Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **12** (2000), 281–291

Une forme dual-extrême irrationnelle

par ANNE-MARIE BERGÉ

Dédié à Jacques Martinet pour son anniversaire

RÉSUMÉ. On étudie ici du point de vue de la dualité les réseaux de dimension 5 ayant un automorphisme d'ordre 5. On y rencontre en particulier le premier exemple irrationnel de couple de réseaux duaux extrême pour le produit de leurs constantes d'Hermite, et l'on donne une réponse partielle à un problème de Conway et Sloane sur les réseaux isoduaux.

ABSTRACT. This paper presents the five-dimensional lattices having an automorphism of order five from the point of view of duality. The first example of an irrational pair of polar lattices extreme with respect to the product of their Hermite constants arises in this set. The complete classification of the subset of isodual lattices enables us to give a partial answer to a question of Conway and Sloane.

Pour aborder le problème des empilements réguliers de sphères du point de vue de la dualité, Jacques Martinet et l'auteur ont défini, pour un couple de réseaux euclidiens duaux (L, L^*) de rang n, un *invariant d'Hermite dual*, moyenne quadratique des invariants d'Hermite de L et de L^*. Cet invariant γ' est clairement majoré par la constante d'Hermite γ_n, et sa borne supérieure précise γ'_n (*constante de Bergé-Martinet* dans [CS]) n'est pour l'instant connue que pour les dimensions $n = 1, 2, 3, 4, 8$, pour lesquelles elle est atteinte sur les réseaux les plus denses. Nous conjecturons dans [BM1] qu'il en est de même pour $n = 5$, ce qui entraînerait de bonnes estimations de la constante γ_9.

Nous donnons ici pour la dimension 5 un résultat partiel qui vient appuyer cette conjecture. Il concerne des réseaux ayant des automorphismes donnés. La théorie équivariante, qui a l'avantage de sélectionner de "beaux" réseaux et d'abaisser la dimension des espaces à explorer, nous a permis de découvrir le premier couple (Λ, Λ^*) de réseaux *dual-extrêmes* (i.e. réalisant

Manuscrit reçu le 2 mai 2000.

un maximum local de l'invariant γ') *irrationnels* : un tel exemple ne pourrait se rencontrer dans la théorie classique, et il est prouvé dans [BM1] qu'il n'en existe pas en dimension $n \leq 4$. Nous adoptons généralement le point de vue des formes quadratiques, mieux adapté à notre approche par classification selon les vecteurs minimaux.

1. Notations

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique $n \times n$ positive, c'est-à-dire telle que la forme quadratique $A[x] = \sum a_{ij} x_i x_j$ soit définie positive ; nous notons $\min A$ son *minimum* et $S(A)$ l'ensemble de ses *vecteurs minimaux* :

$$\min A = \min_{x \neq 0 \in \mathbb{Z}^n} A[x], \qquad S(A) = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid A[x] = \min A\}.$$

L'invariant d'Hermite de A est $\gamma(A) = \min A \, (\det A)^{-1/n}$, son invariant d'Hermite dual $\gamma'(A) = \sqrt{\gamma(A)\gamma(A^{-1})}$ est donc

$$\gamma'(A) = \sqrt{\min A \ \ \min A^{-1}}.$$

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 2$, soit $\mathcal{S}_G \subset \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices *G-invariantes*

$${}^t gAg = A \ \text{ pour tout } g \in G,$$

et soit $\mathcal{P}_G \subset \mathcal{S}_G$ la variété des matrices positives A telles que $\min A = 1$. Le centralisateur

$$\mathrm{SL}_G(\mathbb{Z}) = \{u \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \mid g^{-1} u g = u \text{ pour tout } g \in G\}$$

de G dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ opère sur $\mathcal{P}_G$ par

$$(u, A) \mapsto {}^t uAu;$$

deux matrices A and $B \in \mathcal{S}_G$ d'une même orbite sont dites *G-équivalentes*. L'espace quotient $\mathrm{SL}_G(\mathbb{Z}) \setminus \mathcal{P}_G$ paramètre l'ensemble des classes de similitude des G-réseaux (i.e. des réseaux de rang n admettant une action isométrique par un groupe fini représenté par G). Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est représenté par la matrice $x\,{}^t x = (x_i x_j) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, et sa G-orbite Gx par la moyenne

$$X = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gx)\,{}^t(gx),$$

qui est invariante par le groupe dual $\widetilde{G} = \{{}^t g \ \mid \ g \in G\}$.

