on prouvera un des résultats principaux de cet article :

Théorème 1. *Si une substitution non triviale laisse fixe un mot sturmien de pente α alors α est un nombre de Sturm.*

Remarque. Dans [5], Tom C. Brown démontre par une étude combinatoire qu'il n'existe pas de substitution sur $\{0,1\}$, non triviale, laissant le mot sturmien de pente et d'intercept $[0,5,\overline{1}\ ]$ invariant. Ce résultat apparaît comme un cas particulier du théorème 1.

2.2. Propriétés d'invariance. On vérifiera que la condition énoncée est suffisante pour certaines catégories de mots sturmiens, notamment les suites caractéristiques et les mots de Christoffel.

DÉFINITION 2. *Soient X et Y des substitutions. Soit $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_m)$ une suite d'entiers avec $m \geq 1$. On définit par récurrence $f_\kappa^{(m)}(X, Y)$ à l'aide des relations : $f_\kappa^{(1)}(X, Y) = X^{\kappa_1}$, $f_\kappa^{(2i)}(X, Y) = Y^{\kappa_{2i}} E f_\kappa^{(2i-1)}(X, Y)$ pour $1 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, et $f_\kappa^{(2i+1)}(X, Y) = X^{\kappa_{2i+1}} E f_\kappa^{(2i)}(X, Y)$ pour $1 \leq i \leq \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$. On pose $F_\kappa(X, Y) = f_\kappa^{(m)}(X, Y)$.*

COROLLAIRE 1. *Soit α un nombre de Sturm.*
Si $\alpha = [0, k_n + 1, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\ ]$, avec $(k_1, k_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $n \geq 2$, on pose $\kappa = (k_1, \ldots, k_n)$. Le tableau suivant met en relation des suites sturmiennes avec des morphismes non triviaux les laissant fixes :

Suites	*Morphismes de St associés*
$s_{\alpha,\alpha}$	$F_\kappa(G, G)$
$s_{\alpha,1-\alpha}$	$F_\kappa(D, D)$ *si n est impair et* $F_\kappa^2(D, D)$ *sinon*
$s'_{\alpha,1-\alpha}$	$F_\kappa(D, D)$ *si n est impair et* $F_\kappa^2(D, D)$ *sinon*
$s_{\alpha,0}$	$F_\kappa(G, D)$ *si n est impair et* $F_\kappa(D, G)F_\kappa(G, D)$ *sinon*
$s'_{\alpha,0}$	$F_\kappa(D, G)$ *si n est impair et* $F_\kappa(G, D)F_\kappa(D, G)$ *sinon*

Si $\alpha = [0, 1, k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\ ]$, avec $n \geq 2$ et $k_1 \in \mathbb{N}^*$, on pose $\kappa = (k_1, \ldots, k_n)$ et on obtient alors :

Suites	*Morphismes de St associés*
$s_{\alpha,\alpha}$	$EF_\kappa(G, G)E$
$s_{\alpha,1-\alpha}$	$EF_\kappa(D, D)E$ *si n est impair et* $EF_\kappa^2(D, D)E$ *sinon*
$s'_{\alpha,1-\alpha}$	$EF_\kappa(D, D)E$ *si n est impair et* $EF_\kappa^2(D, D)E$ *sinon*
$s_{\alpha,0}$	$EF_\kappa(D, G)E$ *si n est impair et* $EF_\kappa(G, D)F_\kappa(D, G)E$ *sinon*
$s'_{\alpha,0}$	$EF_\kappa(G, D)E$ *si n est impair et* $EF_\kappa(D, G)F_\kappa(G, D)E$ *sinon*

Remarques. La propriété concernant les suites caractéristiques est due à D. Crisp, W. Moran, A. Pollington et P. Shiue, [6]. Deux autres démonstrations de ce résultat sont connues : l'une est formulée par J. Berstel et P. Séébold, [2], l'autre par T. Komatsu et A. J. van der Poorten, [11]. Le corollaire 1 est aussi à mettre en parallèle avec l'article [3], où une partie du problème est traitée à partir de la définition extrémale des mots sturmiens.

On étendra le résultat à une classe de mots sturmiens dont l'intercept est une homographie de la pente. Désormais n est un entier supérieur à deux.

Définition 3.

Soit $\mathcal{C}'(n) = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \le a+b \le n,\ 0 \le a \le n\} \setminus \{(n,0)\}$.

Remarque. Les couples d'entiers relatifs de $\mathcal{C}'(n)$ sont exactement les couples (a,b) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha$ appartient à $[0,1[$ pour tout irrationnel α de $]0,1[$. De plus, le cardinal de $\mathcal{C}'(n)$ est égal à n^2+2n.

Théorème 2. *Soient* α *un irrationnel de* $]0,1[$ *et* (a,b)*un couple de* $\mathcal{C}'(n)$. *Les mots* $s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}$ *et* $s'_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}$ *sont des points fixes de substitutions non triviales si et seulement si leur pente* α *est un nombre de Sturm.*

3. Preuves

3.1. Évolution des pentes et des intercepts. Afin de démontrer la proposition 1, plusieurs lemmes sont nécessaires. Désormais α désigne un irrationnel de $]0,1[$.

Lemme 1. *Pour tout réel* ρ, *on a* $E(s_{\alpha,\rho}) = s'_{1-\alpha,1-\rho}$ *et* $E(s'_{\alpha,\rho}) = s_{1-\alpha,1-\rho}$.

Preuve. Soit un entier $n \ge 0$. On commence par observer que tout réel a vérifie $\lfloor a \rfloor = -\lceil -a \rceil$. De plus, on a

$$s'_{1-\alpha,1-\rho}(n) = \lceil (n+1)(1-\alpha) + (1-\rho) \rceil - \lceil n(1-\alpha) + (1-\rho) \rceil.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} s'_{1-\alpha,1-\rho}(n) &= 1 - (\lceil -n\alpha - \rho \rceil - \lceil -(n+1)\alpha - \rho \rceil) \\ &= 1 - (s_{\alpha,\rho}(n)) = E(s_{\alpha,\rho}(n)) = E(s_{\alpha,\rho})(n). \end{aligned}$$

La preuve du second point est similaire. □

On généralise la notion de fonction indicatrice, définie par T. C. Brown dans le cas homogène, voir [5].

Définition 4. *Soient un irrationnel* β *et un réel* δ.

Soient $N_{\beta,\delta} = \{\lfloor k\beta + \delta \rfloor \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ *et* $N'_{\beta,\delta} = \{\lceil k\beta + \delta \rceil \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. *On note* $g_{\beta,\delta}$ *et* $g'_{\beta,\delta}$ *les fonctions indicatrices associées : pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$g_{\beta,\delta}(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in N_{\beta,\delta} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } g'_{\beta,\delta}(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in N'_{\beta,\delta} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le lien entre les fonctions indicatrices et les mots sturmiens est illustré par les lemmes 2 et 3.

Lemme 2.

Soient un irrationnel $\beta > 1$ *et un réel* $\delta < 1$. *On a :*

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^* \ \ g_{\beta,\delta}(n) = s'_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n).$$

Preuve. Soit un entier $n \geq 1$. Dans un premier temps, on suppose $s'_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n) = 1$. On a donc

$$\frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \leq \left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil - 1 < \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta},$$

puis $n \leq \left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil \beta + \delta < n+1$, c'est à dire $\left\lfloor \left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil \beta + \delta \right\rfloor = n$. Comme $\delta < 1 \leq n$, on a $\left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil \geq 1$ et finalement $g_{\beta,\delta}(n) = 1$.

