Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **10** (1998), 237–241

Une caractérisation simple des nombres de Sturm

par Cyril ALLAUZEN

Résumé. Un mot *sturmien* est la discrétisation d'une droite de pente irrationnelle. Un nombre *de Sturm* est la pente d'un mot sturmien qui est invariant par une substitution non triviale.

Ces nombres sont certains irrationnels quadratiques caractérisés par la forme de leur développement en fraction continue. Nous donnons une caractérisation très simple des nombres de Sturm : un nombre irrationnel positif est de Sturm (de première espèce) si et seulement s'il est quadratique et à conjugué négatif.

Abstract. A *Sturmian* word is the discretization of a straight line with an irrational slope. A *Sturmian* number is the slope of a substitution invariant sturmian word.

These numbers are some quadratic irrationals characterized by the form of their continued fraction expansion. We give a very simple characterization of Sturmian numbers : a positive irrational number is Sturmian (of the first kind) if and only if it is quadratic with a negative conjugate.

1. Préliminaires

Un mot binaire est *équilibré* si la différence entre le nombre d'occurrences d'une lettre dans deux de ses facteurs de même longueur est toujours bornée par 1 en valeur absolue.

Un mot *sturmien* est un mot infini, binaire, équilibré et non ultimement périodique. Il existe plusieures caractérisations des mots sturmiens (voir par exemple [1, 2]). Rappelons deux de ces caractérisations, comme suites de coupure et comme mots mécaniques.

1.1. **Suites de coupure.** Dans la grille du premier quadrant formée des droites horizontales et verticales passant par des points de coordonnées entières, on trace une droite $y = \alpha x + \rho$ de pente irrationnelle positive α. On code les intersections de cette droite avec la grille par un 0 lorsque l'on coupe une droite verticale et par un 1 lorsque l'on coupe une droite horizontale. La suite de ces codages constitue la *suite de coupure* de la droite $y = \alpha x + \rho$, notée $K_{\alpha,\rho}$.

Manuscrit reçu le 2 avril 1998.

On peut remarquer que cette définition pose un problème dans le cas où la droite $y = \alpha x + \rho$ passe par un point de coordonnées entières dans le premier quadrant strict. Une telle droite possède alors deux suites de coupure : dans la première, l'unique point de coordonnées entières est codé par 01, dans la seconde, il est codé par 10.

Toute suite de coupure d'une droite de pente irrationnelle est un mot sturmien. Réciproquement, tout mot sturmien est la suite de coupure d'une droite de pente irrationnelle. La pente de cette droite est appelée pente du mot sturmien.

1.2. **Mots mécaniques.** Étant donnés $0 < \alpha < 1$ et $\rho \geq 0$, les mots mécaniques $s_{\alpha,\rho}$ et $s'_{\alpha,\rho}$ de pente α et d'intercept ρ sont définis de la façon suivante :

$$s_{\alpha,\rho}(n) = \lfloor (n+1)\alpha + \rho \rfloor - \lfloor n\alpha + \rho \rfloor$$
$$s'_{\alpha,\rho}(n) = \lceil (n+1)\alpha + \rho \rceil - \lceil n\alpha + \rho \rceil$$

pour $n \geq 1$.

Dans cette définition, $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ représentent les parties entières inférieure et supérieure du réel x, c'est-à-dire, les entiers qui vérifient :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

Tout mot mécanique de pente irrationnelle est un mot sturmien et vice versa.

On peut remarquer que, si la droite $y = \alpha x + \rho$ ne passe par aucun point de coordonnées entières du premier quadrant (strict), alors $s_{\alpha,\rho} = s'_{\alpha,\rho}$. En particulier, $s_{\alpha,0} = s'_{\alpha,0}$.

