Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **10** (1998), 321–353

Un arbre de constantes d'approximation analogue à celui de l'équation diophantienne de Markoff

par SERGE PERRINE

RÉSUMÉ. La théorie de Markoff classique, construite autour de l'équation diophantienne $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ donne les constantes d'approximation des nombres irrationnels supérieures à (1/3). Dans le présent article, on explicite une théorie équivalente autour de la valeur (1/4). Elle est intimement liée à l'équation diophantienne $x^2 + y^2 + z^2 = 4xyz - x$ pour laquelle on construit explicitement un arbre associé.

ABSTRACT The classical Markoff theory related to the diophantine equation $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ gives the constants of approximation greater than (1/3) for irrational numbers.

In the present article is explicitly given a similar theory near (1/4). It is intimately connected with the diophantine equation $x^2 + y^2 + z^2 = 4xyz - x$ for which an associated tree is explicitly built.

1. INTRODUCTION

Dans deux articles [4] qu'il a publiés en 1879 et 1880, A.A. Markoff a établi un lien remarquable entre les solutions de l'équation diophantienne :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2 \qquad ((m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3)$$

et les constantes d'approximation de nombres irrationnels supérieures à (1/3), cette valeur étant leur point d'accumulation.

Ces travaux originaux ont été remis en forme par J. W. S. Cassels [1]. Différentes tentatives plus ou moins satisfaisantes ont été faites pour les généraliser ([4]–[7]–[9]).

Dans un précédent document [7], l'auteur du présent article a introduit une notion de (a, r, ε)-théorie de Markoff où $a \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\varepsilon = \pm 1$, et $r \in \mathbb{Q} \cap]-1, +1[$.

Celle-ci donne des constantes d'approximation autour de la valeur $(1/(a + r + 1))$. Ceci a permis la production de différents exemples reliés

Manuscrit reçu le 7 mai 1998.

aux solutions de deux équations diophantiennes où $u \in \mathbb{N}$:

$$(M_1^-) : \quad m^2 - m_1^2 + m_2^2 = (a+r+1)mm_1m_2 \qquad \text{(pour } \varepsilon = +1\text{)}$$
$$(M_1^+) : \quad m^2 + m_1^2 + m_2^2 = (a+r+1)mm_1m_2 - um \qquad \text{(pour } \varepsilon = -1\text{)}$$

Pour le cas où $r = 0$, l'équation (M_1^-) a été complètement résolue dans [6]. On a aussi vu que toute solution de l'équation (M_1^+), avec cette fois $r \in \mathbb{Q} \cap]-1+1[$ quelconque est également solution d'une équation (M_1^+). De sorte que l'étude de cette derniére équation paraît plus générale.

Dans le cas $r = 0$, l'équation (M_1^+) a elle même été complétement résolue dans [3] et [8]. De sorte que l'on peut ici examiner, en sens inverse, comment les solutions d'une telle équation donnent lieu à une structure arborescente équivalente à celle de l'équation originale de la théorie de Markoff ([1]–[5]).

Dans la suite, en application de ces remarques préliminaires, on ne considère pas une (a, r, ε)-théorie particulière comme dans [7]. Celle ci correspondrait d'ailleurs, par les observations déjà faites dans ce précédent travail, à différentes possibilités pour le nombre u.

Au contraire, dans la perspective de [8], on fixe une valeur u et on examine la structure arborescente qui correspond à l'équation (M_1^+) associée.

Pour bien éclaircir la situation et être à même de l'expliciter numériquement, on concentre l'attention sur ce qui résulte de l'équation diophantienne suivante, où $L = a + 1 = 4$, $r = 0$, et $u = 1$:

$$(M_1) : \quad m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 4mm_1m_2 - m$$

Bien entendu, comme décrit à la fin du présent article, certains des résultats obtenus se généralisent aux cas où L, r et u prennent d'autres valeurs.

2. Notations et énoncé des résultats

2.1. **Définitions.** Les notations sont identiques à celles utilisées dans [7]. Les définitions générales sont celles de [1].

A toute suite $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ où $\forall\, i = 0, \ldots, n$, $a_i \in \mathbb{N}^*$

On associe la matrice :

$$M_S = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & K_1 \\ m - K_2 & K_1 - I \end{bmatrix}$$

et le nombre :

$$\varepsilon(S) = \varepsilon = \det M_S = (-1)^{n+1} = K_1K_2 - mI.$$

On fait la convention que $M_\emptyset$ est la matrice unité.

On associe à S sa suite réciproque $S^* = (a_n, \ldots, a_1, a_0)$ et la matrice correspondante M_{S^*} transposée de M_S.

Ceci permet de définir le nombre algébrique $\theta_a(S)$ de degré 2, dit nombre de Markoff de période (S^*, a), dont le développement en fraction continue s'écrit, en mettant en évidence sa période :

$$\theta_a(S) = [0, \underline{S^*, a}]$$

L'expression algébrique de ce nombre est facilement calculable.

En notant : $\Delta_a(S) = (a+r+1)^2 m^2 + 4\varepsilon$

Et en définissant l'écart d'antiréciprocité de S : $r = (K_1 - K_2)/m$

Elle s'écrit :

$$\theta_a(S) = (K_1 + K_2 - m(a+1) + \sqrt{(\Delta_a(S))}/2m.$$

De sorte que ce nombre est également associé à la forme de Markoff définie par S et a :

$$\begin{aligned} F_\theta(x,y) &= x^2 + ((m(a+1) - K_1 - K_2)/m)xy + ((I - (a+1)K_1)/m)y^2 \\ &= (x - \theta_a(S)y)(x - \overline{\theta_a(S)}y) \end{aligned}$$

où l'on note :

$$\overline{\theta_a(S)} = -[\underline{a, S}] = [-(a+1), 1, a_0 - 1, \underline{a_1, \dots, a_n, a, a_0}]$$

C'est l'algébrique de degré 2 conjugué du nombre $\theta_a(S)$

On pose aussi :

$$f_\theta(x,y) = mF_\theta(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$$

C'est une forme quadratique binaire entière dont la constante de Markoff s'écrit comme la constante d'approximation de la racine $\theta_a(S)$ qui lui est associée :

$$C(f_\theta) = C(\theta_a(S)) = m_a(S)/\sqrt{(\Delta_a(S)}.$$

Le nombre $m_a(S)$ est le minimum arithmétique de la forme f_θ, c'est à dire la valeur absolue minimale des entiers représentés par $f_\theta(x,y)$ avec $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$. Par construction, on a bien entendu $0 < m_a(S) \leq m$. Et lorsque la situation est simple, comme par exemple dans le cas de la théorie de Markoff classique, on a seulement :

$$m_a(S) = m.$$

2.2. **Propriétés générales.** On a vu dans [7] comment se généralisent les propriétés utilisées par Cassels [1] dans sa présentation de la théorie de Markoff. Les relations essentielles sont rappelées dans ce paragraphe, avec d'abord :

$$\begin{aligned} &(F_1): \quad F_\theta(K_1, m) = -\varepsilon \\ &(F_2): \quad F_\theta(K_2 - (a+1)m, m) = -\varepsilon \end{aligned}$$

Ces deux relations se relient aisément par le groupe des rotations hyperboliques associées à F_θ, groupe déterminable avec :

$$g = \begin{bmatrix} K_1 & (a+1)K_1 - I \\ m & (a+1)m - K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S^*} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, si A est un nombre représenté par F_θ :

$$(F_3) : \qquad F_\theta(k_1, m_1) = A.$$

Et si l'on introduit $\varepsilon_1 = \pm 1$ et m_2 tels que :

$$(a_1) : \qquad \varepsilon_1 m_2 = K_1 m_1 - m k_1.$$

On trouve aussi les relations :

$$\begin{aligned} (a_3) : &\qquad \varepsilon_1 m_1 = m k_2 - K_2 m_2 \\ (a_5) : &\qquad -\varepsilon_1 A m = (a+1) m_1 m_2 + k_1 m_2 - k_2 m_1 \end{aligned}$$

où l'on pose, ce qui définit ε_2 puis k_2 :

$$\begin{aligned} (\varepsilon) : &\qquad \varepsilon_2 = -\varepsilon_1 \varepsilon \\ (a_2) : &\qquad \varepsilon_1 k_2 = I m_1 - K_2 k_1 \end{aligned}$$

Une vérification complémentaire montre aussi que l'on a :

$$(a_4) : \qquad \varepsilon_2 k_1 = K_1 k_2 - I m_2$$

En posant alors $z = mx - K_1 y$, on peut considérer la forme quadratique :

$$(\phi) : \qquad \phi_\theta(z, y) = m^2 F_\theta(x, y) = z^2 + [(a+1)m + K_1 - K_2] zy - \varepsilon y^2$$

Elle vérifie :

$$\begin{aligned} \phi_\theta(z, y) &= -\varepsilon \phi_\theta(y, -\varepsilon z) \\ &= \phi_\theta(-z, y - [(a+1)m + K_1 - K_2]\varepsilon z) \\ &= \phi_\theta(z + [(a+1)m + K_1 - K_2] y, -y) \end{aligned}$$

Avec la relation (a_1), on a alors par cette dernière expression :

$$(M_1^{\pm}) : \qquad (-\varepsilon_1 A) m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (a + r + 1) m m_1 m_2$$

Dans le cas où l'on peut écrire $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ et $A = -((m+u)/m)$, il reste ainsi

$$(M_1^{+}) : \qquad m^2 + m_1^2 + m_2^2 = (a + r + 1) m m_1 m_2 - um \qquad (\varepsilon = -1)$$

A partir de la relation (F_1), on voit que les calculs précédents s'avèrent particulièrement intéressants lorsque $k_1/m_1 = [0, a_n, \ldots, a_{i+1}]$ est une réduite du nombre rationnel $K_1/m = [0, a_n, \ldots, a_0]$.