Soit $A \in \mathcal{P}_G$ et soit $S = S(A)$ l'ensemble de ses vecteurs minimaux.
La *G-cellule* de A

$$c_S = \{M \in \mathcal{P}_G \ \mid \ S(M) = S\}$$

est un polyèdre convexe ouvert dont l'adhérence est la réunion des cellules $c_{S'}$, $S \subset S'$. On obtient ainsi une décomposition cellulaire finie de $\mathcal{P}_G$ modulo G-équivalence, dont les sommets représentent les matrices *G-parfaites*, i.e. entièrement déterminées dans $\mathcal{P}_G$ par leurs vecteurs minimaux. D'une façon générale, le *défaut de G-perfection* de la cellule c_S est sa dimension affine, c'est-à-dire le co-rang dans $\mathcal{S}_{\widetilde{G}}$ des $X,\ x \in S$ (on a en effet, pour $A \in c_S$, $A[x] = \ \mathrm{trace} AX$). Le 1-squelette de la decomposition cellulaire de $\mathcal{P}_G$ constitue le graphe de G-contiguïté des formes G-parfaites pour l'algorithme de Voronoï équivariant (cf. [BMS]). Dans les théories d'extrémalité à la Voronoï, seules interviennent les cellules c_S *bornées*, c'est-à-dire telles que S engendre $\mathbb{R}^n$ (*well rounded cells* selon Avner Ash). Pour prendre en compte la dualité, on considère la relation d'équivalence $A \sim A'$ si $S(A) = S(A')$ et $S(A^{-1}) = S({A'}^{-1})$. On obtient ainsi une subdivision de chaque cellule c_S en un nombre fini de G-cellules duales

$$c_{S,S^*} = \{M \in \mathcal{P}_G \mid S(M) = S \text{ et } S(M^{-1}) = S^*\},$$

dont on voit au §3 qu'elles ne sont plus, pour les modèles affines usuels, des polyèdres convexes.

2. Extrémalité et décomposition cellulaire

Soit $c = c_S$ une G-cellule bornée. La fonction d'Hermite γ est strictement convexe donc admet dans l'adhérence $\overline{c}$ de c un minimum atteint sur une unique matrice A qui, si elle est dans c, est caractérisée par la propriété d'*eutaxie faible* : il existe un système de coefficients a_x, $x \in G \setminus S$ tels que $A^{-1} = \sum_x a_x X$ (on retrouve ainsi dans [BM2] un résultat de finitude dû à A. Ash). L'eutaxie faible ne peut se produire que dans une cellule bornée. Lorsqu'il existe un système de coefficients d'eutaxie tous strictement positifs la matrice A est *eutactique* au sens classique. C'est la condition ajoutée par Voronoï à celle de perfection pour caractériser les matrices extrêmes. Ce résultat peut s'étendre à la théorie équivariante : une matrice $A \in \mathcal{P}_G$ est *G-extrême* (i.e. réalise un maximum local de γ dans $\mathcal{P}_G$) si et seulement si elle est eutactique et G-parfaite (cf. [BM3]).