Réciproquement, on suppose $g_{\beta,\delta}(n) = 1$. Il existe donc un entier $k \geq 1$ tel que $\lfloor k\beta + \delta \rfloor = n$. On en déduit $n \leq k\beta + \delta < n+1$ et

$$\left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil - 1 < \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \leq k < \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \leq \left\lceil \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil.$$

Ainsi, on a $\left\lceil \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil \leq k < \left\lceil \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rceil$, et $s'_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n) = 1$. □

Lemme 3.
Soient un irrationnel $\beta > 1$ et un réel $\delta \leq 1$. On a :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^* \quad g'_{\beta,\delta-1}(n) = s_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n).$$

Preuve. Soit un entier $n \geq 1$. Si $s_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n) = 1$, alors on a

$$0 \leq \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} < \left\lfloor \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rfloor \leq \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta},$$

puis

$$n < \left\lfloor \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rfloor \beta + \delta \leq n+1,$$

et $\left\lceil \left\lfloor \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rfloor \beta + \delta - 1 \right\rceil = n$. On en déduit $g'_{\beta,\delta-1}(n) = 1$.

Réciproquement, on suppose $g'_{\beta,\delta-1}(n) = 1$. Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\lceil k\beta + \delta - 1 \rceil = n$. On a ainsi $n < k\beta + \delta \leq n+1$ et

$$\left\lfloor \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rfloor \leq \frac{n}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} < k \leq \left\lfloor \frac{n+1}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \right\rfloor,$$

d'où $s_{\frac{1}{\beta},\frac{-\delta}{\beta}}(n) = 1$. □

Lemme 4. *On a $\varphi(s_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}$ si $\rho \in [0,1[$.*

Preuve. On commence par remarquer $\varphi(s_{\alpha,\rho})(0) = 0 = s'_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}(0)$. Soient un entier $q \geq 1$, et n_{q+1} la position du $(q+1)$-ième zéro dans $\varphi(s_{\alpha,\rho})$. Par définition de φ, on a

$$n_{q+1} = (q + \sum_{i=0}^{q-1}(1 - s_{\alpha,\rho}(i)) + 1) - 1 = 2q - \lfloor q\alpha + \rho \rfloor = \lceil q(2-\alpha) - \rho \rceil.$$

Soit un entier $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(s_{\alpha,\rho})(n) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, q \in \mathbb{N}^* \;\; n = \lceil q(2-\alpha) - \rho \rceil \\ &\Leftrightarrow \quad g'_{2-\alpha,-\rho}(n) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad s_{\frac{1}{2-\alpha},\frac{\rho-1}{2-\alpha}}(n) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad s'_{1-\frac{1}{2-\alpha},1-\frac{\rho-1}{2-\alpha}}(n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad s'_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}(n) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 5. *On a* $\varphi(s'_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}$ *si* $\rho \in]0,1]$.

Preuve. On commence par remarquer $\varphi(s'_{\alpha,\rho})(0) = 0 = s_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}(0)$. Soient un entier $q \geq 1$, et n_{q+1} la position du $(q+1)$-ième zéro dans $\varphi(s'_{\alpha,\rho})$. Par définition même de φ, on a

$$n_{q+1} = (q + \sum_{i=0}^{q-1}(1 - s'_{\alpha,\rho}(i)) + 1) - 1 = 2q - \lceil q\alpha + \rho \rceil + 1 = \lfloor q(2-\alpha) + (1-\rho) \rfloor.$$

Soit un entier $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(s'_{\alpha,\rho})(n) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, q \in \mathbb{N}^* \;\; n = \lfloor q(2-\alpha) + (1-\rho) \rfloor \\ &\Leftrightarrow \quad g_{2-\alpha,1-\rho}(n) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad s'_{\frac{1}{2-\alpha},\frac{\rho-1}{2-\alpha}}(n) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad s_{1-\frac{1}{2-\alpha},1-\frac{\rho-1}{2-\alpha}}(n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad s_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{1-\rho}{2-\alpha}}(n) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Par composition avec le morphisme d'inversion, on en déduit l'action du morphisme G.

Lemme 6. *On a* $G(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\rho}{\alpha+1}}$ *si* $\rho \in [0,1[$ *et* $G(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\rho}{\alpha+1}}$ *si* $\rho \in]0,1]$.

Preuve. Si $\rho \in [0,1[$, on remarque $G(s_{\alpha,\rho}) = \varphi E(s_{\alpha,\rho}) = \varphi(s'_{1-\alpha,1-\rho})$. Comme $1-\rho \in]0,1]$, d'après le lemme 5, on a $G(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\rho}{\alpha+1}}$.

Si $\rho \in]0,1]$, on a $G(s'_{\alpha,\rho}) = \varphi(s_{1-\alpha,1-\rho})$. Comme $1-\rho \in [0,1[$, il suffit d'appliquer le lemme 4 pour conclure. $\square$

Pour étudier le dernier générateur du monoïde de Sturm, on introduit l'opérateur shift qui tronque un mot de sa première lettre.

LEMME 7. *On a* $\tilde{\varphi}(s_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{2-\alpha-\rho}{2-\alpha}}$ *si* $\rho \in [0,1[$ *et* $\tilde{\varphi}(s'_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\frac{2-\alpha-\rho}{2-\alpha}}$ *si* $\rho \in]0,1]$.

Preuve. Restreint aux mots infinis, le morphisme $\tilde{\varphi}$ peut s'écrire comme la composée du shift et du premier morphisme de Fibonacci φ. L'action de φ est décrite aux lemmes 4 et 5. De plus, opérer un shift sur une suite sturmienne de pente β et d'intercept δ revient simplement à transformer son intercept en $\beta + \delta$. □

LEMME 8. *On a* $D(s_{\alpha,\rho}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}}$ *si* $\rho \in [0,1[$ *et* $D(s'_{\alpha,\rho}) = s'_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{\alpha+\rho}{\alpha+1}}$ *si* $\rho \in]0,1]$.

Preuve. La démonstration est identique à celle du lemme 6. □

3.2. Caractérisation des pentes. Afin de démontrer le théorème 1, quelques préliminaires sont nécessaires. On commence par remarquer que les restrictions de s et s', à l'ensemble des couples formés d'un irrationnel de $]0,1[$ et d'un réel de $[0,1[$, sont des applications injectives. Cette propriété classique est utilisée de façon implicite par la suite.

L'étude menée est fondée sur les développements de Raney, voir [13]. Soit l'alphabet $\{R, L\}$ constitué des matrices $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de dimension $(2,1)$, dont les composantes sont positives, hormis le vecteur nul. Soit $V = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{V}$. Si la première ligne domine la seconde, on écrit $V = R\begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, sinon $V = L\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 - \xi_1 \end{pmatrix}$. Et on itère cette démarche. Soit β un irrationnel positif, dont la suite des quotients partiels est de terme général b_n, pour $n \geq 0$. Il apparaît que le développement du vecteur $V_\beta = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ est égal à $R^{b_0}L^{b_1}R^{b_2}L^{b_3}\ldots$ Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'inversion. Pour tout entier relatif k, on vérifie les relations : $JL^k = R^kJ$ et $JR^k = L^kJ$.