On peut alors convenir d'écrire la suite S^* sous la forme décomposée suivante, où X_1 et X_2 suites d'entiers positifs et $b \in \mathbb{N}^*$:

$$S^* = (X_1, b, X_2)$$

Et si l'on note alors :

$$M_{X_1} = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 - k_{12} \\ k_1 & k_1 - I_1 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_1 = \det M_{X_1}$$

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} m_2 & m_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - I_2 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_2 = \det M_{X_2}$$

On peut exprimer M_{S^*} en fonction de ces deux matrices. On retrouve ainsi des relations comparables à (a_1) (a_2) (a_3) (a_4).

Mais on trouve aussi :

$$(C_1) : \qquad m = (b+1)m_1m_2 + k_{21}m_1 - k_{12}m_2$$

Cette dernière égalité diffère de (a_5) même si elle lui ressemble beaucoup.

De façon générale, si l'on veut indiquer que l'on a :

$$X_1 = (a_n, \dots, a_{i+1}) \qquad \varepsilon_1 = (-1)^{n-i}$$
$$X_2 = (a_{i-1}, \dots, a_0) \qquad \varepsilon_2 = (-1)^{i}$$

On note, avec $a_i = b$:

$$S^* = (\overrightarrow{a_n, \dots, a_{i+1}}, b, \overleftarrow{a_{i-1}, \dots, a_0})$$

Une telle expression donne les développements en fraction continue suivants, découlant des expressions M_{X_1} et M_{X_2} :

$$\begin{aligned} m_1/k_1 &= [a_n, \dots, a_{i+1}] \\ m_2/k_{21} &= [a_{i-1}, \dots, a_0] \\ m_2/(m_2 - k_2) &= [a_0, \dots, a_{i-1}] \\ m_1/(m_1 - k_{12}) &= [a_{i+1}, \dots, a_n] \end{aligned}$$

La suite S^* même donne quant à elle :

$$\begin{aligned} m/(m - K_2) &= [a_0, \dots, a_n] = [S] \\ m/K_1 &= [a_n, \dots, a_0] = [S^*] \end{aligned}$$

Avec le fait que l'écart d'antiréciprocité r permette d'écrire :

$$(R) : \qquad r + 1 = (1/[S]) + (1/[S^*]) = (m - K_2 + K_1)/m$$

En particulier, on dit que la suite S est antiréciproque, si et seulement si $r = 0$, c'est à dire $K_1 = K_2$.

Cette propriété s'interprète bien pour :

$$\Sigma = S^* = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$$

En convenant de noter :

$$\hat{\Sigma} = \begin{cases} (1, a_n - 1, a_{n-1}, \dots, a_0) & \text{si } a_n \neq 1 \\ (a_{n-1} + 1, a_{n-2}, \dots, a_0) & \text{si } a_n = 1 \end{cases}$$

On trouve alors sans difficulté :

$$M_{\hat{\Sigma}} = \begin{bmatrix} m & m - K_2 \\ m - K_1 & m - K_1 - K_2 + I \end{bmatrix}$$

De sorte que l'antiréciprocité de S (ou de S^*, ce qui est équivalent) est équivalente à la réciprocité de $\widehat{S^*}$ (ou de $\hat{S}$, ce qui est équivalent).

Ceci conduit à introduire l'écart de réciprocité p de la suite S avec :

$$(P): \qquad p + 1 = (1/[\hat{\Sigma}]) + (1/[(\hat{\Sigma})^*]) = (2m - K_1 - K_2)/m$$

On voit que $p = 0$ si et seulement si S est réciproque.

L'expression donnée pour p peut aussi être écrite en convenant de noter :

$$\check{\Sigma} = \begin{cases} (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 - 1, 1) & \text{si } a_0 \neq 1 \\ (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 + 1) & \text{si } a_0 = 1 \end{cases}$$

On a en effet : $(\hat{\Sigma})^* = (\check{\Sigma}^*)$.

Les écarts de réciprocité des deux suites X_1 et X_2 sont importants pour la suite, et sont directement reliés aux deux nombres suivants :

$$(T_1): \qquad T_1 = k_1 + k_{12} - m_1$$

$$(T_2): \qquad T_2 = k_2 + k_{21} - m_2$$

Avec ceux-ci, en combinant les relations (a_5) et (C_1), on trouve :

$$m_2T_1 - m_1T_2 = m(-\varepsilon_1 A - 1) + (b - a)m_1m_2$$

De sorte que dans le cas où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $A = -((m+u)/m)$, $a = b$, il reste seulement :

$$(u): \qquad m_2T_1 - m_1T_2 = u$$

Dans le cas de la théorie de Markoff classique (cf [1]–[5]), on a en réalité $u = 0$, et comme alors $pgcd(m_1, m_2) = 1$ (cf [1] p. 28), il vient aussi $T_1 = T_2 = 0$. Ces égalités permettent le raisonnement original fait par A. A. Markoff dans la seconde partie de [5].

Dans des cas plus généraux, on a montré dans [7] que l'on peut bien avoir $u \neq 0$. De sorte que le raisonnement original de Markoff n'est pas transposable directement. Mais on va voir maintenant que, malgré tout, beaucoup se conserve.

2.3. **Les résultats.** On considère ici l'équation diophantienne suivante, à la base de la théorie de Markoff nouvelle que l'on va présenter :

$$(M_1): \qquad m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 4mm_1m_2 - m$$

La résolution complète de cette équation a été traitée dans [3] et [8]. Il en résulte l'existence d'une solution fondamentale unique $(1, 1, 1)$ à partir de laquelle tous les triplets de solutions (m, m_1, m_2) peuvent être construits par le procédé donné dans [8].

Ceci permet la production d'un arbre de formes de Markoff F_θ.

On considère maintenant les formes quadratiques indéfinies plus générales :

$$f(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \in \mathbb{R}[x,y]$$

Leur minimum arithmétique est :

$$m(f) = \inf\{|f(x,y)| : (x,y) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}\}$$

Leur discriminant vaut :

$$\Delta(f) = \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Sur celles-ci on fait agir le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, en disant que $f(x,y)$ et $f'(x,y)$ sont équivalentes si et seulement s'il existe des entiers a,b,c,d dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{cases} f(ax+by, cx+dy) = f(x,y) \\ ad - bc = \pm 1 \end{cases}$$

On peut alors énoncer (comparer à [1] p. 39) :

Théorème 1. a) *Pour toutes les formes $f(x,y)$ équivalentes à un multiple des formes de Markoff F_θ, on a :*

$$m(f) > \sqrt{\Delta(f)}/4$$

b) *Il existe un nombre non dénombrable de formes, non deux à deux équivalentes à un multiple l'une de l'autre, telles que :*

$$m(f) = \sqrt{\Delta(f)}/4.$$

Ce résultat concerne en fait la constante de Markoff de f dans des cas où elle est supérieure à $(1/4)$:

$$C(f) = m(f)/\sqrt{\Delta(f)}$$

Considérons aussi les constantes d'approximation des nombres réels irrationnels θ :

$$C(\theta) = \liminf_{q} \|q\theta\|$$

L'action du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ se traduit en disant que θ et θ' sont équivalents si et seulement s'il existe des entiers a,b,c,d, dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{cases} (a\theta' + b)/(c\theta' + d) = \theta \\ ad - bc = \pm 1 \end{cases}$$

On a alors (comparer à [1], p. 41) :

Théorème 2.

a) *Si θ est équivalent à une racine de l'équation $F_\theta(x,1) = 0$ où F_θ associée au triplet (m, m_1, m_2) de solutions de (M_1), alors :*

$$C(\theta) = (m/\sqrt{(16m^2-4)}) > (1/4)$$

et il existe une infinité de valeurs θ telles que : $q\|q\theta\| < C(\theta)$. Pour $m > 2$ les deux racines de $F_\theta(x,1) = 0$ ne sont pas équivalentes entres elles.

b) *Il existe un nombre non dénombrable d'irrationnels θ non équivalents tels que :*

$$C(\theta) = (1/4).$$

Par contre, à la différence de la théorie de Markoff classique, les constantes supérieures à $(1/4)$ ne peuvent être caractérisées au moyen des formes F_θ. La situation est en effet beaucoup plus riche qu'au dessus de $(1/3)$. En particulier les formes F_θ n'atteignent plus positivement et négativement leur minimum arithmétique :

Théorème 3.

a) *Pour toute forme F_θ construite à partir d'un triplet de solutions (m, m_1, m_2) de l'équation (M_1) on a :*

$$m(F_\theta) = 1.$$

L'équation diophantienne $F_\theta(x,y) = 1$ $((x,y) \in \mathbb{Z}^2)$ admet une infinité de solutions.

b) *Par contre l'équation diophantienne $F_\theta(x,y) = -1$ $((x,y) \in \mathbb{Z}^2)$ n'admet aucune solution.*

Il en résulte en particulier que le théorème d'isolation de Remak et Rogers ([1] p. 25) ne s'applique plus, empêchant une généralisation directe des méthodes de [1].

3. La théorie de Markoff nouvelle

3.1. **L'arbre complet des solutions de l'équation (M_1).** A partir de la solution fondamentale $(1,1,1)$, tous les triplets de solutions de l'équation diophantienne (M_1) sont donnés en utilisant les trois transformations :

$$\begin{cases} X : (m, m_1, m_2) \to (m^X, m_1^X, m_2^X) = (4m_1m_2 - m - 1, m_1, m_2) \\ Y : (m, m_1, m_2) \to (m^Y, m_1^Y, m_2^Y) = (m, 4mm_2 - m_1, m_2) \\ Z : (m, m_1, m_2) \to (m^Z, m_1^Z, m_2^Z) = (m, m_1, 4mm_1 - m_2) \end{cases}$$

On trouve ainsi l'arbre complet des triplets de solutions de l'équation (M_1).