Pour la théorie duale, on introduit les notations et définitions suivantes : soient $A \in \mathcal{S}_G$, $S = S(A)$ et $S^* = S(A^{-1})$; la matrice A est *G-dual-parfaite* si la cellule c_{S,S^*} est de dimension affine 0, c'est-à-dire si les matrices $X, A^{-1}YA^{-1}$, $x \in S$, $y \in S^*$, engendrent l'espace affine $\mathcal{S}_G$ (ici, on a posé, pour $y \in S^*$, $Y = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in\tilde{G}}(gy)\,{}^t(gy))$; elle est *dual-eutactique* s'il existe des coefficients a_X, b_Y tous strictement positifs tels que

$$\sum_{x\in G\setminus S} a_X X = \sum_{y\in\widetilde{G}\setminus S^*} b_Y A^{-1}YA^{-1}.$$

Ces deux propriétés caractérisent les matrices A qui réalisent un maximum local de la fonction γ' parmi les matrices G-invariantes, appelées *G-dual-extrêmes* ou plus simplement *dual-extrêmes* lorsque le groupe G est trivial (cf. [BM1]). Ici encore, seules interviennent les cellules bornées. Notons qu'une matrice A dual-extrême doit vérifier

$$s + s^* \geq \frac{n(n+1)}{2} + 1 \qquad (s = |S|/2, s^* = |S^*|/2).$$

La suite est consacrée à la théorie équivariante pour la représentation régulière du groupe cyclique d'ordre 5. Le paragraphe 3. donne la classification duale complète des matrices invariantes ; nous en déduisons dans le §4 la liste des G-réseaux dual-extrêmes ; il y apparaît un nouveau couple de réseaux (Λ, Λ^*) qui se révèlent être dual-extrêmes, sans qu'aucun de ces deux réseaux ne soit parfait au sens classique. De tels exemples avaient déjà été construits dans [M] en toutes dimensions paires $n \geq 8$; notre exemple est le premier pour lequel aucun des deux réseaux Λ, Λ^* n'est faiblement eutactique, et c'est aussi le premier exemple irrationnel. Dans cet exemple comme dans ceux de [M], on a $s+s^* = \frac{n(n+1)}{2}+n > \frac{n(n+1)}{2}+1$, ce qui laisse ouverte la question du minimum de $s + s^*$ pour les réseaux dual-extrêmes.

Dans ce même paragraphe 4, nous prouvons que la conjecture $\gamma'_5 = \sqrt{2}$ est vraie pour les G-réseaux.

Le paragraphe 5 décrit les G-réseaux isoduaux, c'est-à-dire semblables à leurs duaux, et l'on y prouve que le réseau mD_5 introduit dans [CS] par Conway et Sloane est le plus dense G-réseau isodual.

Nous remercions J. Martinet, qui est à l'origine de ce travail, pour les nombreuses discussions qui nous ont guidée. Nous remercions également les auteurs du système de calcul PARI, et plus particulièrement C. Batut dont nous avons utilisé de nombreux programmes extérieurs au système PARI.

3. Classification duale

Le groupe cyclique G d'ordre 5 est engendré par la matrice de permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

les matrices G-invariantes sont *circulantes*, c'est-à-dire à diagonales constantes, les lignes sont déduites de la première par permutation circulaire. L'espace $\mathcal{S}_G$ des matrices circulantes symétriques est de dimension $N_G =$

$1 + \lfloor 5/2 \rfloor = 3$, et nous représentons ses éléments par le début (a,b,c) de leur première ligne (a,b,c,c,b).

Le centralisateur $\mathrm{SL}_G(\mathbb{Z})$ de G dans $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ est engendré par G et la matrice circulante de première ligne $(-1,0,1,1,0)$, d'ordre infini (cf [BMS]). Modulo G-équivalence, la décomposition cellulaire de $\mathcal{P}_G$ admet aussi la symétrie $(a,b,c) \mapsto (a,c,b)$ correspondant à une action du normalisateur de G dans $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$.