Preuve du théorème 1. Soit $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots]$. Soit f une substitution non triviale qui laisse fixe un mot de pente α. On sait alors que f se décompose sur l'alphabet $\{E, G, D\}$. On note r la fonction, à valeurs dans $]0,1[$, qui à un mot sturmien associe sa pente. Soit x un mot sturmien. D'après la proposition 1, on a

$$r(G(x)) = r(D(x)) = \frac{r(x)}{r(x)+1} \text{ et } r(E(x)) = 1 - r(x).$$

On remarque

$$\begin{pmatrix} r(x) \\ r(x)+1 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} r(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1-r(x) \\ 1 \end{pmatrix} = LJL^{-1} \begin{pmatrix} r(x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on peut associer à f une matrice M qui se décompose sur l'alphabet $\{L, LJL^{-1}\}$, et qui traduit l'action de f sur les pentes des mots. Plus précisément, on écrit

$$M = L^{k_m}\ LJL^{k_{m-1}-1} \dots LJL^{k_1-1} \text{ avec } k_1 \in \mathbb{N},\, k_m \in \mathbb{N},$$
$$\text{et } \forall\, j \in \mathbb{N},\ 2 \leq j \leq m-1,\ \ k_j \in \mathbb{N}^*.$$

On sépare la preuve en plusieurs cas selon la parité de m. Dans un premier temps, on suppose que m est impair. Le cas $m = 1$ est sans intérêt. Si $m = 3$ on a alors $M = L^{k_3+1}R^{k_2}L^{k_1-1}$. Pour que la pente reste fixe, on doit vérifier la relation suivante sur le RL-mot associé à α :

$$L^{k_3+1}R^{k_2}L^{k_1-1+a_1}R^{a_2}L^{a_3}\cdots = ML^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\cdots = L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\dots$$

Par unicité d'une telle décomposition, on procède par une identification terme à terme. Si $a_1 + k_1 - 1$ est nul, alors on a $a_2 = a_2 + k_2$, ce qui est faux par définition même de k_2. Le développement obtenu n'est donc pas formel, et on a $\alpha = [0, k_3+1, \overline{k_2, k_1+k_3}\ ]$.

On suppose désormais $m \geq 5$. On peut alors procéder à des regroupements comme indiqués :

$$\begin{aligned} M &= L^{k_m}LJL^{k_{m-1}-1}LJL^{k_{m-2}-1}\dots LJL^{k_2-1}LJL^{k_1-1} \\ &= L^{k_m+1}R^{k_{m-1}}\dots L^{k_3}R^{k_2}L^{k_1-1}. \end{aligned}$$

On doit montrer

$$L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\cdots = L^{k_m+1}R^{k_{m-1}}L^{k_{m-2}}\dots R^{k_4}L^{k_3}R^{k_2}L^{k_1+a_1-1}R^{a_2}L^{a_3}\dots$$

Deux cas se présentent. Si $k_1 + a_1 - 1 = 0$, alors $a_1 = 1$, $k_1 = 0$, et on a

$$\begin{aligned} &L^{k_m+1}R^{k_{m-1}}L^{k_{m-2}}\dots R^{k_4}L^{k_3}R^{k_2+a_2}L^{a_3}\cdots = \\ &\qquad LR^{a_2}L^{a_3}\dots R^{a_{m-3}}L^{a_{m-2}}R^{a_{m-1}}L^{a_m}\dots \end{aligned}$$

On vérifie $k_m = 0$, $a_2 = k_{m-1}$, $a_3 = k_{m-2}, \dots, a_{m-2} = k_3$, $a_{m-1} = k_2 + k_{m-1}$, $a_m = a_3$, et par suite on a $\alpha = [0, 1, k_{m-1}, \overline{k_{m-2}, \dots, k_3, k_2+k_{m-1}}\ ]$. Si $k_1 + a_1 - 1 \neq 0$, on obtient de même $\alpha = [0, k_m+1, \overline{k_{m-1}, \dots, k_2, k_1+k_m}\ ]$, la condition $k_1 + a_1 - 1 \neq 0$ se traduisant par $k_1 + k_m \neq 0$.

Désormais, on suppose que m est pair. Si $m = 2$, on vérifie les relations $M = L^{k_2+1}R^{k_1-1}J$ et $L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}R^{a_4}\cdots = L^{k_2+1}R^{k_1-1+a_1}L^{a_2}R^{a_3}L^{a_4}\dots$ Si $k_1 - 1 + a_1 \neq 0$, on a $\alpha = [0, k_2+1, \overline{k_1+k_2}\ ]$, l'hypothèse étant $k_1 + k_2 \neq 0$. Si $k_1 + a_1 - 1 = 0$ on a $1 = a_1 = k_2 + 1 + a_2$, ce qui est absurde. On

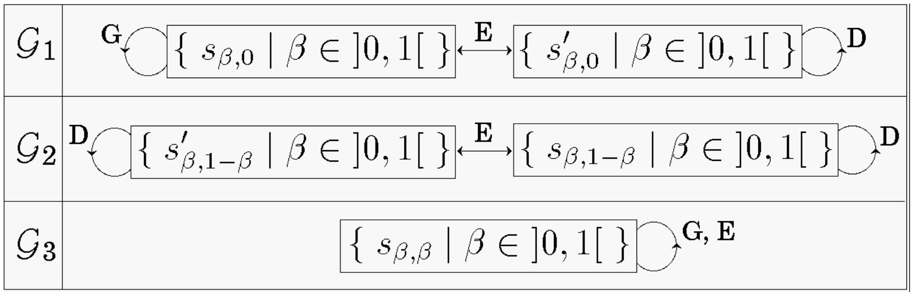

FIGURE 1. Évolution des suites $s_{\beta,0}$, $s'_{\beta,0}$, $s_{\beta,1-\beta}$, $s'_{\beta,1-\beta}$ et $s_{\beta,\beta}$, de pente irrationnelle β

suppose désormais $m \geq 4$. On regroupe les termes comme précédemment, en mettant à part le dernier, c'est à dire LJL^{k_1-1}. Plus précisément, on écrit :

$$\begin{aligned} M &= L^{k_m}\, LJL^{k_{m-1}-1} \dots LJL^{k_2-1}\, LJL^{k_1-1} \\ &= L^{k_m+1} R^{k_{m-1}} L^{k_{m-2}} \dots R^{k_3} L^{k_2} R^{k_1-1} J. \end{aligned}$$

On en déduit

$$L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots = L^{k_m+1} R^{k_{m-1}} L^{k_{m-2}} \dots R^{k_3} L^{k_2} R^{k_1+a_1-1} L^{a_2} R^{a_3} \dots$$

Si $k_1 + a_1 - 1 \neq 0$, on obtient $\alpha = [0, k_m + 1, \overline{k_{m-1}, \dots, k_2, k_1 + k_m}\ ]$, la condition devenant $k_1 + k_m \neq 0$. Si $k_1 + a_1 - 1 = 0$, on a alors $a_1 = 1$, $k_1 = 0$, puis $a_1 = k_m + 1$, donc $k_m = 0$, et $a_2 = k_{m-1}$, $\dots$, $a_{m-2} = k_3$, $a_{m-1} = k_2 + k_{m-1}$, $a_m = a_3$. Autrement dit, on vérifie que α est de la forme $\alpha = [0, 1, k_{m-1}, \overline{k_{m-2}, \dots, k_3, k_2 + k_{m-1}}\ ]$.

