Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **12** (2000), 581–595

Valeurs zêta multiples. Une introduction

par Michel WALDSCHMIDT

À Jacques Martinet, pour ses 60 ans

Résumé. Soit $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ un k-uplet d'entiers positifs avec $k \geq 1$. Pour $s_1 \geq 2$, la série

$$\sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} n_1^{-s_1} \cdots n_k^{-s_k}$$

converge et sa somme est notée $\zeta(\underline{s})$. Dans le cas $k = 1$ il s'agit simplement des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers positifs. Quelles relations algébriques existent entre ces nombres? Le produit $\zeta(\underline{s}')\zeta(\underline{s}'')$ de deux valeurs de fonctions zêta multiples est une combinaison linéaire de $\zeta(\underline{s})$, comme on le voit facilement en multipliant les séries : c'est le *produit de mélange lié aux séries*. D'autre part une autre expression pour le nombre $\zeta(\underline{s})$ est donnée par une intégrale itérée (intégrale de Chen); cela fournit une autre relation quadratique exprimant de nouveau le produit $\zeta(\underline{s}')\zeta(\underline{s}'')$ comme une combinaison linéaire de $\zeta(\underline{s})$: c'est le *produit de mélange lié aux intégrales*. On conjecture que ces deux produits de mélange suffisent à décrire toutes les relations algébriques entre les nombres $\zeta(\underline{s})$. Se pose alors le problème d'étudier l'algèbre engendrée par des générateurs (les *multizêta symboliques*) indexés par les k-uplets $\underline{s}$ et définie par les relations données par ces deux produits de mélange; on obtient ainsi l'algèbre MZV, dont Écalle est en train de déterminer la structure. Pour définir des séries génératrices permettant de coder simultanément tous les multizêta symboliques il convient d'inclure les $\underline{s}$ correspondant à des séries divergentes (avec $s_1 = 1$). Nous mentionnons enfin brièvement quelques résultats de l'équipe de Petitot sur les polylogarithmes, et encore plus brièvement plusieurs sujets connexes.

Abstract. For positive integers $s_1, \dots, s_k$ with $s_1 \geq 2$, the series

$$\sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} n_1^{-s_1} \cdots n_k^{-s_k}$$

converges and its sum is denoted by $\zeta(s_1, \dots, s_k)$. In case $k = 1$

Manuscrit reçu le 15 mars 2000.

this is nothing else than the value of the Riemann zeta function at the point s_1. What are the algebraic relations between these numbers? these numbers? The product of two multiple zeta values is again a multiple zeta value: this is easily checked by multiplying the two series, and using a “shuffle” product. An example is

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5),$$

There are other quadratic relations between these numbers, which arise from another expression of $\zeta(\underline{s}) = \zeta(s_1, \ldots , s_k)$ as a (Chen) iterated integral:

$$\zeta(\underline{s}) = \int_{\Delta_p} \omega_{\epsilon_1}(t_1) \cdots \omega_{\epsilon_p}(t_p),$$

with the following notation: $p = s_1 + \cdots + s_k$, the sequence $(\epsilon_1, \ldots , \epsilon_p)$ of elements in $\{0, 1\}$ is defined by writing the word

$$x_0^{s_1-1}x_1 \cdots x_0^{s_k-1}x_1 = x_{\epsilon_1} \cdots x_{\epsilon_p}$$

on the alphabet $X = \{x_0, x_1\}$, the differential forms ω_ϵ are defined by

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$$

and Δ_p is the following simplex in $\mathbb{R}^p$:

$$\Delta_p = \{\underline{t} \in \mathbb{R}^p \ ; \ 1 > t_1 > \cdots > t_p > 0\}.$$

Again this yields an expression of the product of two multiple zeta values as a linear combination of multiple zeta values, a simple example being

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1).$$

The main conjecture is that these two types of relations are sufficient to describe all algebraic relations between these numbers.

This subject has deep connections with many other mathematical topics: combinatoric (the theory of quasisymmetric functions, Radford’s Theorem and Lyndon words), Lie and Hopf algebras, Écalle’s theory of resurgent series, Goncharov’s work on mixed Tate motives on Spec$\mathbb{Z}$, polylogarithms, monodromy of differential equations, the fundamental group of the projective line minus three points and Belyi’s Theorem, the absolute Galois group of $\mathbb{Q}$, the group of Grothendieck-Teichmüller, knots theory and Vassiliev invariants, K-theory, Feynman diagrams and quantum field theory, quasi-triangular quasi-Hopf algebras and Drinfeld’s associator Φ_{KZ} (related to the connexion of Knizhnik-Zamolodchikov).