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
\underline{\text{niveau 0 :}} & & & & & & (1,1,1) \arrow[dllll, "X"'] \arrow[d, "Y"'] \arrow[drrrr, "Z"] & & & & & \\
\underline{\text{niveau 1 :}} & & (2,1,1) \arrow[dl, "Y"'] \arrow[dr, "Z"] & & & & (1,3,1) \arrow[dl, "X"'] \arrow[dr, "Z"] & & & & (1,1,3) \arrow[dl, "X"'] \arrow[dr, "Y"] & \\
\underline{\text{niveau 3 :}} & (2,7,1) & & (2,7,1) & & (10,3,1) & & (1,3,11) & & (10,1,3) & & (1,11,3)
\end{tikzcd}$$

figure 1

Au niveau 0 de la solution fondamentale, cet arbre possède trois branches étiquetées par les lettres X, Y ou Z.

Ensuite, il n'y a aux autres niveaux que deux branches liées au fait que l'on a :

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = \text{identité}$$

Le niveau d'un triplet est ainsi égal au nombre de lettres X, Y, ou Z composant le mot décrivant le chemin reliant ce triplet à la solution fondamentale.

Ce mot en X, Y, ou Z désignant le chemin, détermine également la transformation composée de X, Y, et Z envoyant la solution fondamentale sur le triplet extrémité du chemin considéré.

Par exemple, sur la figure 1 :

$$XY : (1,1,1) \to (10,3,1)$$

Cette transformation permet à son tour d'associer à chaque triplet différents nombres k_1, k_2, k_{12}, k_{21} vérifiant les relations (a_1) (a_3) et (a_5) vues avant, avec de plus les conditions suivantes, cohérentes avec l'équation dont on traite :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 = -\varepsilon \\ K_1 = K_2 \\ u = 1 \qquad\qquad\qquad \text{soit } A = -((m+1)/m) \end{cases}$$

Il est en effet très facile dans ces conditions d'établir que l'on a:

Lemme 1. *Les relations données par la transformation Y peuvent être écrites sous la forme suivante, telle que : $\varepsilon_1^Y = \varepsilon_2^Y = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$:*

$$\begin{cases} m^Y = m \\ K_1^Y = K_2^Y = m - K_1 = m - K_2 \\ I^Y = m - K_1 - K_2 + I \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1^Y = 4mm_2 - m_1 \\ k_1^Y = 4m_2m - 4m_2K_1 - m_1 + k_1 \\ k_{12}^Y = 4mm_2 - 5m_1 + k_{12} - 4mk_{21} \\ I_1^Y = 4mm_2 - 4mk_2 - 4K_1m_2 + 4K_1k_{21} - 5m_1 + 5k_1 + k_{12} - I_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2^Y = m_2 \\ k_2^Y = 5m_2 - k_2 \\ k_{21}^Y = -3m_2 - k_{21} \\ I_2^Y = -5k_{21} + I_2 - 15m_2 + 3k_2 \end{cases}$$

On a de plus avec ces expressions :

$$\begin{cases} T_1^Y = T_1 - 4mT_2 \\ T_2^Y = -T_2 \end{cases}$$

Lemme 2. *Les relations données par la transformation Z peuvent être écrites sous la forme suivante, telle que $\varepsilon_1^Z = \varepsilon_2^Z = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$:*

$$\begin{cases} m^Z = m \\ K_1^Z = K_2^Z = m - K_1 = m - K_2 \\ I^Z = m - K_1 - K_2 + I \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1^Z = m_1 \\ k_1^Z = -3m_1 - k_1 \\ k_{12}^Z = 5m_1 - k_{12} \\ I_1^Z = -5k_1 + I_1 - 15m_1 + 3k_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2^Z = 4mm_1 - m_2 \\ k_2^Z = 4mm_1 - 4m_1K_2 - m_2 + k_2 \\ k_{21}^Z = 4mm_1 + 3m_2 + k_{21} - 4mk_{12} \\ I_2^Z = 4mm_1 - 4mk_{12} - 4m_1K_1 + 4K_1k_{12} + 3m_2 - 3k_2 + k_{21} - I_2 \end{cases}$$

On de plus avec ces expressions :

$$\begin{cases} T_1^Z = -T_1 \\ T_2^Z = T_2 - 4mT_1 \end{cases}$$

Lemme 3. *Les relations données par la transformation X peuvent être écrites sous la forme suivante, telle que $\varepsilon_1^X = \varepsilon_2^X = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$:*

$$\begin{cases} m^X = 4m_1m_2 - m - 1 \\ K_1^X = K_2^X = k_2k_{12} - I_1m_2 \\ I^X = I_2k_{12} + 4k_2k_{12} - 4m_2I_1 - I_1k_{21} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1^X = m_1 \\ k_1^X = k_{12} \\ k_{12}^X = k_1 \\ I_1^X = I_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2^X = m_2 \\ k_2^X = k_{21} + 4m_2 \\ k_{21}^X = k_2 - 4m_2 \\ I_2^X = I_2 + 4k_2 - 16m_2 - 4k_{21} \end{cases}$$

On a de plus avec ces expressions :

$$\begin{cases} T_1^X = T_1 \\ T_2^X = T_2 \end{cases}$$

Les expressions que l'on vient de donner sont par certains aspects insatisfaisantes ($k_{21}^Y < 0$ ou $k_1^Z < 0$), mais elles suffisent pour la suite. Leur lacune résulte de la méthode les démontrant, qui consiste seulement à comparer des équations de Bezout issues de (a_1), (a_3) et (a_5), avant et après transformation par X, Y ou Z.

Par exemple, en considérant (a_3^Y) :

$$\varepsilon_2^Y m_1^Y = m^Y k_2^Y - K_2^Y m_2^Y$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$m_2 = 4mm_2 - k_2^Y m + K_2^Y m_2 \qquad (\text{avec } \varepsilon_2^Y = \varepsilon_2 = 1)$$

En comparant à (a_3), on est conduit à poser, avec $\lambda \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} k_2^Y &= 4m_2 - k_2 + \lambda m_2 \\ K_2^Y &= \lambda m - K_2 \end{aligned}$$

En se limitant à $\lambda = 1$ de façon à avoir $0 \leq K_2^Y \leq m$, on trouve certaines des expressions du lemme 1. Les autres égalités s'établissent de même.

Il suffit alors, pour les triplets du niveau 1 de considérer la table 1 suivante.

On en déduit par récurrence des valeurs possibles pour tous les paramètres k_1, k_2, k_{12}, k_{21}, I_1, I_2, $K_1 = K_2$, I, à chaque niveau de l'arbre.

Chemin	Triplet	$K_1 = K_2$	I	k_1	k_2	k_{21}	k_{12}
X	$(2,1,1)$	1	1	0	1	0	2
Y	$(1,3,1)$	1	2	2	4	-3	2
Z	$(1,1,3)$	1	2	-2	4	1	4

table 1 : Paramètres au niveau de l'arbre

3.2. **Les suites associées et leur classement.** Les valeurs $K_1 = K_2$ étant identifiées par ce qui précède, il est facile d'en déduire les suites S possibles, grâce aux développements en fraction continue de $m/K_1 = [S^*]$ et $m/(m - K_2) = [S]$.

Ceci permet, niveau par niveau, et en fonction du chemin considéré de donner la suite S correspondante.

On donne ci-après, dans la table 2, les suites S^* obtenues au niveau 2 :

Chemin	Triplet	$K_1 = K_2$	I	S^*
YX	$(2,7,1)$	1	1	(2)
ZX	$(2,1,7)$	1	1	(2)
XY	$(10,3,1)$	7	5	$(1,2,3)$
ZY	$(1,3,11)$	1	2	(1)
XZ	$(10,1,3)$	3	1	$(3,2,1)$
YZ	$(1,11,3)$	1	2	(1)

table 2 : Suite S^* du niveau 2

On observe alors aisément que, dans la colonne des suites S^*, certaines suites se reproduisent à différents niveaux.

Par exemple la suite $S^* = (2)$ apparaît au niveau 1, associée au triplet $(2,1,1)$. La table 2 montre qu'elle apparaît au niveau 2 associée aux triplets $(2,7,1)$ et $(2,1,7)$. Au niveau 3, elle est associée à $(2,7,55)$ et $(2,55,7)$, au niveau 4 à $(2,433,55)$ et $(2,55,433)$, etc...

Ceci permet de grouper les triplets de l'arbre de la figure 1 en classes d'équivalence : deux triplets sont dans la même classe si et seulement si les suites associées S^* sont identiques.

Ceci implique en particulier que les valeurs m, K_1, et K_2 sont les mêmes pour tous les triplets d'une même classe. Pour tous ces triplets, les valeurs m_1 et m_2 varient, mais restent liées par :

$$(M_1) : \qquad m_1^2 - (4m)m_1m_2 + m_2^2 = -m^2 - m$$

Cette relation peut également être écrite sous la forme :

$$\phi_\theta(m_1, m_2) = -m^2 - m$$

Elle conduit à considérer le groupe des rotations hyperboliques associé à la forme ϕ_θ, groupe composé de matrices qui s'écrivent :

$$\pm \begin{bmatrix} 4m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Avec ce groupe on a de façon évidente :

Propriété 1. *Deux triplets (m, m_1, m_2) et (m', m'_1, m'_2) sont dans la même classe d'équivalence si et seulement si on a les deux conditions suivantes :*

$$(1) : \qquad m' = m$$

$$(2) : \qquad \begin{bmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \qquad \textit{avec } t \in \mathbb{Z}$$

Dans ce cas les formes de Markoff associées sont identiques.

Mais au delà de cette propriété, il est facile de voir que toute classe d'équivalence possède deux triplets sur chaque niveau de l'arbre strictement plus grand qu'un niveau minimum où l'on ne trouve qu'un seul triplet. On dit que cet unique triplet, que l'on peut prendre comme représentatif de la classe d'équivalence considérée, est un triplet de Cassels. Aux niveaux inférieurs à ce niveau minimum, la classe d'équivalence ne possède aucun représentant.

Il est alors facile d'établir la caractérisation suivante des triplets de Cassels :

Propriété 2. *Pour tout triplet de solutions de l'équation (M_1) de niveau non nul, on a équivalence des propriétés suivantes :*

(1): (m, m_1, m_2) *est un triplet de Cassels*
(2): *le triplet (m, m_1, m_2) est donné par une transformation X à partir d'un triplet de niveau inférieur.*
(3): $m = \max(m, m_1, m_2)$.