En résumé, on peut affirmer qu'il existe deux développements en fraction continue possibles pour α :

- $\alpha = [0, 1 + k_m, \overline{k_{m-1}, \dots, k_2, k_1 + k_m}\ ]$ avec $m \geq 2$ et $k_j \in \mathbb{N}$ pour $2 \leq j \leq m-1$ et $(k_1, k_m) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
- $\alpha = [0, 1, k_{m-1}, \overline{k_{m-2}, \dots, k_3, k_2 + k_{m-1}}\ ]$ avec $m \geq 4$ et $k_j \in \mathbb{N}^*$ pour $2 \leq j \leq m-1$.

On obtient le résultat annoncé, à une simple renumérotation près pour le second cas. $\square$

On construit les graphes présentés page 359, à l'aide des formules décrites à la proposition 1.

Preuve du corollaire 1.
Soit un irrationnel α de l'intervalle $]0,1[$, dont le développement en fraction

continue est de la forme :

$$\alpha = [0, k_n{+}1, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,] \text{ avec } n \geq 2, \text{ et } (k_1, k_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

On pose $\kappa = (k_1, \ldots, k_n)$. Dans un premier temps, on suppose que n est impair. On a alors

$$F_\kappa(X, Y) = X^{k_n} E Y^{k_{n-1}} E X^{k_{n-2}} \ldots E Y^{k_2} E X^{k_1}.$$

En reprenant le procédé utilisé pour la démonstration du théorème 1, on vérifie que $F_\kappa(G, D)$ transforme $s_{\alpha,0}$ en un mot sturmien de même pente. Sur le graphe $\mathcal{G}_1$, on remarque que le chemin associé à $F_\kappa(G, D)$ effectue une boucle sur l'état regroupant les suites sturmiennes d'intercept nul, issues de l'application s. En résumé, le morphisme $F_\kappa(G, D)$ laisse fixe le mot $s_{\alpha,0}$. Par symétrie du rôle de G et D dans le graphe $\mathcal{G}_1$, on a $F_\kappa(D, G)(s'_{\alpha,0}) = s'_{\alpha,0}$. Comme G et D ont la même action sur les pentes des mots sturmiens, par l'étude du graphe $\mathcal{G}_2$, un raisonnement identique permet d'affirmer $F_\kappa(D, D)(s_{\alpha,1-\alpha}) = s_{\alpha,1-\alpha}$ et $F_\kappa(D, D)(s'_{\alpha,1-\alpha}) = s'_{\alpha,1-\alpha}$. De façon encore plus évidente, par lecture sur le graphe $\mathcal{G}_3$, on a $F_\kappa(G, G)(s_{\alpha,\alpha}) = s_{\alpha,\alpha}$.

On suppose que n est pair. On écrit alors $F_\kappa(X, Y)$ sous la forme :

$$F_\kappa(X, Y) = Y^{k_n} E X^{k_{n-1}} E \ldots Y^{k_4} E X^{k_3} E Y^{k_2} E X^{k_1}.$$

En ce qui concerne les mots de Christoffel, on a $F_\kappa(G, D)(s_{\alpha,0}) = s'_{\alpha,0}$ et $F_\kappa(D, G)(s'_{\alpha,0}) = s_{\alpha,0}$. On vérifie aussi $F_\kappa(D, D)(s_{\alpha,1-\alpha}) = s'_{\alpha,1-\alpha}$ et $F_\kappa(D, D)(s'_{\alpha,1-\alpha}) = s_{\alpha,1-\alpha}$. Enfin, pour les suites caractéristiques, on a $F_\kappa(G, G)(s_{\alpha,\alpha}) = s_{\alpha,\alpha}$, ce qui achève l'étude du premier cas.

On suppose maintenant que α a pour développement en fraction continue :

$$\alpha = [0, 1, k_n, \overline{k_{n-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_n}\,] \text{ avec } n \geq 2 \text{ et } k_1 \geq 1.$$

Sous l'action du morphisme E, la pente α est transformée en $1 - \alpha$, qui est un irrationnel de la première forme étudiée. La fin de la preuve est donc triviale. □

3.3. Suites admissibles. Désormais n désigne un entier supérieur à deux.

DÉFINITION 5. *Soit*

$$\mathcal{C}(n) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq a + b \leq n,\ 0 \leq a \leq n - 1\} \setminus \{(0, n)\}.$$

On note $\mathcal{L}(a, b, n)$ l'ensemble des suites sturmiennes x pour lesquelles il existe un irrationnel α de $]0,1[$ tel que $x = s_{\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha}$ avec $(a, b) \in \mathcal{C}(n)$. Soit $\mathcal{L}(n) = \bigcup_{(a,b)\in\mathcal{C}(n)} \mathcal{L}(a, b, n)$. Les mots de $\mathcal{L}(n)$ sont dits n-admissibles.

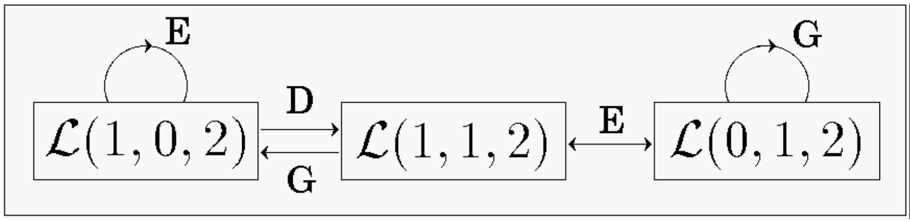

FIGURE 2. Graphe $\zeta(2)$

Soit Λ l'ensemble des couples formés d'un irrationnel appartenant à $]0,1[$ et d'un réel de $[0,1[$. Soit $\mathcal{U} = \{(\beta,\delta) \in \Lambda \mid \forall\, c \in \mathbb{N} \;\; c\beta + \delta \notin \mathbb{N}\}$. Soit (β,δ) un élément de Λ. On rappelle que les mots $s_{\beta,\delta}$ et $s'_{\beta,\delta}$ ne coïncident que si (β,δ) appartient à $\mathcal{U}$, et diffèrent d'au plus deux termes dans le cas général.

Remarque. Soit α un irrationnel de $]0,1[$. Pour tout couple d'entiers (a,b) de $\mathcal{C}(n)$, on a $(\alpha, \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\alpha) \in \mathcal{U}$.

Dans un premier temps, on reformule le théorème 2, en limitant notre propos aux mots que l'on vient de décrire.

THÉORÈME 3. *Les suites sturmiennes n-admissibles sont des points fixes de substitutions non triviales si et seulement si leur pente est un nombre de Sturm.*

Afin d'établir la preuve, certains préliminaires sont nécessaires. À l'entier n, on associe un graphe, noté $\zeta(n)$, dont les états sont les ensembles $\mathcal{L}(a,b,n)$ pour (a,b) appartenant à $\mathcal{C}(n)$. Les lemmes 9 à 12 décrivent le système de transitions, sur l'alphabet $\{E,G,D\}$, entre ces n^2-1 différents états. On présente les graphes $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ en exemple.