1. Le produit de mélange lié aux séries

Précisons pour commencer que la définition que nous avons choisie

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1>\cdots>n_k\geq 1} n_1^{-s_1} \cdots n_k^{-s_k}$$

est celle utilisée, par exemple, par M. Hoffman, tandis que D. Zagier et A.B. Goncharov utilisent l'ordre opposé $1 \leq n_1 < \cdots < n_k$.

Pour s et s' entiers ≥ 2, le produit

$$\zeta(s)\zeta(s') = \sum_{n\geq 1} n^{-s} \cdot \sum_{n'\geq 1} (n')^{-s'}$$

s'écrit (*formule de réflexion*)

$$\sum_{n>n'\geq 1} n^{-s}(n')^{-s'} + \sum_{n'>n\geq 1} n^{-s}\,(n')^{-s'} + \sum_{n\geq 1} n^{-s-s'}$$
$$= \zeta(s,s') + \zeta(s',s) + \zeta(s+s').$$

Plus généralement, soient $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ et $\underline{s}' = (s'_1, \ldots, s'_{k'})$ deux suites finies de nombres entiers ≥ 1 avec $s_1 \geq 2$ et $s'_1 \geq 2$. Le produit de $\zeta(\underline{s})$ par $\zeta(\underline{s}')$ est la somme des $\zeta(\underline{\sigma})$ pour les $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_h)$ obtenus par *mélange* à partir de $\underline{s}$ et $\underline{s}'$ de la manière suivante : on insère, dans la suite $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ de même que dans la suite $\underline{s}' = (s'_1, \ldots, s'_{k'})$, des 0 (y compris éventuellement avant le premier et après le dernier terme) de telle sorte qu'on obtienne deux suites de même longueur sans avoir deux 0 de même indice, et on définit $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_h)$ comme la somme (termes à termes) des deux suites ainsi obtenues. Par exemple pour $k = k' = 1$ on trouve trois possibilités pour $\underline{\sigma}$:

$$\begin{array}{c} \underline{s} \\ \underline{s}' \\ \hline \underline{\sigma} \end{array} : \qquad \begin{array}{cc} s & 0 \\ 0 & s' \\ \hline s & s' \end{array}, \quad \begin{array}{cc} 0 & s \\ s' & 0 \\ \hline s' & s \end{array}, \quad \begin{array}{c} s \\ s' \\ \hline s+s' \end{array}.$$

La *relation de mélange liée aux séries* s'écrit alors

$$\zeta(\underline{s})\zeta(\underline{s}') = \sum_{\underline{\sigma}} \zeta(\underline{\sigma}),$$

où $\underline{\sigma}$ décrit les suites $(\sigma_1, \ldots, \sigma_h)$ $(h \geq 1)$ ainsi obtenues à partir de $\underline{s}$ et $\underline{s}'$. L'indice h décrit l'intervalle $[\max\{k,k'\}, k+k']$.

Voici une autre description (équivalente) de ce produit de mélange. On considère les mots construits sur l'alphabet à deux lettres $X = \{x_0, x_1\}$. À chaque entier strictement positif s on associe le mot $y_s = x_0^{s-1}x_1$, et à chaque suite finie $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ (avec $k \geq 1$) formée d'entiers strictement positifs on associe le mot $x_{\underline{s}} = y_{s_1} \cdots y_{s_k}$. Ainsi $x_{\underline{s}}$ est une suite de x_0 et de x_1, le nombre k de facteurs x_1 est la *profondeur* (*depth*, encore appelée *longueur*) du mot $x_{\underline{s}}$ (ou du multi-indice $\underline{s}$), tandis que le nombre $p = s_1 + \cdots + s_k$ de lettres en est le *poids* (*weight*). On désigne par X^* l'ensemble de tous les mots en x_0, x_1, et par $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ l'anneau des polynômes en deux variables non commutatives x_0, x_1 à coefficients rationnels (ce sont les combinaisons linéaires de mots à coefficients rationnels). Les mots associés à une suite $\underline{s}$ sont ceux qui terminent par x_1, et leur ensemble est

X^*x_1. Les *mots convergents* sont, outre le mot vide, ceux de $x_0X^*x_1$, qui commencent par x_0 et terminent par x_1, c'est-à-dire ceux qui s'écrivent $x_{\underline{s}}$ avec $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ et $s_1 \geq 2$; pour un tel mot w on pose $\zeta(w) = \zeta(\underline{s})$. Pour $k = 0$ la suite $\underline{s} = \emptyset$ est codée par le mot vide que nous noterons e. Il est commode de convenir que $\zeta(\emptyset) = \zeta(e) = 1$.