Voici un modèle affine de la *décomposition cellulaire de* $\mathcal{P}_G$ (cf. [B]).
• *Cellules de dimension 2.* Elles classent les matrices à une seule orbite $S = Gx$ de vecteurs minimaux selon que le sous-réseau de $\mathbb{Z}^5$ engendré par S est d'indice 1 ou 2.
Cellule α_2 : $< S >= \mathbb{Z}^5$; en prenant pour S la base canonique de $\mathbb{Z}^5$, on obtient le paramétrage

$$\alpha_2 = \{(1,b,c) \ \text{ avec } \ |b| < \frac{1}{2},\, |c| < \frac{1}{2},\, b+c > -\frac{2}{5},\, 2b-c<1,\, 2c-b<1\},$$

la matrice eutactique de la cellule α_2 (à savoir la matrice unité, qui représente le réseau cubique) se trouve sur l'axe de symétrie $b = c$.
Cellule β_2 : $[\mathbb{Z}^5 : < S >] = 2$; on prend alors $S = Gx$, avec $x = {}^t(1,0,1,0,0)$, d'où le paramétrage

$$\beta_2 = \{(a, b, \frac{1}{2} - a) \ \text{ avec } \ a > 1,\, \frac{a}{2} - \frac{2}{5} < b < \frac{a}{4}\};$$

dans cette représentation l'axe de symétrie a pour équation $b = 1/4$, il contient la matrice eutactique de la cellule, $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$, qui représente la classe de similitude du réseau dual du réseau $\mathbb{D}_5$.

• *Cellules de dimension 1.* Il y en a 5 inéquivalentes, ensembles de matrices à deux orbites de vecteurs minimaux, donc demi-*kissing number* $s = 6$ ou 10 (on identifie x et $-x$) :
$\alpha_1 = \{(1, \frac{1}{2}, t) \mid 0 < t < \frac{1}{2}\}, \quad (s = 10)$,
$\beta_1 = \{(1, t, 2t-1) \mid \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}\}, \quad (s = 10)$,
$\gamma_1 = \{(1, t, -\frac{1}{2}) \mid \frac{1}{10} < t < \frac{1}{4}\}, \quad (s = 10)$,
$\delta_1 = \{(1, t, -t - \frac{2}{5}) \mid -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{10}\}, \quad (s = 6)$,
$\epsilon_1 = \{(t, \frac{t}{2} - \frac{2}{5}, \frac{1}{2} - t) \mid 1 < t < \frac{8}{5}\}, \quad (s = 6)$.

• *Cellules de dimension 0.* Il y a quatre matrices G-extrêmes inéquivalentes (cf. [BMS]), à 3 ou 4 orbites de vecteurs minimaux. Nous précisons ci-dessous entre parenthèses la classe de similitude du réseau correspondant :
$\alpha_0 = \{A_5 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} \quad (\mathbb{A}_5)$,
$\beta_0 = \{D_5 = (1, \frac{1}{2}, 0)\} \quad (\mathbb{D}_5)$,
$\gamma_0 = \{A_5^3 = (1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2})\} \quad (\mathbb{A}_5^3)$,

$\delta_0 = \{\Lambda_5 = (1, \frac{1}{10}, -\frac{1}{2})\}$ (réseau G-extrême noté Λ_5 dans [BMS], avec seulement 11 vecteurs minimaux répartis en deux G-orbites à 5 éléments et une orbite à un élément, et qui figure dans la décomposition cellulaire ci-dessus sous 2 formes non G-équivalentes $(1, \frac{1}{10}, -\frac{1}{2})$ et $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{10})$.

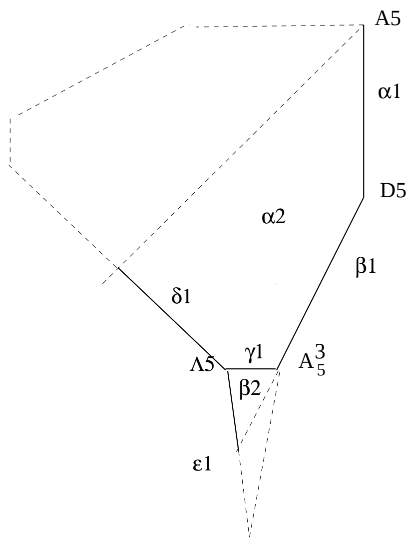

Figure 1 –

Dualité.