Ainsi, un décompte précis par niveau des triplets de Cassels peut être fait :

• au niveau 0 :
On ne trouve que le triplet (1,1,1) qui est de Cassels.

• au niveau 1 :
On trouve deux triplets $(1, 3, 1)$ et $(1, 1, 3)$ qui sont dans la classe de $(1, 1, 1)$, ainsi que le triplet de Cassels $(2, 1, 1)$

• au niveau 2 :

On trouve deux triplets $(1,3,11)$ et $(1,11,3)$ dans la classe de $(1,1,1)$. On trouve deux triplets $(2,7,1)$ et $(2,1,7)$ dans la classe de $(2,1,1)$. On trouve enfin deux triplets de Cassels $(10,3,1)$ et $(10,1,3)$.

Ainsi de suite par récurrence.

• au niveau n :

On trouve un total de $3\times 2^{n-1}$ triplets dont :

2 se déduisent du triplet de Cassels de niveau 0

2 se déduisent du triplet de Cassels de niveau 1

2×2 se déduisent des 2 triplets de Cassels de niveau 2

etc...

$2\times 2^{n-2}$ se déduisent de 2^{n-2} triplets de Cassels de niveau $n-1$.

Il reste donc au niveau n le nombre de triplets de Cassels suivant :

$$3\cdot 2^{n-1}-2(1+1+\cdots+2^{n-2})=2^{n-1}$$

Ces triplets peuvent d'ailleurs être groupés par paires en utilisant la transformation :

$$P: \qquad (m,m_1,m_2)\to(m,m_2,m_1)$$

Elle conserve le niveau.

De la sorte, au delà du niveau 2, on identifie dans chaque paire un unique triplet vérifiant $m>m_1>m_2$.

On dit qu'il s'agit d'un triplet de Cohn, sachant qu'aux niveaux 0 et 1, les triplets $(1,1,1)$ et $(2,1,1)$ sont également considérés comme triplets de Cohn.

Le raisonnement que l'on vient de faire donne :

Propriété 3. *A chaque niveau $n\geq 2$ de l'arbre des solutions de l'équation (M_1) on trouve 2^{n-1} triplets de Cassels et 2^{n-2} triplets de Cohn.*

Aux niveaux 0 et 1, on ne trouve respectivement qu'un triplet de Cassels et qu'un triplet de Cohn.

Par ailleurs, comme on avait caractérisé les triplets de Cassels, on peut caractériser ceux de Cohn de façon évidente :

Propriété 4. *Pour tout triplet de solution de l'équation (M_1) de niveau supérieur ou égal à 2, on a équivalence des propriétés suivantes :*

(1) : *(m,m_1,m_2) est un triplet de Cohn*

(2) : *le triplet (m,m_1,m_2) est donné par une transformation XY à partir d'un triplet de niveau inférieur.*

(3) : $m>m_1>m_2$

En fait, de façon générale, si un triplet de Cohn (m,m_1,m_2) correspond à la suite S^*, il est également de Cassels. Il définit par ailleurs un autre triplet de Cassels $(m,m_2,m_1)=P(m,m_1,m_2)$. Ce dernier correspond quant à lui à la suite S, et est donné par une transformation XZ à partir d'un triplet de niveau inférieur.

Aux niveaux 0 ou 1, on a $S = S^*$, mais cette situation ne se reproduit pas aux niveaux supérieurs.

3.3. **L'arbre des triplets de Cohn.** On va maintenant voir qu'il est possible de définir un nouvel arbre avec les triplets de Cohn.

Pour cela on considère d'abord la figure suivante :

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d, "Y"'] & & {} \arrow[d, "Z"] \\
\underline{\text{niveau n-1 :}} & m^X, m_1, m_2 \arrow[rr, "P"] \arrow[d, shift right, "X"'] & & m^X, m_2, m_1 \arrow[d, "Y"] \\
\underline{\text{niveau n :}} & m, m_1, m_2 \arrow[u, shift right, "X"'] \arrow[drr, "G"'] & & m^X, 4m^X m_1 - m_2, m_1 \arrow[d, "X"] \\
\underline{\text{niveau n+1 :}} & & & (4(4m^X m_1 - m_2)m_1 - m^X - u, 4m^x m_1 - m_2, m_1)
\end{tikzcd}$$

figure 2

A partir de tout triplet de Cohn (m, m_1, m_2) de niveau n, ceci définit, au niveau $n+1$ un triplet qui est de Cohn par la propriété 4. Il est appelé le transformé à gauche de (m, m_1, m_2).

On le note aussi (m^G, m_1^G, m_2^G).

Par construction on voit que l'on a : $m_2^G = m_1$

On peut d'autre part considérer deux figures. La plus simple est :

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d, "Z"'] & \\
\underline{\text{niveau n-2}} & (m^X, 4m^X m_2 - m_1, m_2) \arrow[d, shift right, "Y"'] \arrow[dr, "X"] & \\
\underline{\text{niveau n-1}} & (m^X, m_1, m_2) \arrow[u, shift right, "Y"'] \arrow[d, shift right, "X"'] & (m^{XX}, 4m^X m_2 - m_1, m_2) \arrow[d, "Y"'] \\
\underline{\text{niveau n}} & (m, m_1, m_2) \arrow[u, shift right, "X"'] \arrow[dr] & (m^{XX}, 4m_2(m^{XX} - m^X) + m_1, m_2) \arrow[d, "X"'] \\
\underline{\text{niveau n+1}} & & (m^{XXX}, 4m_2(m^{XX} - m^X) + m_1, m_2) = (\nu, \nu_1, m_2)
\end{tikzcd}$$

figure 3a

Une variante plus générale est la figure 3 donnée après.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & Z \arrow[d] & \\
\underline{\text{niveau n-t}} : & (\mu', \mu'_1, m_2) \arrow[d, shift right, "X \text{ ou } Y"'] \arrow[dr, "\substack{\text{respectivement} \\ X \text{ ou } Y}"] & \\
\underline{\text{niveau n-t+1}} : & (\mu, \mu_1, m_2) \arrow[u, shift right] & (\mu'', \mu''_1, m_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & (m^X, m_1^Y, m_2) \arrow[d, shift right, "Y"'] & \vdots \\
\underline{\text{niveau n-1}} : & (m^X, m_1, m_2) \arrow[u, shift right, "Y"'] \arrow[d, shift right, "X"'] & (\nu^X, \nu_1^Y, m_2) \arrow[d, "Y"'] \\
\underline{\text{niveau n}} : & (m, m_1, m_2) \arrow[u, shift right, "X"'] \arrow[dr, "D"'] & (\nu^X, \nu_1, m_2) \arrow[d, "X"'] \\
\underline{\text{niveau n+1}} : & & (\nu, \nu_1, m_2)
\end{tikzcd}
$$

figure 3

Dans cette dernière figure, on ne voit apparaître sur la première colonne que des transformations X ou Y qui alternent, jusqu'au niveau $n-t$ où apparaît une transformation Z. On redescend sur la seconde colonne avec des transformations X ou Y encore alternant, et ceci jusqu'au niveau $n+1$. Cette figure n'est considérée que si $t \geq 2$.

Pour $t = 2$, on retrouve la figure (3a), mais celle ci présente la particularité que (m, m_1, m_2) est alors un transformé à gauche. Ceci se voit facilement en comparant à la figure 2, du fait de la position de la transformation Z.

Au contraire, pour $t > 2$, le triplet (m, m_1, m_2) n'est pas un transformé à gauche, et ceci pour les mêmes raisons.

Au moyen de ces deux figures, tout triplet de Cohn (m, m_1, m_2) de niveau $n \geq 3$, permet grâce à la propriété 4, la définition d'un autre triplet de Cohn (ν, ν_1, m_2) de niveau $n+1$.

Il est appelé le transformé à droite de (m, m_1, m_2).

On le note aussi (m^D, m_1^D, m_2^D).

Par construction même, on voit que l'on a : $m_2^D = m_2$.

En complétant les figures précédentes par la suivante :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\underline{\text{niveau 0 :}} & & (1,1,1) \arrow[d] & \\
\underline{\text{niveau 1 :}} & & (2,1,1) \arrow[d] & \\
\underline{\text{niveau 2 :}} & & (10,3,1) \arrow[dl, "G"'] \arrow[dr, "D"] & \\
\underline{\text{niveau 3 :}} & (130,11,3) & & (25,7,1)
\end{tikzcd}$$

figure 4

On voit que les triplets de Cohn s'organisent en un arbre possédant deux branches à chaque niveau supérieur ou égal à 2. La propriété 3 garantit que cet arbre contient à chaque niveau tous les triplets de Cohn du même niveau, situés dans l'arbre complet défini avant.

On dit que l'arbre que l'on vient de construire est l'arbre des triplets de Cohn.

En fait, on peut systématiser la construction précédente en raisonnant sur les mots en X, Y ou Z décrivant tout chemin d'origine $(1,1,1)$ dans l'arbre complet.

On utilise la propriété : $X^2 = Y^2 = Z^2 =$ identité.

De sorte que ces mots sont des mots réduits : chaque lettre ne peut être encadrée que de deux lettres différentes (une seule pour les lettres extrêmes). Ces mots commencent pour les triplets de Cohn par un préfixe XY du fait de la propriété 4.

Sur les 2^{n-2} mots de longueur n, on peut appliquer alors les deux transformations suivantes :

A gauche :

En écrivant le mot considéré sous la forme XM, on fabrique M' avec M en permutant Y et Z. Puis on définit XYM' comme étant le transformé à gauche de XM. Il est évident que XYM' est de longueur $n+1$ et commence par le préfixe XYZ. Il est aussi facile de voir que la transformation $XM \rightarrow XYM'$ est injective. Elle donne donc 2^{n-2} mots de longueur $n+1$.