LEMME 9. *Soit (a,b) un élément de $\mathcal{C}(n)$. Un et un seul des morphismes G et D transforme $\mathcal{L}(a,b,n)$ en un sous ensemble d'un état de $\zeta(n)$.*

Preuve. Soit α un irrationnel de $]0,1[$. On considère la suite $s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}$. Sous l'hypothèse $(a,b) \in \mathcal{C}(n)$, on remarque $0 < a + b\alpha < n$, ce qui permet d'appliquer $G(s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{a}{n}+\frac{b-a}{n}\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ et $D(s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}) = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\frac{a}{n}+\frac{b-a+n}{n}\frac{\alpha}{\alpha+1}}$. Par abus de langage, on dit que G et D conservent la partie rationnelle de l'intercept des suites sturmiennes n-admissibles. Il est très facile de montrer qu'on a $(a, b-a) \in \mathcal{C}(n)$ si $b \geq 1$ et $(a, b-a+n) \in \mathcal{C}(n)$ si $b \leq 0$. Pour conclure, supposons qu'on ait simultanément $(a,b-a)$ et $(a,b-a+n)$ dans $\mathcal{C}(n)$. Alors pour tout irrationnel β de $]0,1[$, on a $a + (b-a+n)\beta < n$ et $a + (b-a)\beta > 0$. En faisant tendre β vers 1^-, on obtient $b = 0$, puis $(a,-a) \in \mathcal{C}(n)$, ce qui amène la contradiction cherchée. $\square$

Lemme 10. *Soit $(a,b) \in \mathcal{C}(n)$. Il existe un chemin de longueur majorée par n, écrit sur l'alphabet $\{G,D\}$, dans le graphe $\zeta(n)$, dont l'origine et l'extrémité coïncident avec $\mathcal{L}(a,b,n)$.*

Preuve. On part de l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$. D'après le lemme 9, on peut construire pas à pas un chemin à travers les états de $\zeta(n)$. De plus, d'après la définition de $\mathcal{C}(n)$, il existe au plus n suites sturmiennes n-admissibles dont la partie rationnelle de l'intercept est $\frac{a}{n}$: exactement $n-1$ si a est nul, et n dans le cas contraire. Comme G et D conservent ce terme, on réalise une boucle dans $\zeta(n)$, au bout d'au plus n étapes. On montre que le premier état apparaissant à deux reprises dans un tel chemin est $\mathcal{L}(a,b,n)$. Supposons le contraire, il existe alors des entiers c_1, c_2 et c_3 tels que (a,c_1), (a,c_2) et (a,c_3) soient des éléments de $\mathcal{C}(n)$, et vérifient le schéma suivant :

$$\boxed{\mathcal{L}(a,c_1,n)} \xrightarrow{G} \boxed{\mathcal{L}(a,c_2,n)} \xleftarrow{D} \boxed{\mathcal{L}(a,c_3,n)}$$

On en déduit $(a,c_1-a) = (a,c_2) = (a,c_3-a+n)$, d'où $c_1 = c_3+n$. Il apparaît que les couples (a,c_3) et (a,c_3+n) appartiennent à $\mathcal{C}(n)$. En particulier, on a $a+c_3 \geq 1$ et $a+c_3+n \leq n$, ce qui est absurde. On a donc construit un chemin, de longueur majorée par n, qui boucle sur l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$. $\square$

Remarque. En utilisant les transitions sur l'alphabet $\{G,D\}$, on peut ainsi regrouper les états de $\zeta(n)$ en différents cycles deux à deux disjoints. En effet, un état commun serait un état d'où partiraient deux transitions sur $\{G,D\}$, ce qui est absurde.

Lemme 11. *Le morphisme d'inversion E laisse $\mathcal{L}(n)$ globalement invariant.*

Preuve. Soit $(a,b) \in \mathcal{C}(n)$. Clairement, on a $(n-a-b,b) \in \mathcal{C}(n)$. On remarque aussitôt que E transforme l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$ en $\mathcal{L}(n-a-b,b,n)$. $\square$

Lemme 12. *Entre deux cycles de $\zeta(n)$, il existe au plus une liaison assurée par E.*

Preuve. Soient deux couples d'entiers (a,b) et (a',b') de $\mathcal{C}(n)$, tels que les états $\mathcal{L}(a,b,n)$ et $\mathcal{L}(a',b',n)$ appartiennent à un même cycle. On a déjà remarqué qu'alors a est égal à a'. Le morphisme E transforme $\mathcal{L}(a,b,n)$ en $\mathcal{L}(n-a-b,b,n)$ et $\mathcal{L}(a,b',n)$ en $\mathcal{L}(n-a-b',b',n)$. Pour que ces deux états soient des composantes d'un même cycle, il faut que $n-a-b'$ soit égal à $n-a-b$, autrement dit $b=b'$, ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque. En particulier, il existe au plus un état par cycle qui reste fixe sous l'action du morphisme E.

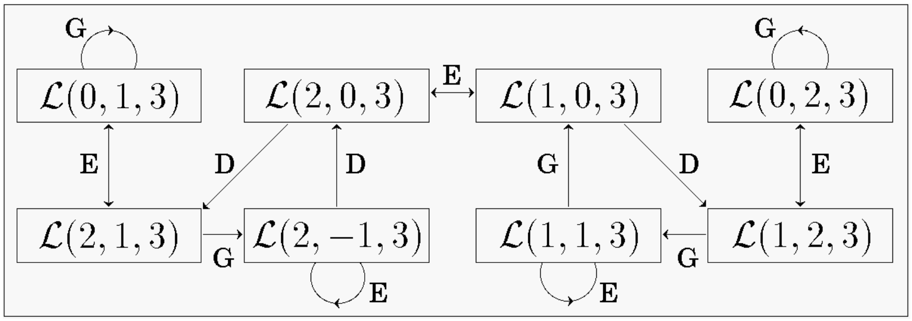

FIGURE 3. Graphe $\zeta(3)$

DÉFINITION 6. *On pose* $\Omega(1) = \{G, D\}^*$, *et à l'entier* n, *on associe l'ensemble de morphismes :*

$$\Omega(n) = \{\delta_n E \delta_{n-1} \ldots E\delta_1 \mid (\delta_1, \delta_n) \in \{G, D\}^{*2} \text{ et } \delta_i \in \{G, D\}^+,\ 2 \leq i \leq n-1, \}.$$

En rappelant que les morphismes G et D commutent, on introduit une nouvelle définition :

DÉFINITION 7. *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *Soient* γ *et* γ' *des morphismes appartenant à* $\Omega(k)$, *donnés sous la forme* $\gamma = \delta_k E \delta_{k-1} \ldots E\delta_1$ *et* $\gamma' = \delta'_k E \delta'_{k-1} \ldots E\delta'_1$. *On dit que* γ *et* γ' *sont* $\Omega-$*équivalents si pour tout entier* i *compris entre 1 et* k, *il y a égalité entre les longueurs des morphismes* δ_i *et* δ'_i, *écrits sur l'alphabet* $\{G, D\}$.

DÉFINITION 8. *On numérote linéairement les différents états de* $\zeta(n)$. *Soit un entier* i *compris entre* 1 *et* $n^2 - 1$. *On note* $\mathcal{X}(i)$ *l'ensemble des morphismes appartenant à* $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega(k)$, *pouvant être lus sur le graphe* $\zeta(n)$, *à partir du i-ième sommet.*

LEMME 13. *Deux morphismes* $\Omega-$*équivalents ont la même action sur les pentes des suites sturmiennes.*

Preuve. Il suffit de rappeler que l'action des morphismes G et D, sur les pentes, se traduit à l'aide de la matrice L de Raney. $\square$

LEMME 14. *Soit* i *un entier compris entre* 1 *et* $n^2 - 1$. *Dans chaque classe de morphismes* Ω-*équivalents, il existe un et un seul représentant qui appartient à* $\mathcal{X}(i)$.