Comme le groupe G est composé de matrices orthogonales, l'inversion $A \mapsto A^{-1}$ induit une involution sur $\mathcal{P}_G$. Notons Δ_G le domaine fondamental de $\mathcal{P}_G$ modulo équivalence, et

$$f \;: A = (a, b, c) \mapsto A' = (a', b', c')$$

l'involution de Δ_G induite (après une normalisation convenable) par l'inversion. La frontière de Δ_G est contenue dans la réunion des droites d'équations homogènes $b = a/2$ (qui porte la cellule α_1), $c = -a/2$ (qui porte γ_1), $b = c$ (axe de symétrie de α_2) et $b = (a+c)/2$ (axe de symétrie de c_2 et support de β_1). Les deux premières droites sont transformées par f en les coniques d'équations respectives $-a^2 + 3b^2 - c^2 - ab + 3bc - 3ca = 0$ et $-a^2 + 3b^2 - c^2 + ab + bc - ca = 0$. Les deux autres sont globalement conservées par f. Les quatre droites et les deux coniques subdivisent donc le domaine fondamental Δ_G en G-cellules duales.

Notons $A'_5 = (1, -1/5, -1/5)$, $D'_5 = (5/4, 1/4, -3/4)$, $A_5^2 = (1, 1/3, -1/3)$ les images par f des matrices parfaites (représentant les réseaux $\mathbb{A}_5^*$, $\mathbb{D}_5^*$, $\mathbb{A}_5^2 = \mathbb{A}_5^{3\,*}$). Introduisons aussi les deux matrices $M = \alpha_1 \cap f(\gamma_1)$ et $M' = f(M) = \gamma_1 \cap f(\alpha_1)$:

$$M = (1, \frac{1}{2}, \frac{-3+\sqrt{13}}{4}) \qquad \text{et} \qquad M' = (1, \frac{5-\sqrt{13}}{12}, -\frac{1}{2}).$$

Soient enfin les trois domaines

$$\mathcal{D} = \{(a,b,c) \mid -a^2 + 3b^2 - c^2 - ab - 3ca + 3bc < 0\},$$
$$\mathcal{D}_1 = \{(a,b,c) \mid -a^2 + 3b^2 - c^2 + ab + bc - ca < 0\},$$
$$\mathcal{D}_2 = \{(a,b,c) \mid -a^2 + 3b^2 - c^2 + ab + bc - ca > 0\}.$$

Une matrice $A = (a,b,c) \in \Delta_G$ avec $-a^2 + 3b^2 - c^2 + ab + bc - ca > 0$ a pour image une matrice (a', b', c') telle que $b' > a'/2$: $S(A^{-1})$ est alors l'orbite du vecteur ${}^t(1,-1,0,0,0)$, contenue dans l'hyperplan $\sum x_i = 0$. La matrice A ne peut donc pas être dual-eutactique.

On se borne donc désormais au domaine $\Delta_G \cap \overline{\mathcal{D}}$, représentant des couples (A, A^{-1}) de matrices *well rounded*. Cela exclut une partie des cellules α_2, β_2 (zone hachurée sur la figure 2), les cellules δ_1, ϵ_1 ainsi que la matrice G-extrême Λ_5. Les matrices $A = (a,b,c) \in \Delta_G \cap \mathcal{D}_2$ sont telles que $f(A) = (a', b', c')$ vérifie $2c' + a' < 0$, donc $S(A^{-1})$ engendre un sous-réseau d'indice 2 dans $\mathbb{Z}^5$: $f(A)$ appartient à la cellule α_2. Nous sommes en mesure d'énumérer (à équivalence près) les G-cellules duales :

- *Dimension 2*

  $\widetilde{\alpha_2} = \alpha_2 \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1$ ("hexagone" $A_5 M A_5^2 A_5^3 M' A'_5$, stable par dualité),

  $\widetilde{\alpha'_2} = \alpha_2 \cap \mathcal{D}_2$ ("triangle" $M D_5 A_5^2$) et $\widetilde{\beta_2} = f(\alpha'_2) = \beta_2 \cap \mathcal{D}$ ("triangle" $M' A_5^3 D'_5$).