A droite :

En écrivant le mot considéré sous la forme NM, où N ne contient que des lettres X et Y, et où M commence par Z ou est éventuellement vide, on fabrique N' avec N en permutant X et Y. Puis on définit $XN'M$ comme étant le transformé à droite de NM. Il est évident que $XN'M$ est de longueur $n+1$ et commence par le préfixe XYX. Il est aussi facile de voir que la transformation $NM \rightarrow XN'M$ est injective. Elle donne donc également 2^{n-2} mots de longueur $n+1$, mais différents de ceux trouvés à gauche à cause des préfixes XYX et XYZ différents.

Au total, en combinant les deux transformations précédentes, on obtient 2^{n-1} mots de longueur $n+1$. Il est facile de voir que ces transformations recouvrent bien les figures 2 et 3. Avec la propriété 3, on est donc certain d'organiser tous les triplets de Cohn en un arbre grâce à ces constructions.

Par un procédé comparable, mais prenant également en compte les mots commençant par XZ, on pourrait construire un arbre des triplets de Cassels. On n'insiste pas sur ce point car l'utilisation de la transformation P suffit à ce qu'on veut faire dans la suite.

On remarquera que la même construction que ci-dessus est possible pour la théorie de Markoff classique. Mais elle ne donne pas l'arbre utilisé dans [1].

3.4. **Structure des suites associées.** En se limitant ici aux suites S^* données par l'arbre des triplets de Cohn, sachant que par réciprocité cette propriété se généralise aux suites S^* données par l'arbre des triplets de Cassels, on peut énoncer :

Propriété 5. *Toute suite S^* associée à un triplet de Cohn (m, m_1, m_2) de niveau $n \geq 2$ se décompose sous la forme :*

$$S^* = (\overrightarrow{X_1}, 3, \overleftarrow{X_2})$$

où X_1 et X_2 sont des suites finies, éventuellement vides, contenant des entiers égaux à 1, 2 ou 3.

La démonstration se fait par récurrence sur le niveau.

- La table 2 fournit le résultat au niveau 2 avec le triplet $(10, 3, 1)$ qui donne :

$$S^* = (1, 2, 3)$$

On voit facilement que l'on peut prendre $X_1 = (1, 2)$ et $X_2 = \emptyset$

- Si l'on suppose le résultat vrai au niveau n, il faut pouvoir passer au niveau $n+1$. Pour cela il suffit d'utiliser les figures 2, 3a et 3, en traduisant sur les suites ce que donnent les lemmes 1, 2 et 3.

Pour le faire commodément, on convient de pouvoir noter α^i dans une suite S^* l'existence à la même place, dans le produit des matrices correspondant égal à M_{S^*}, du terme :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Ceci signifie que la suite $(u - \alpha + v)$ peut être remplacée par (u, α^i, v).

Plus généralement, lorsque l'on a :

$$\Sigma = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

On pose :

$$\Sigma^i = (\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_p^i)$$

Avec cette convention : $M_{\Sigma^i} = M_{\Sigma^*}^{-1}$.

On trouve alors la traduction évidente du lemme 1 :

Lemme 4. *Pour $S^* = (\overrightarrow{X_1}, 3, \overleftarrow{X_2})$, la transformation Y donne :*

$$(S^Y)^* = (\overrightarrow{S, 3, X_2^*}, 3, \overleftarrow{3^i, X_2^i, 3^i}).$$

Le lemme 2 donne quant à lui :

Lemme 5. *Pour $S^* = (\overrightarrow{X_1}, 3, \overleftarrow{X_2})$, la transformation Z donne :*

$$(S^Z)^* = (\overrightarrow{3^i, X_1^i, 3^i}, 3, \overleftarrow{X_1^*, 3, S})$$

Ces deux derniers résultats montrent que S^* se transforme en S par Y et Z. Mais ils contiennent plus d'information en traduisant comment se transforment les valeurs k_1, k_{12}, k_2 et k_{21}. De même, le lemme 3 donne :

Lemme 6. *Pour $S^* = (\overrightarrow{X_1}, 3, \overleftarrow{X_2})$, la transformation X donne :*

$$(S^X)^* = (\overrightarrow{\overline{X_1}}, 3, \overleftarrow{3^i, (X_2^*)^i, 3^i})$$

Où pour :

$$X_1 = (a_n, \dots, a_{i+1})$$

On convient de noter :

$$\overline{X_1} = \begin{cases} (1 + a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_{n-2}, 1 + a_{n-1}) & \text{si } a_n = a_{i+1} = 1 \\ (1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \dots, a_{n-2}, 1 + a_{n-1}) & \text{si } a_n = 1 \neq a_{i+1} \\ (1, a_{i+2} - 1, a_{i+3}, \dots, a_{n-1}, a_{n-1}, 1) & \text{si } a_n \neq 1 = a_{i+1} \\ (1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1) & \text{si } a_n \neq 1 \neq a_{i+1} \end{cases}$$

Il suffit alors de combiner ces trois derniers lemmes, et surtout de simplifier les expressions lorsqu'un terme de forme α^i apparaît dans la suite. La structure au niveau $n+1$ en résulte, d'où par récurrence la propriété 5.

- A gauche particulièrement la figure 2 conduit à considérer la chaîne suivante :

$$S^* = (\overrightarrow{X_1}, 3, \overleftarrow{X_2})$$

$$X \downarrow$$

$$(\overrightarrow{\overline{X_1}}, 3, \overleftarrow{3^i, (X_2^*)^i, 3^i})$$

$$P \downarrow$$

$$(\overrightarrow{3^i, (X_2)^i, 3^i}, 3, \overleftarrow{(\overline{X_1})^*})$$

$$Y \downarrow$$

$$(\overrightarrow{(\overline{X_1}), 3, 3^i, (X_2^*)^i, 3^i, 3, (\overline{X_1})}, 3, \overleftarrow{3^i, ((\overline{X_1})^*)^i, 3^i})$$

$$X \downarrow$$

$$(S^G)^* = (\overrightarrow{\overline{(\overline{X_1}), 3, 3^i, (X_2^*)^i, 3^i, 3, (\overline{X_1})}}, 3, \overleftarrow{3^i, 3, \overline{X_1}, 3, 3^i})$$

figure 5

Cette dernière expression se simplifie sous la forme :

$$(S^G)^* = (\overrightarrow{X_1^G}, 3, \overleftarrow{X_2^G})$$

Où de façon évidente :

$$X_2^G = \overline{X_1}$$

Par contre, le calcul de X_1^G est un peu plus délicat. Il s'appuie sur l'observation démontrable par récurrence que l'on peut écrire à chaque niveau :

$$X_1 = (\widehat{(X_2^*)}, 3, T)$$

où T suite réciproque, éventuellement vide.

(On doit poser par convention $(3, (\hat{\emptyset})^*) = (2, 1)$ et aussi $(\hat{\emptyset}, 3) = (1, 2)$.)

Ceci donne :

$$X_1^G = (\widehat{(X_2^*)}, 3, (\widehat{T})^*, 3, T) = (\widehat{(X_2^{G*})}, 3, T)$$

Les expressions trouvées pour X_1^G et X_2^G permettent de faire fonctionner à gauche le raisonnement par récurrence.

- A droite, la situation est un peu plus délicate car le passage de (m, m_1, m_2) à (m^D, m_1^D, m_2^D) se fait au travers d'un nombre impair de transformations X ou Y.

L'application des lemmes 4 et 6 à $S^* = (\overrightarrow{X_1}, 3, \overleftarrow{X_2})$ donne à l'arrivée une expression :

$$(S^D)^* = (\overrightarrow{X_1^D}, 3, \overleftarrow{X_2^D})$$

où X_2^D est de forme $(3^i, X_2^i, 3^i)$ ou $(3^i, (X_2^*)^i, 3^i)$.

En fait, le paradoxe se résoud en constatant que les décompositions données par les lemmes ne sont pas uniques. On a par exemple :

Lemme 7. *Pour toute décomposition :*

$$M_{S^*} = \begin{bmatrix} m & m-K_2 \\ K_1 & K_1 - I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 - k_{12} \\ k_1 & k_1 - I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 & m_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - I_2 \end{bmatrix}$$

On a également, pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$

$$M_{S^*} = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 - k_{12} - \lambda m_1 \\ k_1 & k_1 - I_1 - \lambda k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 & m_2 - k_2 \\ k_{21} + \lambda m_2 & k_{21} - I_2 + \lambda(m_2 - k_2) \end{bmatrix}$$

Pour simplifier l'étude de ce cas on note que la figure 3 impose que le passage de deux niveaux à droite se fait par la transformation XY.

- *Passage à droite de deux niveaux en deux niveaux :*

Pour les triplets correspondant, ce passage donne :

$$(m^{DD}, m_1^{DD}, m_2^{DD}) = (4m_2(4mm_2 - m_1) - m - 1, 4m_2 m - m_1, m_2)$$

(On peut comparer au théorème de [7] et comprendre maintenant son caractère insatisfaisant.)

De sorte que l'on doit aussi considérer la chaîne suivante :

$$S^* = (\overrightarrow{X_1}, 3, \overleftarrow{X_2})$$

$$Y \downarrow$$

$$(\overrightarrow{X_2^*, 3, X_1^*, 3, X_2^*}, 3, \overleftarrow{3^i, X_2^i, 3^i})$$

$$X \downarrow$$

$$(S^{DD})^* = (\overrightarrow{\overline{X_2^*, 3, X_1^*, 3, X_2^*}}, 3, \overleftarrow{3^i, 3, X_2^*, 3, 3^i})$$

figure 6

Cette expression se simplifie sous la forme :

$$(S^{DD})^* = (\overrightarrow{X_1^{DD}}, 3, \overleftarrow{X_2^{DD}})$$

Avec de façon évidente :

$$\begin{cases} X_2^{DD} = X_2^* \\ X_1^{DD} = (\widehat{X_2}, 3, X_1, 3, \check{X}_2) = ((\widehat{X_2^{DD*}}), 3, T^{DD}) \end{cases}$$

Et la mise en évidence de la suite réciproque :

$$T^{DD} = (X_1, 3, \check{X}_2) = (\widehat{(X_2^*)}, 3, T, 3, \check{X}_2)$$

Cette remarque permet un raisonnement par récurrence dans l'arbre pourvu qu'au premier niveau à droite après un passage à gauche le résultat soit également établi.