Preuve. On utilise le lemme 9 qui assure l'existence et l'unicité d'une transition sur l'alphabet $\{G, D\}$ à partir d'un sommet donné, ainsi que le lemme 11. $\square$

Preuve du théorème 3. On commence par fixer quelques notations : T désigne la fonction de transition associée au graphe $\zeta(n)$. On numérote les différents états de $\zeta(n)$ sous la forme $\mathcal{E}_i$, pour i variant de 1 à n^2-1. Soit un entier $m \geq 2$. À tout élément ν de $\Omega(m)$, on associe la suite des représentants ν_i de ν dans les catégories $\mathcal{X}(i)$, pour i variant de 1 à n^2-1. On affirme que pour tout couple d'entiers (i,j) choisis entre 1 et n^2-1, si $T(\mathcal{E}_i,\nu_i)=\mathcal{E}_j$ alors il n'existe pas d'entier d, compris entre 1 et n^2-1, différent de i, tel que $T(\mathcal{E}_d,\nu_d)=\mathcal{E}_j$. On va établir ce résultat par récurrence. Soit γ un élément de $\Omega(2)$, écrit sous la forme $\gamma=\delta_2 E\delta_1$. On note $\gamma_c=\delta_2^{(c)}E\delta_1^{(c)}$ son représentant dans la c-ième classe $\mathcal{X}(c)$, pour tout entier c de l'ensemble $\{1,\ldots,n^2-1\}$. On est amené à considérer le schéma suivant, où j désigne un entier compris entre 1 et n^2-1, le but étant de montrer que les entiers d_1 et d_2, pris entre 1 et n^2-1, sont égaux :

$$\boxed{\mathcal{E}_{d_1}} \xrightarrow{\delta_2^{(d_1)}E\delta_1^{(d_1)}} \boxed{\mathcal{E}_j} \xleftarrow{\delta_2^{(d_2)}E\delta_1^{(d_2)}} \boxed{\mathcal{E}_{d_2}}$$

Dans chaque cycle Γ, de longueur l, on choisit arbitrairement un état de départ Γ_1, puis on numérote les autres éléments de Γ sous la forme Γ_i, pour i variant de 2 à l, selon leur ordre d'apparition dans le cycle. En notant $|\sigma|$ la longueur d'un morphisme σ écrit sur l'alphabet $\{G,D\}$, plusieurs cas se présentent :

- on commence par supposer que les trois états appartiennent au même cycle Γ de longueur l. Par la convention choisie, il existe des entiers s et t de $\{1,\ldots,l\}$ tels que $\mathcal{E}_{d_1}=\Gamma_s$ et $\mathcal{E}_{d_2}=\Gamma_t$. Supposons qu'il n'existe pas d'état de Γ laissé invariant par le morphisme E. Alors sous l'action de tout morphisme Ω-équivalent à γ, on quitte ce cycle, ce qui est contraire à l'hypothèse de base. En se référant au lemme 12, il existe donc un et un seul état de Γ, qu'on note Γ_u, pour un certain entier u compris entre 1 et l, qui reste invariant sous l'action du morphisme E. On a ainsi
$$T(\Gamma_s,\delta_1^{(d_1)})=\Gamma_u=T(\Gamma_t,\delta_1^{(d_2)}).$$
Puis, on a $|\delta_1|\equiv(u-s) \pmod l$ et $|\delta_1|\equiv(u-t)\pmod l$. Par définition même de s et t, on a alors $s=t$, et par suite $d_1=d_2$;
- on suppose que $\mathcal{E}_{d_1}$ et $\mathcal{E}_j$ appartiennent au même cycle $\Gamma^{(1)}$, et $\mathcal{E}_{d_2}$ à un cycle différent, noté $\Gamma^{(2)}$. Soient $l^{(1)}$ et $l^{(2)}$ les longueurs respectives de ces deux cycles. Il existe donc des entiers s et t de l'ensemble $\{1,\ldots,l^{(1)}\}$, tels que $\mathcal{E}_{d_1}=\Gamma_s^{(1)}$ et $\mathcal{E}_j=\Gamma_t^{(1)}$. Il existe de plus un et un seul état de $\Gamma^{(1)}$, noté $\Gamma_u^{(1)}$, qui reste invariant sous l'action de E. On a donc $T(\Gamma_s^{(1)},\delta_1^{(d_1)})=\Gamma_u^{(1)}$, $T(\Gamma_u^{(1)},E)=\Gamma_u^{(1)}$ et $|\delta_2|\equiv(t-u)\pmod{l^{(1)}}$. En outre, il existe un entier v, $1\leq v\leq l^{(1)}$, tel que $T(\mathcal{E}_{d_2},E\delta_1^{(d_2)})=\Gamma_v^{(1)}$. On a $|\delta_2|\equiv(t-v)\pmod{l^{(1)}}$, puis

$u = v$ et $T(\mathcal{E}_{d_2}, E\delta_1^{(d_2)}) = \Gamma_u^{(1)} = T(\mathcal{E}_{d_2}, \delta_1^{(d_2)}) \in \Gamma^{(2)}$, ce qui est absurde car les deux cycles sont disjoints;

- le cas où seuls $\mathcal{E}_{d_2}$ et $\mathcal{E}_j$ appartiennent au même cycle se traite de façon similaire;
- on suppose à présent qu'il existe deux cycles distincts, de longueurs $l^{(1)}$ et $l^{(2)}$, notés $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$, tels que $\mathcal{E}_{d_1}$ et $\mathcal{E}_{d_2}$ appartiennent à $\Gamma^{(1)}$ et $\mathcal{E}_j$ à $\Gamma^{(2)}$. Il existe des entiers s et u de l'ensemble $\{1, \ldots, l^{(1)}\}$ tels que $\mathcal{E}_{d_1} = \Gamma_s^{(1)}$ et $\mathcal{E}_{d_2} = \Gamma_u^{(1)}$. D'après le lemme 12, il existe un entier v, $1 \leq v \leq l^{(1)}$, tel que $T(\mathcal{E}_{d_1}, \delta_1^{(d_1)}) = T(\mathcal{E}_{d_2}, \delta_1^{(d_2)}) = \Gamma_v^{(1)}$. On vérifie ainsi $|\delta_1| \equiv (v - s) \pmod{l^{(1)}}$, $|\delta_1| \equiv (v - u) \pmod{l^{(1)}}$, puis $u = s$ et $d_1 = d_2$;
- le dernier cas revient à supposer que les états $\mathcal{E}_{d_1}$, $\mathcal{E}_{d_2}$ et $\mathcal{E}_j$ appartiennent à des cycles différents, respectivement notés $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ et $\Gamma^{(3)}$, de longueurs $l^{(1)}$, $l^{(2)}$ et $l^{(3)}$. Plus précisément, il existe des entiers s, u et t vérifiant $1 \leq s \leq l^{(1)}$, $1 \leq u \leq l^{(2)}$ et $1 \leq t \leq l^{(3)}$, tels que $\mathcal{E}_{d_1} = \Gamma_s^{(1)}$, $\mathcal{E}_{d_2} = \Gamma_u^{(2)}$ et $\mathcal{E}_j = \Gamma_t^{(3)}$. On établit l'existence d'entiers v et w, compris entre 1 et $l^{(3)}$, tels que l'on ait $T(\Gamma_s^{(1)}, E\delta_1^{(d_1)}) = \Gamma_v^{(3)}$ et $T(\Gamma_u^{(2)}, E\delta_1^{(d_2)}) = \Gamma_w^{(3)}$. De $|\delta_2| \equiv (t - v) \pmod{l^{(3)}}$ et $|\delta_2| \equiv (t - w) \pmod{l^{(3)}}$, on déduit $v = w$, puis $T(\Gamma_s^{(1)}, \delta_1^{(d_1)}) = T(\Gamma_u^{(2)}, \delta_1^{(d_2)}) \in \Gamma^{(1)} \cap \Gamma^{(2)}$, ce qui est absurde, car ces deux cycles sont disjoints.