On prolonge par linéarité la définition de $\zeta(w)$ aux *polynômes convergents*, qui sont les éléments w de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ s'écrivant comme combinaisons linéaires (à coefficients rationnels) de mots de l'ensemble $x_0X^*x_1$.

On définit (par récurrence sur la longueur) une loi associative et commutative $*$ sur l'ensemble X^*x_1 de la manière suivante : on a d'abord

$$e * w = w$$

pour tout w dans X^*x_1, et ensuite, pour s et t entiers strictement positifs, w et w' dans X^*x_1,

$$(y_s w) * (y_t w') = y_s(w * y_t w') + y_t(y_s w * w') + y_{s+t}(w * w').$$

On vérifie alors, avec les notations précédentes,

$$x_{\underline{s}} * x'_{\underline{s}} = \sum_{\underline{\sigma}} x_{\underline{\sigma}},$$

ce qui signifie que les relations de mélange introduites ci-dessus s'écrivent, pour w et w' dans $x_0X^*x_1$,

$$\zeta(w)\zeta(w') = \zeta(w * w'). \tag{1}$$

Ce produit de mélange est lié à la théorie des fonctions "quasi-symétriques". Soit $\underline{t} = \{t_1, t_2, \dots\}$ un alphabet commutatif infini. On considère l'algèbre $\mathbb{Q}[[\underline{t}]]$ des séries formelles en ces variables. Une série $F(\underline{t}) \in \mathbb{Q}[[\underline{t}]]$ est *quasi-symétrique* si pour tout $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ le coefficient dans $F(\underline{t})$ de tout monôme $t_{i_1}^{s_1} \cdots t_{i_k}^{s_k}$ avec $i_1 > \cdots > i_k$ ne dépend pas du multi-indice $(i_1, \dots, i_k)$. Le produit de deux séries quasi-symétriques est encore quasi-symétrique. À chaque mot $w = y_{s_1} \cdots y_{s_k} \in X^*x_1$ on associe la série quasi-symétrique

$$F_w(\underline{t}) = \sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} t_{n_1}^{s_1} \cdots t_{n_k}^{s_k}.$$

Pour tous w et w' dans X^*x_1 on a

$$F_w(\underline{t})F_{w'}(\underline{t}) = F_{w*w'}(\underline{t}).$$

Si w est un mot convergent alors $\zeta(w)$ est la valeur de $F_w(\underline{t})$ quand on spécialise chaque t_n en $1/n$, $(n \geq 1)$.

2. Le produit de mélange lié aux intégrales

Un autre codage des mots de X^*x_1 va nous être utile. À toute suite $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ d'entiers strictement positifs de poids $p = s_1 + \cdots + s_k$ on associe la suite $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ d'éléments de $\{0,1\}$ définie par

$$x_{\underline{s}} = x_{\epsilon_1} \cdots x_{\epsilon_p}.$$

On introduit les deux formes différentielles

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}.$$

On désigne par Δ_p le simplexe suivant de $\mathbb{R}^p$:

$$\Delta_p = \{\underline{t} \in \mathbb{R}^p \ ; \ 1 > t_1 > \cdots > t_p > 0\}.$$

Proposition 1. *Si, de plus, $s_1 \geq 2$, alors*

$$\zeta(\underline{s}) = \int_{\Delta_p} \omega_{\epsilon_1}(t_1) \cdots \omega_{\epsilon_p}(t_p).$$

On vérifie facilement cette relation en développant $1/(1-t)$ en série entière à l'origine.

On peut écrire l'intégrale intervenant dans l'énoncé de la proposition comme une *intégrale itérée* (ou *intégrale de Chen*) définie de la manière suivante.

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes différentielles sur $\mathbb{R}$. On définit par récurrence

$$\int_{\mathrm{Ch}}^t \varphi_n \cdots \varphi_1 = \int_0^t \left(\varphi_n(s) \int_{\mathrm{Ch}}^s \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1 \right),$$

avec, pour $n = 1$,

$$\int_{\mathrm{Ch}}^t \varphi_1 = \int_0^t \varphi_1.$$

Ainsi

$$\zeta(\underline{s}) = \int_{\mathrm{Ch}}^1 \omega_{\epsilon_1} \cdots \omega_{\epsilon_p}.$$