1.3. **Equivalence.** Étant donnés $\alpha > 0$ et $\rho \geq 0$, il existe σ tel que

$$K_{\alpha,\rho} = s_{\frac{\alpha}{\alpha+1},\sigma}.$$

Réciproquement, étant donnés $0 < \alpha < 1$ et $\rho \geq 0$, il existe σ tel que

$$s_{\alpha,\rho} = K_{\frac{\alpha}{1-\alpha},\sigma}.$$

2. Nombres de Sturm

Un nombre *de Sturm de première espèce* est un irrationnel x dont le développement en fraction continue est de la forme :

$$\begin{array}{ll} [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_n}] \text{ avec } 1 \leq a_0 \leq a_n, & \text{si } x > 1, \\ [0, a_0, \overline{a_1, \ldots, a_n}] \text{ avec } a_0 \leq a_n, & \text{si } 0 < x < 1, \end{array}$$

où $n \geq 1$.

Un nombre *de Sturm de seconde espèce* est un irrationnel x, $0 < x < 1$, dont le développement en fraction continue est de la forme :

$$\begin{array}{ll} [0, 1, a_0, \overline{a_1, \ldots, a_n}] \text{ avec } a_n \geq a_0, & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \\ [0, 1 + a_0, \overline{a_1, \ldots, a_n}] \text{ avec } a_n \geq a_0 \geq 1, & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \end{array}$$

où $n \geq 1$.

La notation $[a_0, \ldots, a_r, \overline{a_{r+1}, \ldots, a_{r+p}}]$ désigne un développement en fraction continue ultimement périodique, c'est-à-dire tel que les quotients partiels vérifient : pour tout $n > r$, $a_{n+p} = a_n$.

Ces nombres ont été introduit dans [3] dans le but de montrer le résultat suivant. La terminologie “nombres de Sturm” est due à [4].

Théorème 1 (Crisp *et al.* [3]). *Le mot sturmien $K_{\alpha,0}$, avec α irrationnel positif, est invariant par une substitution non triviale si et seulement si α est un nombre de Sturm de première espèce.*

Le mot sturmien $s_{\alpha,0}$, avec α irrationnel compris entre 0 et 1, est invariant par une substitution non triviale si et seulement si α est un nombre de Sturm de seconde espèce.

Ce résultat a été en partie généralisé au cas d'intercept non nul dans [4].

Théorème 2 (Parvaix [4]). *Soit ρ un réel positif.*

Une suite de coupure de pente α irrationnelle positive et d'intercept ρ est invariante par une substitution non triviale seulement si α est un nombre de Sturm de première espèce.

Un mot mécanique de pente α, irrationnelle comprise entre 0 et 1, et d'intercept ρ est invariant par une substitution non triviale seulement si α est un nombre de Sturm de seconde espèce.

On peut remarquer qu'un nombre quadratique x est de Sturm de première espèce si et seulement si $\frac{1}{1+1/x}$ est de Sturm de seconde espèce. Cela apparaît clairement sur les développements en fraction continue et cela est dû au fait que

$$s_{\alpha,0} = K_{\beta,0} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}}.$$

3. Une caractérisation

Le but de cette note est d'établir la caractérisation suivante.

Théorème 3. *Un nombre irrationnel positif est de Sturm de première espèce si et seulement s'il est quadratique et à conjugué négatif.*

Un nombre irrationnel de $]0, 1[$ est de Sturm de seconde espèce si et seulement s'il est quadratique et à conjugué n'appartenant pas à $]0, 1[$.

Avant de prouver ce résultat, rappelons d'abord quelques propriétés des fractions continues. Voir par exemple [5] pour plus de détails.

Un réel possède un développement en fraction continue infini si et seulement s'il est irrationnel. Un irrationnel possède un développement en fraction continue ultimement périodique si et seulement s'il est quadratique.

Un irrationnel quadratique x est *réduit* si $x > 1$ et son conjugué $\bar{x}$ vérifie $-1 < \bar{x} < 0$.

Propriétés 1. *Un nombre irrationnel quadratique possède un développement en fraction continue purement périodique si et seulement s'il est réduit.*

Propriétés 2. *Si x est un irrationnel quadratique réduit et si l'on écrit $x = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n}]$, on a alors :*

$$-\frac{1}{\bar{x}} = [\overline{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0}].$$

Preuve du théorème 3. Commençons par établir la caractérisation des nombres de Sturm de première espèce.