Dans tous les cas, on a bien démontré le résultat énoncé pour les morphismes appartenant à $\Omega(2)$. On suppose l'hypothèse de récurrence vérifiée pour les morphismes de $\Omega(m)$, où m désigne un entier supérieur à deux. On cherche à établir la propriété au rang $m + 1$. Soit γ un élément de $\Omega(m + 1)$, écrit sous la forme $\gamma = \delta_{m+1} E\theta$ avec $\theta \in \Omega(m)$. On note $\gamma_c = \delta_{m+1}^{(c)} E\theta_c$ le représentant de γ dans la c-ième classe $\mathcal{X}(c)$, pour tout entier c de l'ensemble $\{1, \ldots, n^2 - 1\}$. On considère le schéma suivant, où c_1, c_2, d_1, d_2 et j sont compris entre 1 et $n^2 - 1$:

$$\boxed{\mathcal{E}_{c_1}} \xrightarrow{\theta_{c_1}} \boxed{\mathcal{E}_{d_1}} \xrightarrow{\delta_{m+1}^{(c_1)}E} \boxed{\mathcal{E}_j} \xleftarrow{\delta_{m+1}^{(c_2)}E} \boxed{\mathcal{E}_{d_2}} \xleftarrow{\theta_{c_2}} \boxed{\mathcal{E}_{c_2}}$$

Comme le morphisme $\delta_{m+1}^{(c_1)}E$ appartient à $\Omega(2)$, d'après l'étude précédente, on a $d_1 = d_2$. Puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence au rang m pour θ_{c_1} et θ_{c_2}, on conclut $c_1 = c_2$, ce qui établit le résultat au rang $m + 1$, et achève cette partie de la preuve.

Soit $\alpha = [0, k_{n'} + 1, \overline{k_{n'-1}, k_{n'-2}, \ldots, k_2, k_1 + k_{n'}}\ ]$ un nombre de Sturm avec $n' \geq 2$ et $(k_1, k_{n'}) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En utilisant les matrices de Raney, il apparaît que tout élément γ de $\Omega(n')$, de la forme $\delta_{n'} E\delta_{n'-1} \ldots E\delta_1$, avec $\delta_i \in \{G, D\}^{k_i}$ pour $1 \leq i \leq n'$, transforme un mot sturmien de pente α en un autre de même pente.

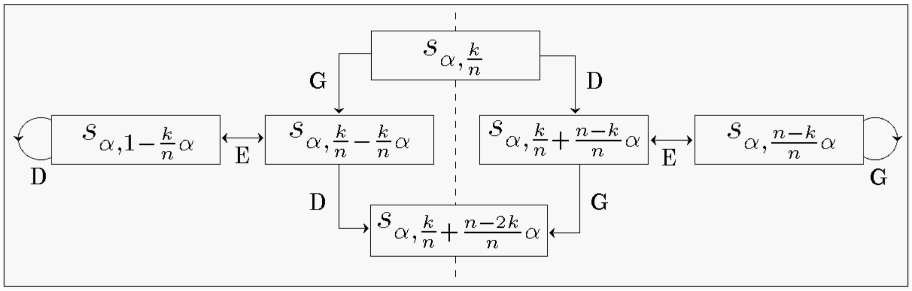

FIGURE 4. Extension du graphe $\zeta(n)$

Soit (a,b) un élément de $\mathcal{C}(n)$. Clairement, il existe une famille d'entiers compris entre 1 et n^2-1, que l'on note $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$, définie par $\mathcal{E}_{d_0} = \mathcal{L}(a,b,n)$ et $\mathcal{E}_{d_{i+1}} = T(\mathcal{E}_{d_i}, \gamma_{d_i})$ pour $i \in \mathbb{N}$. On affirme qu'il existe un entier $j \geq 1$ tel que $d_j = d_0$. En effet, un chemin fermé, sur un état quelconque, se construit de cette façon en au plus n^2-1 étapes, puisqu'il est impossible d'accéder à un état donné de $\zeta(n)$ par deux morphismes Ω-équivalents partant de deux états distincts. En résumé, on obtient un morphisme qui transforme la suite $s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}$ en un mot sturmien appartenant encore à l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$. Mais ce morphisme préserve aussi la pente de $s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}$. Autrement dit, à tout couple (a,b) de $\mathcal{C}(n)$, on peut associer un morphisme sturmien non trivial qui laisse fixe la suite $s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}$. Ce résultat est en particulier vérifié pour les mots de l'état $\mathcal{L}(n-a-b,b,n)$.

D'après le théorème 1, on doit encore étudier le cas où α est un irrationnel de la forme :

$$\alpha = [0, 1, k_{n'}, \overline{k_{n'-1}, \ldots, k_2, k_1 + k_{n'}}\,],$$

pour un certain entier $n' \geq 2$, avec $k_1 \in \mathbb{N}^*$. On remarque que le morphisme d'inversion E transforme $s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}$ en $s_{1-\alpha,\frac{n-a-b}{n}+\frac{b}{n}(1-\alpha)}$. Ce mot appartient à l'état $\mathcal{L}(n-a-b,b,n)$. Or $1-\alpha$ est de la forme précédemment étudiée. Il existe donc un morphisme sturmien γ non trivial tel que $E\gamma E(s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}) = s_{\alpha,\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha}$. $\square$

Il ne reste plus qu' à établir la démonstration pour les couples d'entiers relatifs de $\mathcal{C}'(n)$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{C}(n)$.

Preuve du théorème 2. On remarque

$$\mathcal{C}'(n) \setminus \mathcal{C}(n) =$$

$$\{(0,0),(0,n),(n,-n)\} \cup \{(k,-k) \mid 1 \leq k \leq n-1\} \cup \{(n,-k) \mid 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Dans un premier temps, on ne considère que les suites issues de l'application s. Les mots associés aux couples $(0,0)$, $(0,n)$ et $(n,-n)$ sont étudiés au corollaire 1. Soit un entier k compris entre 1 et $n-1$. Soit α un irrationnel quelconque de $]0,1[$. Les suites, de pente α, associées aux couples $(k,-k)$ et $(n,-k)$ sont égales à $s_{\alpha,\frac{k}{n}-\frac{k}{n}\alpha}$ et $s_{\alpha,1-\frac{k}{n}\alpha}$. On construit le graphe présenté page 366, dont la "partie droite" est une composante de $\zeta(n)$. En effet, il est facile de vérifier que les couples $(k,0)$, $(k,n-k)$, $(0,n-k)$ et $(k,n-2k)$ appartiennent à $\mathcal{C}(n)$. Il suffit alors de remarquer la symétrie du graphe pour affirmer que les rôles des suites $s_{\alpha,\frac{k}{n}-\frac{k}{n}\alpha}$ et $s_{\alpha,\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n}\alpha}$ d'une part, puis $s_{\alpha,1-\frac{k}{n}\alpha}$ et $s_{\alpha,\frac{n-k}{n}\alpha}$ d'autre part, commutent.