- *Dimension 1*

  $\widetilde{\alpha_1} = \alpha_1 \cap \mathcal{D}_1$ ($]A_5 M[$) et son image $f(\widetilde{\alpha_1})$ (arc de conique $\overset{\frown}{\to} A'_5 M'$),

  $\widetilde{\alpha'_1} = \alpha_1 \cap \mathcal{D}_2$ ($]M D_5[$) et l'arc de conique $\overset{\frown}{\to} D'_5 M' = f(\widetilde{\alpha'_1})$,

  $\widetilde{\beta_1} = \beta_1 \cap \mathcal{D}_1$ ($]A_5^3 A_5^2[$ stable par dualité),

  $\widetilde{\beta'_1} = \beta_1 \cap \mathcal{D}_2$ ($]D_5 A_5^2[$) et son image $f(\widetilde{\beta'_1})$ ($]D'_5 A_5^3[$).

  $\widetilde{\gamma_1} = \gamma_1 \cap \mathcal{D}$ ($]A_5^3 M'[$) et son image $f(\widetilde{\gamma_1})$ (arc $\overset{\frown}{\to} A_5^2 M$),

- *Dimension 0*

  On trouve les 3 cellules parfaites et leurs images $(\alpha_0, f(\alpha_0))$, $(\beta_0, f(\beta_0))$, $(\gamma_0, f(\gamma_0))$, ainsi que les cellules $\epsilon_0 = \{M\}$, $f(\epsilon_0) = \{M'\}$.

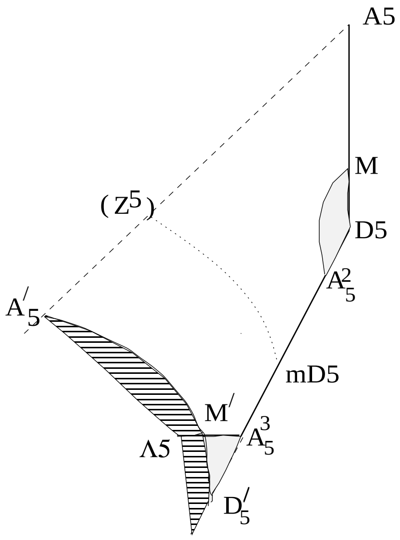

Figure 2 –

4. G-réseaux dual-extrêmes

Étudions la matrice

$$M = (1, \frac{1}{2}, \rho) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \rho & \rho & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & \rho & \rho \\ \rho & 1/2 & 1 & 1/2 & \rho \\ \rho & \rho & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & \rho & \rho & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \rho = \frac{-3+\sqrt{13}}{4}.$$

Elle a 2 orbites de vecteurs minimaux, celles des vecteurs $x = {}^t(1,0,0,0,0)$ et $x' = {}^t(1,-1,0,0,0)$, représentées dans $\mathcal{S}_G$ par les matrices invariantes $X = \frac{1}{5}(1,0,0)$ et $X' = \frac{1}{5}(2,-1,0)$. Son inverse a deux orbites de vecteurs minimaux, celle de x et celle de $x'' = {}^t(1,1,0,0,0)$, représentées dans $\mathcal{S}_G$ par $Y = X$ et $Y' = \frac{1}{5}(2,1,0)$. On a donc, en posant $\theta = \sqrt{13}$

$M^{-1}YM^{-1} = \frac{1}{360}(46\theta + 218, -35\theta - 151, 10\theta + 56)$,

$M^{-1}Y'M^{-1} = \frac{1}{360}(22\theta + 134, -14\theta - 28, -5\theta + 17)$, d'où une relation d'eutaxie $a_X X + a_{X'} X' = M^{-1}(b_Y Y + b_{Y'} Y')M^{-1}$, avec des coefficients d'eutaxie

$$a_X = \frac{\theta+8}{12}\ ,\ a_{X'} = \frac{17\theta+43}{72}\ ,\ b_Y = \frac{5\theta-17}{72} \ \text{ et }\ b_{Y'} = \frac{5\theta+28}{36}$$

tous positifs. La matrice M est donc dual-eutactique.