Soit x un irrationnel quadratique tel que $x > 0$ et $\bar{x} < 0$, montrons que x est de Sturm (de première espèce). Nous allons distinguer quatre cas distincts selon les positions des nombres x et $\bar{x}$ respectivement par rapport à 1 et -1.

Si $x > 1$ et $-1 < \bar{x} < 0$, alors x est réduit, son développement en fraction continue est donc purement périodique et x est trivialement de Sturm.

Si $0 < x < 1$ et $\bar{x} < -1$, alors $1/x$ est réduit, son développement en fraction continue est donc purement périodique et x est trivialement de Sturm.

Si $x > 1$ et $\bar{x} < -1$, alors $\frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$ est réduit. En effet, $0 < x - \lfloor x \rfloor < 1$ et $\bar{x} - \lfloor x \rfloor < -2$. Il existe donc des entiers $n, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$\frac{1}{x - \lfloor x \rfloor} = [\overline{a_1, \dots, a_n}]$$

$$-(\bar{x} - \lfloor x \rfloor) = [\overline{a_n, \dots, a_1}]$$

On a alors $x = [\lfloor x \rfloor, \overline{a_1, \dots, a_n}]$, il nous reste à montrer que $\lfloor x \rfloor \leq a_n$. Comme $a_n = \lfloor -(\bar{x} - \lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor -\bar{x} \rfloor$ et $-\bar{x} < 1$, on a :

$$\lfloor x \rfloor = a_n - \lfloor -\bar{x} \rfloor < a_n$$

Donc x est de Sturm.

Si $0 < x < 1$ et $-1 < \bar{x} < 0$, posons $y = 1/x$. Alors $y > 1$ et $\bar{y} < -1$, et par ce qui précède, y et donc aussi x sont de Sturm.

Réciproquement, soit $x > 0$ un nombre de Sturm de première espèce. Montrons que $\bar{x} < 0$.

Si $x > 1$, alors $x = [a_0, \overline{a_1, \dots , a_n}]$ avec $a_0 \leq a_n$. Si $a_0 = a_n$, alors x est réduit et $\bar{x} < 0$. Si $a_0 < a_n$, alors

$$\frac{1}{x - a_0} = [\overline{a_1, \dots , a_n}]$$

est réduit, ce qui implique

$$-(\bar{x} - a_0) = [\overline{a_n, \dots , a_1}] \quad \text{et} \quad -\bar{x} = [a_n - a_0, \overline{a_{n-1}, \dots , a_0, a_n}] \ .$$

Comme $a_0 < a_n$, on a $a_n - a_0 > 0$ et $\bar{x} < 0$.

Si $0 < x < 1$, posons $y = 1/x$. On a alors $y > 1$ et y de Sturm (de première espèce). Ce qui nous permet de conclure $\bar{y} < 0$ et $\bar{x} < 0$.

Enfin, la caractérisation des nombres de Sturm de seconde espèce est obtenue en remarquant que x est de Sturm de seconde espèce si et seulement si $\frac{1}{1/x-1}$ est de Sturm de première espèce. □

Remerciements. Je remercie Jean Berstel pour m'avoir suggéré cette étude, pour ses conseils et son soutien, ainsi que le rapporteur de cet article pour ses commentaires judicieux.

Bibliographie

[1] J. Berstel, *Recent results in sturmian words.* Developments in Language Theory II, pp. 13–24, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996.

[2] V. Berthé, *Fréquences des facteurs des suites sturmiennes.* Theoret. Comput. Sci. **165** (1996), 295–309.

[3] D. Crisp, W. Moran, A. Pollington, P. Shuie, *Substitution invariant cutting sequences.* J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 123–137.

[4] B. Parvaix, *Propriétés d'invariance des mots sturmiens.* J. Théor. Nombres Bordeaux **9** (1997), 351–369.

[5] D. Redmond, *Number Theory : An Introduction*, chapter 4. pp. 210–235. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 201. Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.

Cyril Allauzen
Institut Gaspard Monge
Université de Marne-la-Vallée
Champs-sur-Marne, F-77454 Marne-la-Vallée Cedex
E-mail : allauzen@univ-mlv.fr