À présent, on considère les mots sturmiens issus de l'application s'. Les seuls couples (a,b) de $\mathcal{C}'(n)$ pour lesquels on a $(\alpha, \frac{a}{n}+\frac{b}{n}\alpha) \notin \mathcal{U}$ sont $(0,0)$ et $(n,-n)$. Les suites $s'_{\alpha,0}$ et $s'_{\alpha,1-\alpha}$ sont traitées au corollaire 1. Dans tous les autres cas, le résultat devient trivial. $\square$

4. Quelques propriétés du graphe $\zeta(n)$

On cherche à préciser la structure du graphe $\zeta(n)$.

LEMME 15. *Soit a un entier compris entre 0 et $n-1$. Soit b un entier tel que $(a,b) \in \mathcal{C}(n)$. Il existe un chemin de longueur $\dfrac{n}{pgcd(a,n)}$, écrit sur l'alphabet $\{G,D\}$, dans le graphe $\zeta(n)$, dont l'origine et l'extrémité coïncident avec l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$. Les états rencontrés sont deux à deux distincts. On parle alors de cycle minimal.*

Preuve. On sait construire sur $\mathcal{L}(a,b,n)$ un cycle $\Gamma_{a,b,n}$ de longueur majorée par n. Les entiers u et v désignent respectivement le nombre d'occurrences des lettres G et D dans ce cycle. On pose $\gamma = G^u D^v$. Ce morphisme transforme l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$ en $\mathcal{L}(a, b-(u+v)a+nv, n)$. Par invariance, on vérifie $(u+v)a = nv$. On pose $d = pgcd(a,n)$. Soient a_1 et n_1 les entiers définis par $a_1 = \frac{a}{d}$ et $n_1 = \frac{n}{d}$. On remarque alors $(u+v)a_1 = n_1 v$ et a_1 divise v. On choisit le cycle $\Gamma_{a,b,n}$ de longueur minimale. On pose $\gamma_1 = G^{n_1-a_1}D^{a_1}$. Ce morphisme transforme $\mathcal{L}(a,b,n)$ en $\mathcal{L}(a,b,n)$, car $na_1 - n_1 a = 0$. Comme le rapport $\frac{a_1}{n_1-a_1}$ est égal à $\frac{v}{u}$, il existe un morphisme Ω-équivalent à γ_1, auquel on peut associer un cycle sur le graphe $\zeta(n)$. La fraction $\frac{a_1}{n_1-a_1}$ étant irréductible, on a même $\gamma_1 = \gamma$, d'où $v = a_1$, et $u = n_1 - a_1$. Finalement la longueur du cycle $\Gamma_{a,b,n}$ est égale à n_1. Le cycle $\Gamma_{a,b,n}$ étant choisi minimal, les états rencontrés sont bien deux à deux distincts. $\square$

PROPOSITION 2. *En notant Φ la fonction d'Euler, le graphe $\zeta(n)$ se décompose en $n-1$ cycles de longueur 1 et $d \times \Phi(\frac{n}{d})$ cycles de longueur $\frac{n}{d}$, pour tout diviseur d de n, non égal à n.*

Preuve. Soit (a,b) un couple de $\mathcal{C}(n)$. Soit $\Gamma_{a,b,n}$ le cycle minimal fondé sur l'état $\mathcal{L}(a,b,n)$. D'après le lemme précédent, la longueur de $\Gamma_{a,b,n}$ vaut 1 si et seulement si a est nul. Le nombre de cycles de longueur 1 est donc égal au nombre de couples admissibles dont la première composante est nulle, soit $n-1$. On suppose désormais que a appartient à $\{1,\ldots,n-1\}$. Il existe exactement n couples de $\mathcal{C}(n)$ dont la première composante est a, donc $pgcd(a,n)$ cycles distincts. Soit d un diviseur de n, $d \neq n$. On compte finalement $\sum_{1 \leq i \leq n-1,\ pgcd(i,n)=d} pgcd(i,n)$ cycles de longueur $\frac{n}{d}$, c'est à dire $d \times \sum_{1 \leq i \leq n-1,\ pgcd(i,n)=d} 1$, d'où le résultat énoncé avec la fonction d'Euler. Pour vérifier qu'on obtient bien ainsi les n^2-1 états qui composent $\zeta(n)$, il suffit de remarquer

$$(n-1)+\sum_{d \mid n,\ d \neq n} \left(d \times \Phi\left(\frac{n}{d}\right) \times \frac{n}{d}\right) = n-1+n(n-\Phi(1)) = n-1+n(n-1). \qquad \square$$

Remarque. On observe enfin que la primalité de n est une condition nécessaire et suffisante pour assurer la connexité du graphe $\zeta(n)$.

Bibliographie

[1] J. Bernoulli, *Recueil pour astronomes*, Berlin, (1772).

[2] J. Berstel et P. Séébold, *Morphismes de Sturm*, Bull. Belg. Math. Soc. 1 (1994), 175–189.

[3] J. Berstel and P. Séébold, *A remark on morphic Sturmian words*, Rairo Informatique théorique et applications 28 (1994), 255–263.

[4] J.-P. Borel et F. Laubie, *Quelques mots sur la droite projective réelle*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux (1993), 23–52.

[5] T. C. Brown, *A characterization of the quadratic irrationals*, Canad. Math. Bull. 34 (1991), 36–41.

[6] D. Crisp, W. Moran, A. Pollington and P. Shiue, *Substitution invariant cutting sequences*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 5 (1993), 123–138.

[7] S. Ito, *On a dynamical system related to sequences* $\lfloor nx+y \rfloor - \lfloor (n-1)x+y \rfloor$, Collection : Dynamical Systems and Related Topics, Nagoya (1990), 192–197.

[8] S. Ito and N. Hitoshi, *Approximations of real numbers by the sequence* $\{n\alpha\}$ *and their metrical theory*, Acta Math. Hungar. 52 (1988), 91–100.

[9] S. Ito and H. Mimachi, *A characterization of real quadratic numbers by Diophantine algorithms*, Tokyo J. Math. 14 (1991), 251–267.

[10] S. Ito and S. Yasutomi, *On Continued fractions, substitutions and characteristic sequences,* Japan J. Math. 16 (1990), 287–306.

[11] T. Komatsu and A. J. van der Poorten, *Substitution invariant Beatty sequences*, Japan J. Math. 22 (1996), 349–354.

[12] M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math. 60 (1938), 815–866.

[13] G. N. Raney, *On continued fractions and finite automata*, Math. Ann. 206 (1973), 265–283.

[14] G. Rauzy, *Mots infinis en arithmétique*, Lecture Notes in Computer Science 192 (1985), 165–171.

[15] P. Séébold et F. Mignosi , *Morphismes sturmiens et règles de Rauzy*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux (1993), 221–233.

[16] J. Shallit, *Characteristic words as fixed points of homomorphisms*, University of Waterloo, Department of Computer Science CS-91-72 (1991).

Bruno Parvaix
Faculté des Sciences
Mathématiques
123, av. A. Thomas
87060 Limoges Cedex
e-mail: parvaix@venus.unilim.fr