- *Premier passage à droite après un passage à gauche :*

En combinant les figures 2 et 3a et les résultats déjà disponibles, on construit la figure 7 suivante.

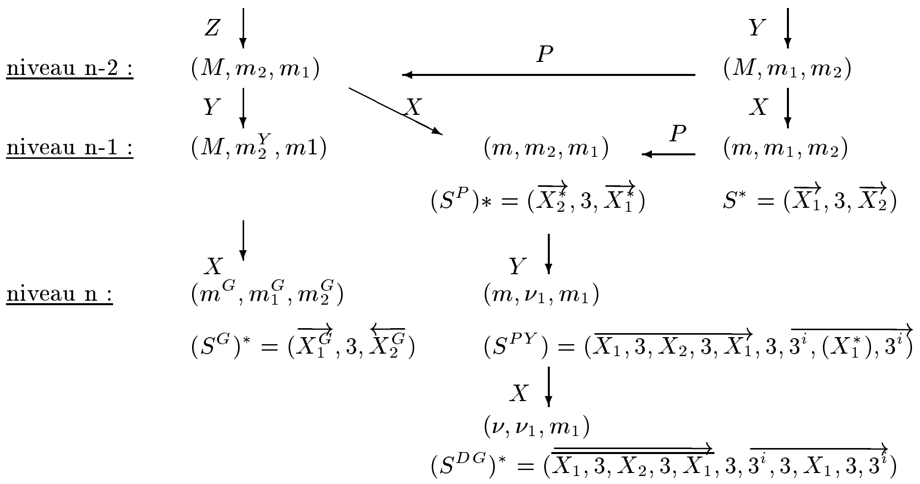

figure 7

Les expressions se simplifient sous la forme :

$$(S^G)^* = (\check{X}_1, 3, T, 3, \overline{X_1}) \quad \text{où} \quad \check{X}_1 = (\widehat{(X_2^*)}, 3, (\hat{T})^*)$$
$$(S^{DG})^* = (\overrightarrow{\widehat{(X_1^*)}, 3, X_2^*, 3, (\check{X}_1^*)}, 3, \overleftarrow{X_1})$$

La connaissance de $(S^G)^*$ permet ainsi de reconstruire X_1 et X_2, et donc la suite $(S^{DG})^*$ du transformé à droite du triplet associé à $(S^G)^*$. Ceci permet de faire fonctionner au premier niveau à droite le raisonnement par récurrence.

On remarque qu'avec : $X_2^{DG} = X_1$ et $X_1^{DG} = (\widehat{(X_1^*)}, 3, T^{DG})$

On trouve : $T^{DG} = (X_2^*, 3, (\check{X}_1^*)) = (X_2^*, 3, T, 3, X_2)$

Ceci met encore en évidence la suite réciproque identifiée avant au milieu des suites étudiées. De sorte que les développements qui précèdent ont aussi permis d'établir par récurrence :

Propriété 6. *Toute suite S^* associée à un triplet de Cohn (m, m_1, m_2) de niveau $n \geq 2$ se décompose sous la forme :*
$$S^* = (\overrightarrow{X_1}, 3, \overleftarrow{X_2})$$
où les suites d'entiers X_1 et X_2 sont telles que l'on puisse écrire :
$$X_1 = (\widehat{X_2^*}, 3, T)$$
avec T suite réciproque.

Ce résultat explique d'ailleurs comment se structure l'antiréciprocité de la suite S^* et pourquoi les triplets de Cohn vérifient $m > m_1 > m_2$.

Il suppose encore que les conventions vues avant (avec $a = 3$) pour le cas des suites vides soient prises en compte :
$$\forall\ a \in \mathbb{N}^* \qquad (a, (\hat{\emptyset})^*) = (a-1, 1)$$
$$(\hat{\emptyset}, a) = (1, a-1)$$
$$(a, \emptyset^*) = (\emptyset, a) = (a).$$
On donne dans la table 3 la structure des suites S^* associées aux triplets de Cohn pour les niveaux 2 à 5 de l'arbre.

Sur cette table, on vérifie sans peine que les expressions données avant à droite et à gauche conviennent. On s'assure aussi facilement par récurrence que ces expressions font que les termes de suite S^* restent inférieurs ou égaux à 3.

La table 3 permet aussi de faire l'observation que seule les suites S^* qui correspondent à des chemins s'écrivant $(XY)^t$ ou $(XY)^tX$, avec $t \in \mathbb{N}^*$, ne possédent qu'une valeur égale à 3, qui est d'ailleurs $a_0 = 3$. Toutes les autres en possèdent plusieurs.

Dans le cas considéré, on a toujours: $X_2 = \emptyset$. Et il est facile de s'assurer que la transformation XY agit sur X_1 comme suit :
$$X_1 \to X_1^{XY} = (1, 2, X_1, 2, 1)$$
De sorte que l'on a toujours :
$$m_2 = 1 \qquad k_2 = 1$$
$$k_{21} = 0 \qquad I_2 = -1$$
Mais aussi : $T_1 = k_1 + k_{12} - m_1 = 1$

Avec m_1 et k_1 racines de l'équation diophantienne :
$$(EQ): \qquad 2m_1^2 - 2m_1k_1 - k_1^2 - m_1 + k_1 = 1$$
Et facilement :
$$\begin{cases} m = 3m_1 + k_1 - 1 \\ K_1 = K_2 = 2m_1 + k_1 - 1 \\ I = 2m_1 - 1 \end{cases}$$

Chemin	Triplet	Suite $S^* = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$
<u>Niveau 2</u>		
XY	$(10, 3, 1)$	$(\overrightarrow{12}3\overleftarrow{\quad})$
<u>Niveau 3</u>		
XYX	$(25, 7, 1)$	$(\overrightarrow{1211}3\overleftarrow{\quad})$
XYZ	$(130, 11, 3)$	$(\overrightarrow{1113}3\overleftarrow{12})$
<u>Niveau 4</u>		
$XYXY$	$(137, 37, 1)$	$(\overrightarrow{121221}3\overleftarrow{\quad})$
$XYXZ$	$(1417, 119, 3)$	$(\overrightarrow{111333}3\overleftarrow{12})$
$XYZX$	$(1537, 55, 7)$	$(\overrightarrow{122311}3\overleftarrow{23})$
$XYZY$	$(1802, 41, 11)$	$(\overrightarrow{111213}3\overleftarrow{1212})$
<u>Niveau 5</u>		
$XYXYX$	$(346, 93, 1)$	$(\overrightarrow{12121121}3\overleftarrow{\quad})$
$XYXYZ$	$(18457, 1549, 3)$	$(\overrightarrow{3311133111}3\overleftarrow{21})$
$XYXZX$	$(19546, 699, 7)$	$(\overrightarrow{22133113}3\overleftarrow{1211})$
$XYXZY$	$(251417, 5717, 11)$	$(\overrightarrow{121113213312}3\overleftarrow{1113})$
$XYZXY$	$(2264231, 4757, 119)$	$(\overrightarrow{1113321333}3\overleftarrow{123312})$
$XYZXZ$	$(21881, 1479, 37)$	$(\overrightarrow{1212331221}3\overleftarrow{3213})$
$XYZYX$	$(95257, 433, 55)$	$(\overrightarrow{12232311}3\overleftarrow{2323})$
$XYZYZ$	$(25090, 153, 41)$	$(\overrightarrow{11121213}3\overleftarrow{121212})$

table 3 : Suites S^* associées aux triplets de Cohn

3.5. **Propriété des formes de Markoff associées.** Les expressions obtenues pour les suites S^* donnent alors directement, pour les formes de Markoff associées :

Lemme 8.

$$\begin{aligned}
(F_1):&\quad F_\theta(K_1,m)=1\\
(F_2):&\quad F_\theta(K_2-4m,m)=1\\
(F_3):&\quad F_\theta(k_1,m_1)=-(m+1)/m\\
(F_4):&\quad F_\theta(k_2-4m_2,m_2)=-(m+1)/m
\end{aligned}$$

En effet, les relations (F_1), (F_2) et (F_3) ont été établies avant. Avec la forme ϕ_θ, on a :

$$\begin{aligned}
m^2F_\theta(k_1,m_1) &= \phi_\theta(-m_2,m_1)\\
&= m_1^2-4mm_1m_2+m_2^2\\
(F_3)\qquad &= -m^2-m\\
m^2F_\theta(k_2-4m_2,m_2) &= \phi_\theta(m_1-4mm_2,m_2^2)\\
&= \phi_\theta(m_1,-m_2)\\
(F_4)\qquad &= -m^2-m
\end{aligned}$$

Ceci permet de faire le lien avec [1] dont certain résultats se transposent :

Corollaire 1. *Soit $f(x,y)=x^2+\beta xy+\gamma y^2$ une forme quadratique où β et γ réels, telle que :*

$$\begin{aligned}
f(K_1,m) &\geq 1\\
f(K_2-4m,m) &\geq 1\\
f(k_1,m_1) &\leq -(m+1)/m\\
f(k_2-4m_2,m_2) &\leq -(m+1)/m
\end{aligned}$$

Alors : $f(x,y)=F_\theta(x,y)$

On a aussi :

Lemme 9.

$$F_\theta(mk_1x-[m(k_1-I_1)+K_1T_1-T_2]y,mm_1x-mk_1y)=-m(m+1)F_\theta(x,y)$$

Il n'y a en effet aucune difficulté à voir que cette relation est vraie. Elle s'écrit aussi :

$$(F_a):\qquad F_\theta(k_1x-\chi y,m_1x-k_1y)=[-(m+1)/m]F_\theta(x,y)$$

où : $m\chi=[m(k_1-I_1)+K_1T_1-T_2]$.