Par contre, ni M ni son inverse ne sont faiblement eutactiques : la matrice eutactique de la cellule de M est $(1, 1/2, (\sqrt{5}-1)/4)$, et celle de la cellule de M^{-1} est $(1, -1/2, (-3+\sqrt{13})/4) \not\sim M^{-1}$.

Un calcul formel sur $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ montre que le rang affine dans $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ des 20 matrices $x\,{}^t\!x$, $M^{-1}y\,{}^t\!yM^{-1}$, $x \in S(M), y \in S(M^{-1})$, est maximum $(= 15)$, de sorte que les matrices M et M^{-1} sont dual-parfaites. Enfin, voici quelques données numériques pour le couple (M, M^{-1}) :

$\det M = 2\sqrt{13} - 7$, $\min M^{-1} = \frac{\sqrt{13}+2}{3}$, $\gamma(M) \approx 1.3649 < \gamma(M^{-1}) \approx 1.3689$ (ceci confirme que la matrice n'est pas équivalente à son inverse).

On peut donc énoncer, dans la terminologie des réseaux et en exploitant les résultats de classification du §3 :

Proposition 1. *Soit Λ un réseau de matrice de Gram M.*

Les réseaux Λ et Λ^* (non semblables) sont dual-extrêmes, non parfaits et non eutactiques ; on a

$$\gamma'(\Lambda) = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{3}}, \quad s(\Lambda) = s(\Lambda^*) = 10, \quad |\operatorname{Aut}(\Lambda)| = 20.$$

Théorème 1. *Les réseaux réalisant un maximum local de l'invariant γ' parmi les G-réseaux sont semblables aux réseaux $\mathbb{D}_5$, $\mathbb{A}_5^3$, Λ, $\mathbb{A}_5$ ou à leurs duaux.*

La fonction d'Hermite duale γ' prend sur les réseaux $\mathbb{D}_5$, $\mathbb{A}_5^3$, Λ, $\mathbb{A}_5$ les valeurs $\sqrt{2} \approx 1.4142$, $\sqrt{2} \approx 1.4142$, $\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{3}} \approx 1.3669$ et $\sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1.2909$ (cf. figure 3).

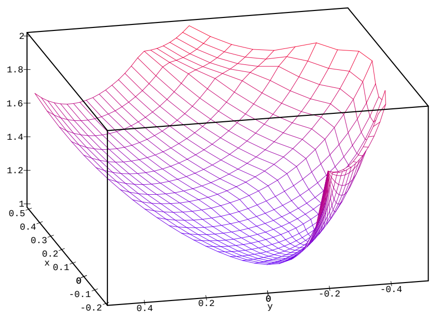

Figure 3 –

On peut donc conclure :

Corollaire 1. *La constante γ'_G équivariante est égale à $\sqrt{2}$, valeur atteinte seulement sur les réseaux semblables à $\mathbb{D}_5$, $\mathbb{A}_5^3$ ou à leurs duaux.*

5. G-réseaux isoduaux

Dans [CS], Conway et Sloane ont construit en petite dimension des réseaux semblables à leurs duaux qui détiennent les records actuels de densité. C'est en particulier le cas en dimension 5 du réseau mD_5, 25-modulaire de norme 7 ; c'est un G-réseau (G est toujours la représentation régulière du groupe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$), et l'on prouve ci-dessous qu'il est le plus dense parmi les G-réseaux isoduaux, avec $\gamma(mD_5) = \gamma'(mD_5) = \frac{7}{5} = 1.4$, à peine inférieure à la constante d'Hermite duale conjecturée $\gamma'_5 = \sqrt{2}$.