Corollaire 2. *Les racines $\theta_3(S)$ et $\overline{\theta_3(S)}$ de $F_\theta(x,1)=0$ ne sont pas équivalentes si $m>2$.*

En effet, par la relation (F_a), on obtient en spécialisant avec $a = 3$:

$$(F_b) : \qquad \overline{\theta_3(S)} = (k_1\theta_3(S) - \chi)/(m_1\theta_3(S) - k_1)$$

Mais ici le nombre χ n'est pas en général dans $\mathbb{Z}$, mais dans $\mathbb{Q}$. Il apparait donc dans cette relation un facteur rationnel non entier qui empêche de conclure à l'équivalence de $\theta_3(S)$ et $\overline{\theta_3(S)}$, au contraire de ce qui se passait dans la théorie de Markoff classique. Ceci se vérifie bien avec les suites données dans la table 3.

Le corollaire peut être établi directement en appliquant un théorème de Serret ([6], III, p. 4) sur les développements en fractions continues de $\theta_3(S)$ et $\overline{\theta_3(S)}$ qui s'écrivent avec les suites S et S^*.

Le résultat essentiel transposé de [1] est alors le suivant :

Lemme 10. *Pour tous les entiers* $(x, y) \neq (0, 0)$ *on a :*

$$F_\theta(x, y) \geq 1$$

ou :

$$F_\theta(x, y) \leq [-(m + 1)/m] < -1$$

Supposons d'abord que ν soit la plus grande valeur négative $F_\theta(x, y)$ obtenue pour tous les entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$.

Comme mF_θ a des coefficients entiers, on peut trouver des entiers x_0, y_0 tels que :

$$(F_d) : \qquad F_\theta(x_0, y_0) = \nu = -(m - u)/m < 0$$

où par construction u entier strictement inférieur à m.

Avec la même méthode que dans le paragraphe 2.2, ceci conduit à considérer une équation diophantienne où $m_1 = y_0$ et $m_2 = -z_0$ entiers nécessairement positifs :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 4mm_1m_2 + um$$

On voit facilement avec un calcul analogue à celui de [3] que cette équation n'a pas de solution pour u positif ou nul. La seule possibilité pour que l'on puisse trouver x_0 et y_0 est donc que l'on ait $u \leq -1$. D'où avec le second énoncé du lemme 10.

On peut démontrer le premier énoncé de ce lemme de la même façon. On va plutôt utiliser ici la méthode de Cassels [1].

Supposons que μ soit la plus petite valeur positive $F_\theta(x, y)$ obtenue pour tous les entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$.

Comme mF_θ a des coefficients entiers, on peut trouver des entiers x_0, y_0 tels que :

$$(F_c) : \qquad F_\theta(x_0, y_0) = \mu > 0$$

Une condition nécessaire suffisante pour que des entiers (z, y) se déduisent d'entiers (x, y) avec :

$$z = mx - K_1y$$

est que l'on ait :

$$z \equiv -K_1 y \qquad (\text{mod } m)$$

On choisit une solution de (F_c), s'il y en a plus d'une, de sorte que :

$$\begin{cases} z_0 = mx_0 - K_1 y_0 \\ |y_0| + |z_0| \text{ minimum} \end{cases}$$

- Supposons d'abord, si cela est possible que l'on ait :

$$(H_1) : \qquad \begin{cases} y_0 z_0 < 0 \\ |z_0| > |y_0| \end{cases}$$

On pose $y_1 = 4my_0 + z_0$ et $z_1 = -y_0$ de sorte que l'on a, avec $K_1^2 \equiv 1$ (mod m) :

$$z_1 \equiv -K_1 y_1 \pmod m.$$

Alors :

$$0 \leq m^2\mu = \phi_\theta(z_0, y_0) = \phi_\theta(y_1, z_1) = y_0^2 + z_0 y_1$$

D'où :

$$-y_0^2 \leq z_0 y_1 < z_0^2.$$

La seconde inégalité résulte de la première condition de (H_1). Et la seconde condition impose alors :

$$|y_1| < |z_0|$$

Mais on aurait :

$$|y_1| + |z_1| < |y_0| + |z_0|$$

d'où une contradiction.

- De même, si l'on suppose que l'on a :

$$(H_2) \quad : \qquad \begin{cases} y_0 z_0 < 0 \\ |z_0| < |y_0| \end{cases}$$

On pose : $y_1 = -z_0$ et $z_1 = y_0 + 4mz_0$. De sorte que l'on a aussi :

$$z_1 \equiv -K_1 y_1 \pmod m.$$

En effet, on utilise encore :

$$K_1^2 \equiv -1 \pmod m.$$

Alors :

$$0 \leq m^2\mu = \phi_\theta(z_0, y_0) = \phi_\theta(y_1, z_1) = y_0 z_1 + z_0^2$$

Puisque mF_θ est à coefficient entiers, on obtient ainsi :

$$1 - z_0^2 \leq y_0 z_1 = (4mz_0 + y_0)y_0 < y_0^2.$$

Enfin la condition :

$$|y_0| > |z_0|$$

donne :

$$-y_0^2 < 1 - y_0^2 < 1 - z_0^2.$$

Il reste donc :

$$-y_0^2 < y_0 z_1 < y_0^2.$$

C'est à dire avec $y_0 \neq 0$:

$$|z_1| < |y_0|.$$

Compte tenu de l'expression de y_1, il vient :

$$|y_1| + |z_1| < |y_0| + |z_0|.$$

D'où encore une contradiction.

- Le cas suivant :

$$(H_3) : \qquad \begin{cases} y_0 z_0 < 0 \\ |z_0| = |y_0| \end{cases}$$

donne $z_0 = -y_0$ et une contradiction car :

$$\phi_\theta(-y_0, y_0) < 0.$$

- On doit donc avoir :

$$y_0 z_0 \geq 0.$$

Mais en posant : $y_2 = z_0$ et $z_2 = -y_0$. On a : $z_2 \equiv -K_1 y_2 \pmod{m}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \phi_\theta(z_2, y_2) &= z_0^2 - 4my_0 z_0 + y_0^2 \\ &\leq z_0^2 + 4my_0 z_0 + y_0^2 = m^2\mu \end{aligned}$$

— Le cas où il y a égalité impose $y_0 = 0$ ou $z_0 = 0$. Dans ces deux cas, on voit facilement que $\mu \geq 1$:

Si $y_0 = 0$, alors $m^2\mu = \phi_\theta(z_0, 0) = z_0^2 \geq m^2$ car m divise z_0.
Si $z_0 = 0$, alors $m^2\mu = \phi_\theta(0, y_0) = y_0^2 \geq m^2$ car m divise y_0.

— Dans les autres cas, on a par définition de μ :

$$\phi_\theta(z_2, y_2) < 0.$$

C'est à dire avec la première partie démontrée du lemme 10 :

$$\phi_\theta(z_2, y_2) \leq m^2[-(m+1)/m].$$

Ceci donne :

$$z_0^2 + y_0^2 \leq 4my_0 z_0 - m(m+1).$$

D'où :

$$m(m+1) \leq 4my_0 z_0 \leq \phi_\theta(z_0, y_0) = m^2\mu.$$

Soit :

$$\mu > 1.$$

On trouve une contradiction avec le lemme 8 qui montre que ces autres cas ne sont pas possibles. Ainsi reste-t-il nécessairement avec ce même lemme $\mu = 1$. La seconde partie du lemme 10 s'en déduit.

Une conséquence immédiate du dernier résultat obtenu est bien entendu que l'on a, du fait du lemme 8 :

Propriété 7.

a) *Le minimum arithmétique de la forme F_θ vaut $m(F_\theta) = 1$. Sa constante de Markoff a pour expression :*

$$C(F_\theta) = m/\sqrt{16m^2 - 4} > 1/4.$$

b) *La constante d'approximation de tout nombre $\theta_3(S)$, où S^* suite construite comme avant avec l'équation (M_1), vaut :*

$$C(\theta_3(S)) = m/\sqrt{16m^2 - 4} > 1/4.$$

Une autre conséquence évidente est l'impossibilité d'utiliser le théorème d'isolation de Remak et Rogers (cf [1] p. 25) pour caractériser les formes F_θ que l'on vient de construire par un résultat analogue au théorème II ([1] p. 39). En effet, l'équation diophantienne $F_\theta(x, y) = -1$ n'admet aucune solution d'après ce qui précède, ce qui introduit une asymétrie dans la façon dont le minimum arithmétique est atteint par la forme de Markoff F_θ. Ceci empêche de transposer l'approche de Cassels [1].

3.6. **Application à la démonstration des théorèmes 1 et 2.** On note que la partie (a) de la propriété 7 correspond à la partie (a) du théorème 1. Sa partie (b) découle du fait que l'arbre de Cohn donne à la limite sur chacune de ses branches une forme quadratique dont la constante vaut (1/4). Les démonstrations détaillées se font comme dans [1].

De même, la partie (b) de la propriété 7 correspond à l'énoncé principal de la partie (a) du théorème 2.

L'existence d'une infinité de valeurs q telle que $q\|q\theta\| < \theta$ s'établit en écrivant :

$$F_\theta(p, q) = (\theta - \bar{\theta})q(p - \theta q) + (p - \theta q)^2.$$

On fait d'abord en sorte que $F_\theta(p, q) = -(m + 1)/m$, ce qui est possible d'une infinité de façons, avec $p - \theta q$ aussi proche de 0 que souhaité, et $q > 0$.

En utilisant :

$$\begin{cases} \theta = [0, \underline{S^*, 3}] > 0 \\ \bar{\theta} = -[\underline{3, S}] < 0 \\ \theta - \bar{\theta} = (\sqrt{\Delta(F_\theta)})/m = C(F_\theta)^{-1} > 0 \end{cases}$$

On obtient : $q(p - \theta q) < -C(F_\theta)$. Cette condition s'écrit aussi :

$$q\|q\theta\| > C(F_\theta) = C(\theta).$$

On fait ensuite en sorte que $F_\theta(p,q)=1$, ce qui est aussi possible d'une infinité de façons avec $p-\theta q$ aussi proche de 0 que souhaité, et $q>0$. Alors :

$$0 < q(p-\theta q) < C(F_\theta).$$

Ceci s'écrit cette fois :

$$q\|q\theta\| < C(F_\theta) = C(\theta).$$

Le fait que les deux racines de $F_\theta(x,1)=0$ ne soient pas équivalentes entre elles n'est autre que le corollaire du lemme 9. Ceci établit complètement la partie (a) du théorème 2.

Sa partie (b) provient du fait que par le théorème 1 on trouve un nombre non dénombrable de nombres θ issus de l'arbre construit, avec $C(\theta)\geq(1/4)$. Mais comme ceux qui sont tels que $C(\theta)>(1/4)$ peuvent être dénombrés sur ce même arbre, l'énoncé en résulte pour ceux tels que $C(\theta)=(1/4)$.

4. Remarques finales

Les développements qui précèdent ont montré comment adapter l'approche de Cassels [1] de la théorie de Markoff. Ils en illustrent la force et les faiblesses, mais montrent aussi comment traiter des cas plus généraux.

4.1. **Possibilités de généralisation.** L'auteur du présent article a donné dans [8] des résultats généraux pour les équations (M_1^+) suivantes où $r=0$, notées ici :

$$(M_1^+(a,u)) \ : \qquad m^2+m_1^2+m_2^2=(a+1)mm_1m_2-um.$$

Il est à partir de là possible de construire d'autres arbres comparables à celui que l'on vient de présenter pour l'équation (M_1), qui n'est autre que l'équation $M_1^+(3,1)$. Pour les suites associées $S^*=(\overrightarrow{X_1},a,\overleftarrow{X_2})$ on a encore la propriété d'antiréciprocité, et la possibilité d'écrire :

$$X_1=(\widehat{(X_2^*)},a,T).$$

On obtient aussi des règles analogues à celles vues avant, et dont on vérifie facilement qu'elles conviennent aussi pour la théorie de Markoff classique, obtenue avec $a=2$ et $u=0$:

Ce qui est déterminant est alors ce qui se passe en haut de ces arbres, et là, la situation peut être diverse. Dans certains cas, comme celui des équations $M_1^+(3,3)$ ou $M_1^+(3,6)$, il n'est même pas possible de calculer les suites S^* par la méthode présentée avant.

Néanmoins, les méthodes développées permettent de produire de nombreuses structures arborescentes derrière les constantes d'approximations des nombres irrationnels ou les constantes de Markoff des formes.

A gauche :	$(S^G)^* = (\overrightarrow{X_1^G}, a, \overleftarrow{X_2^G})$
	où : $X_2^G = \overline{X_1}$
	$X_1^G = (((\widehat{X_2^*}), a, (\hat{T})^*), a, T)$
A droite :	(1) De deux niveaux en deux niveaux:
	$(S^{DD})^* = (\overrightarrow{X_1^{DD}}, a, \overleftarrow{X_2^{DD}})$
	où: $X_2^{DD} = X_2^*$
	$X_1^{DD} = (\widehat{X_2}, a, X_1, a, \check{X}_2)$
	(2) Premier passage à droite après passage à gauche :
	$(S^{DG})^* = (\overrightarrow{X_1^{DG}}, a, \overleftarrow{X_2^{DG}})$
	où : $X_2^{DG} = X_1$
	$X_1^{DG} = ((\widehat{X_1^*}), a, X_2^*, a, (\check{X}_1^*))$
	et X_1, X_2 déterminés à partir de:
	$(S^G)^* = (\check{X}_1, a, T, a, \overline{X_1})$
	$\check{X}_1 = ((\widehat{X_2^*}), a, (\hat{T})^*)$

table 4 : Règles de construction des suites S^*

4.2. **Richesse du spectre des constantes.** Les constantes issues de la théorie faite avant avec (M_1) peuvent être explicitées aux plus bas niveaux :

Triplet	Constante $C(F_\theta) = C(\theta)$
$(1, 1, 1)$	$1/\sqrt{12} \neq 0{,}2886751$
$(2, 1, 1)$	$1/\sqrt{15} \neq 0{,}2581989$
$(10, 3, 1)$	$10/\sqrt{1596} \neq 0{,}2503131$
$(25, 7, 1)$	$25/\sqrt{9996} \neq 0{,}2500500$
$(130, 11, 3)$	$130/\sqrt{270396} \neq 0{,}2500019$
$(137, 37, 1)$	$137/\sqrt{300300} \neq 0{,}2500017$

table 5 : Constantes de Markoff des formes F_θ

On vérifie facilement que la situation est différente de celle de la théorie de Markoff classique, en observant qu'entre les valeurs indiquées dans cette table existent d'autres constantes.

Entre les deux premières, on trouve par exemple $1/\sqrt{13}$ qui correspond à $\gamma_1 = [\underline{3}]$. Beaucoup d'autres constantes peuvent être exhibées entre ces deux valeurs, avec la remarque particulière qu'il n'en existe aucune dans l'intervalle $]1/\sqrt{13}, 1/\sqrt{12}[$.

Par contre, entre $(1/\sqrt{15})$ et $(1/\sqrt{13})$ il y en a un nombre non dénombrable correspondant aux irrationnels de degré 2 dont la période du développement en fraction continue ne contient que des 3 et des 2.

Entre $(1/\sqrt{15})$ et $(10/\sqrt{1596})$, on trouve par exemple $3/\sqrt{136}$ qui correspond à $\gamma_2 = [\underline{3, 3, 1, 1, 1, 1}]$. On trouve de nombreuses autres constantes correspondant aux nombres irrationnels $\gamma = [\underline{3, 3, (1)_n}]$ comprenant une suite de n valeurs consécutives égales à 1 dans leur développement, avec $n \geq 3$.

Entre $(10/\sqrt{1596})$ et $(25/\sqrt{9996})$, on trouve aussi $13/\sqrt{2700}$ qui correspond à $\gamma_3 = [\underline{3, 2, 1, 1, 1, 1}]$.

Ainsi de suite, les constantes que l'on a mises en avant ne sont pas séparées par des intervalles vides de constantes, comme dans la théorie de Markoff classique.

On peut d'ailleurs remarquer que la théorie classique a fourni des constantes proches de $(1/3)$, issues d'égalités que l'on peut écrire sous la forme :

$$2 + (1/x) + (1/y) = (m/\sqrt{9m^2 - 4})^{-1}.$$

Une telle égalité donne aussi :

$$3 + (1/x) + (1/y) = 1 + (m/\sqrt{9m^2 - 4})^{-1}.$$

Ceci permet de trouver d'autres constantes au voisinage de $(1/4)$, situées dans des intervalles séparant des constantes de notre nouvelle théorie, et ceci aussi près que voulu de $(1/4)$. Cette demière valeur est donc approchable par des constantes données par deux arbres distincts, l'un correspondant à notre théorie construite avec l'équation (M_1), l'autre se déduisant de la théorie de Markoff classique.

4.3. **Surface d'équation (M_1).** Les méthodes de [10] permettent de construire une représentation birationnelle du plan $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sur la surface algébrique réelle d'équation (M_1). Cette transformation birationnelle à coefficients rationnels donne tous les points rationnels de cette surface avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}^2$.

La surface possède trois nappes :

(N) correspondant à un quart de plan $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
(N') correspondant à un quart de plan $\lambda > 0$ et $\mu < 0$.
(N^-) correspondant à un demi plan $\lambda < 0$.

On peut par ailleurs déterminer complètement tous ses points entiers par la méthode développée dans [8]. Celle ci donne en effet tous les points de la nappe (N).

Avec la transformation :

$$(x, y, z) \to (x, -y, -z).$$

On trouve tous les points de la nappe (N').

Enfin la même méthode permet de vérifier que la nappe (N^-) ne possède que les deux points entiers $(0, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0)$.

Hors ces deux derniers points entiers, on notera que la condition (u) vue avant garantit que l'on a, pour tout point entier (m, m_1, m_2) de la surface considérée, la condition :

$$pgcd(m, m_1) = pgcd(m_1, m_2) = pgcd(m_2, m) = 1.$$

La situation est comparable à ce que l'on a dans la théorie de Markoff classique, mais résulte ici du fait que l'on a $u = 1$. Dans les cas les plus généraux d'autres équations que (M_1), on n'a plus nécessairement de telles égalités pour ces plus grands communs diviseurs.

Avec la surface (M_1), on dispose ainsi d'une surface cubique réelle dont tous les points entiers, et respectivement rationnels, sont identifiés. La situation peut être comparée à ce qui est connu sur les variétés de Brauer–Severi de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ (voir par exemple [2]).

Bibliographie

[1] J. W. S. Cassels, *An introduction to diophantine approximation.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. **45**, Cambridge University Press, New-York, 1957.

[2] J. L. Colliot-Thélène, *Les grands thèmes de François Châtelet.* Enseig. Math.(2) **34** (1988), no. 3-4, 387–405.

[3] T. W. Cusick, *On Perrine's generalized Markoff equation.* Aequationes Mathematicae **46** (1993), 203–211.

[4] T. W. Cusick and M. E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra.* Mathematical surveys and monographs, **30**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

[5] A. A. Markoff, *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies.* Math. Ann. **6** (1879), 381–406; Math Ann. **17** (1880), 379–399.

[6] S. Perrine, *Approximation diophantienne (Théorie de Markoff).* Thèse présentée à l'Université de Metz (décembre 1988).

[7] S. Perrine, *Sur une généralisation de la théorie de Markoff.* J. Number Theory **37** (1991), 211–230.

[8] S. Perrine, *Sur des équations diophantiennes généralisant celle de Markoff.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.(6) **6** (1997), no. 1, 127–141.

[9] A. L. Schmidt, *Minimum et quadratic forms with respect to fuchsian groups (I).* J. Reine Angew. Math. **286/287** (1976), 341–348.

[10] B. Segre, *Arithmetic upon an algebraic surface.* Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 152–161.

Serge Perrine
5, rue du Bon Pasteur,
57070-Metz
France
E-mail : Serge.Perrine@wanadoo.fr