Théorème 2. *Les G-réseaux possédant n vecteurs minimaux indépendants sont isoduaux si et seulement s'ils sont semblables à un réseau Λ_t de matrice de Gram*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & b & c & c & b \\ b & 1 & b & c & c \\ c & b & 1 & b & c \\ c & c & b & 1 & b \\ b & c & c & b & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad b = \frac{t}{t^2+t+1} \quad \text{et} \quad c = -\frac{t^2+t}{t^2+t+1},$$

où $0 \le t \le 1/2$. *Le réseau $mD_5 \sim \Lambda_{\frac{1}{2}}$ est le G-réseau isodual le plus dense.*

En effet, on se place dans le domaine $\widetilde{\alpha_2} \cup \widetilde{\beta_1}$ stable par dualité. Après normalisation, la dualité se traduit dans ce domaine par l'involution $(1, b, c) \mapsto (1, b', c')$, avec

$$b' = \frac{b^2 + bc - c^2 - c}{-b^2 - bc - c^2 + b + c + 1} \qquad c' = \frac{-b^2 + bc + c^2 - b}{-b^2 - bc - c^2 + b + c + 1}.$$

Les points doubles de cette involution sont définis par

$$\begin{cases} b' = b \\ c' = c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-b)(b^2 + c^2 + bc + b + c) = 0 \\ (1-c)(b^2 + c^2 + bc + b + c) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow b^2 + c^2 + bc + b + c = 0$$

dans le domaine considéré. La matrice $A = (1, b, c)$ décrit donc un arc d'ellipse paramétré par

$$\begin{cases} b = \dfrac{t}{t^2+t+1} \\ c = -\dfrac{t^2+t}{t^2+t+1} \end{cases}, \text{ avec } 0 \le t \le 1/2.$$

On a alors $\gamma^2(A) = \gamma'^2(A) = \min(A^{-1}) = \frac{t^4+2t^3+3t^2+2t+1}{t^4-2t^3-t^2+2t+1}$, dont la dérivée a le signe et les annulations de $t(t+2)(t^2+t+1) \geq 0$ sur $[0, 1/2]$: l'invariant d'Hermite croît donc de 1 (réalisé sur la matrice $(1,0,0)$ représentant le réseau cubique) à $7/5$ réalisé sur la matrice $(1, 2/7, -3/7) \in \widetilde{\beta_1}$ qui représente la classe de similitude du réseau mD_5 de Conway et Sloane.

Bibliographie

[B] A.-M. Bergé, *Classification of positive forms having prescribed automorphisms.* Contemporary Mathematics **249** (1999), 199–204.

[BM1] A.-M. Bergé, J. Martinet, *Sur un problème de dualité lié aux sphères en géométrie des nombres* . J. Number Theory **32** (1989), 14–42.

[BM2] A.-M. Bergé, J. Martinet, *Sur la classification des réseaux eutactiques* . J. London Math. Soc **53** (1996), 417–432.

[BM3] A.-M. Bergé, J. Martinet, *Densité dans des familles de réseaux. Application aux réseaux isoduaux.* L'enseignement Mathématique **41** (1995), 335–365.

[BMS] A-M. Bergé, J. Martinet, F. Sigrist, *Une généralisation de l'algorithme de Voronoï.* Astérisque **209** (1992), 137–158.

[CS] J.H. Conway, N.J.A Sloane, *On Lattices Equivalent to Their Duals.* J. Number Theory **48** (1994), 373–382.

[M] J. Martinet, *Une famille de réseaux dual-extrêmes.* J. Th. Nombres de Bordeaux **9** (1997), 169–181.

Anne-Marie Bergé
Laboratoire de théorie des nombres
et d'Algorithmique Arithmétique
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence cedex
France
E-mail : berge@math.u-bordeaux.fr