On peut aussi définir les intégrales de Chen en introduisant d'abord le produit (associatif et non commutatif) $\alpha \# \beta$ de deux formes différentielles α et β :

$$\alpha \# \beta := \alpha P$$

où

$$P(t) = \int_0^t \beta$$

est la primitive de β nulle en 0. Alors

$$\int_{\mathrm{Ch}}^t \varphi_n \cdots \varphi_1 = \int_0^t \varphi_n \# \cdots \# \varphi_1.$$

La proposition précédente s'écrit ainsi : *quand* $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ *est convergent* ($s_1 \geq 2$), *on a*

$$\zeta(\underline{s}) = \int_0^1 \varphi_{s_1} \# \cdots \# \varphi_{s_k},$$

où, pour s entier ≥ 1, on a posé

$$\varphi_s := \omega_0^{\#(s-1)} \# \omega_1.$$

De cette proposition on va déduire la relation de mélange liée aux intégrales. On définit (par récurrence sur le poids p) un produit $\sqcup\!\sqcup$ (*shuffle*, encore appelé *intercalement* ou *battage*) sur X^* de la manière suivante :

$$e \sqcup\!\sqcup w = w \sqcup\!\sqcup e = w,$$

et ensuite, pour i et j dans $\{0,1\}$, u et v dans X^*,

$$(x_i u) \sqcup\!\sqcup (x_j v) = x_i(u \sqcup\!\sqcup x_j v) + x_j(x_i u \sqcup\!\sqcup v)$$

(on notera ici l'absence du terme diagonal qui apparaissait dans la loi $*$ du produit de mélange lié aux séries). On vérifie alors que les relations

$$\zeta(w)\zeta(w') = \zeta(w \sqcup\!\sqcup w') \tag{2}$$

sont satisfaites pour tout w et w' dans $x_0 X^* x_1$. Pour cela on décompose le produit cartésien $\Delta_p \times \Delta_{p'}$ de deux simplexes en réunion disjointe (aux bords près) de $(p+p')!/p!p'!$ simplexes.

Ces relations (2) permettent d'exprimer le produit $\zeta(\underline{s})\zeta(\underline{s}')$, où $\underline{s}$ a pour poids p et $\underline{s}'$ pour poids p', comme une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de valeurs $\zeta(\underline{s}'')$. La somme des coefficients est $(p+p')!/p!p'!$.

Par exemple de l'égalité

$$y_2 \sqcup\!\sqcup y_3 = y_2 y_3 + 3 y_3 y_2 + 6 y_4 y_1$$

on déduit

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1).$$

Quand on combine cette relation avec celle du mélange liée aux séries qui donne

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5),$$

on obtient

$$\zeta(5) = 2\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1).$$

On étend par linéarité $\sqcup\!\sqcup$ à l'algèbre des polynômes non commutatifs $\mathbb{Q}\langle X\rangle$, ce qui donne une algèbre commutative et associative $\mathrm{Sh}_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$. La structure de cette algèbre est décrite par le *Théorème de Radford* : c'est l'algèbre des polynômes sur l'ensemble L des "mots de Lyndon" :

$$\mathrm{Sh}_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle = \mathbb{Q}[L].$$

Un *mot de Lyndon* est un mot non vide dans X^* qui est inférieur à tous ses facteurs à droite stricts pour l'ordre lexicographique, avec $x_0 < x_1$. À part x_0 et x_1, ils commencent tous par x_0 et terminent par x_1 : ce sont donc des mots convergents.

3. Les algèbres MZV

Nous nous sommes restreints jusqu'à présent aux mots convergents $w \in x_0X^*x_1$. Si on désire éviter d'étendre la définition de $\zeta(w)$ à X^*x_1, il convient alors de remarquer que pour w dans $x_0X^*x_1$, on peut écrire $x_1 ⧢ w - x_1 * w$ comme combinaison linéaire de mots convergents. En combinant (formellement) les deux relations de mélange, on déduit alors

$$\zeta(x_1 ⧢ w - x_1 * w) = 0 \quad \text{pour tout } w \in x_0X^*x_1. \tag{3}$$

Un exemple de telle relation (connue d'Euler, qui en connaissait d'ailleurs beaucoup d'autres!) est

$$\zeta(3) = \zeta(2,1),$$

que l'on déduit de (3) en prenant $w = x_0x_1$:

$$x_1 ⧢ (x_0x_1) - x_1 * (x_0x_1) = x_0x_1^2 - x_0^2x_1.$$

On introduit des symboles (*multizêta symboliques*) $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ pour chaque $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$, pour $k \geq 0$ et s_i entiers positifs. On définit aussi $\mathrm{Ze}(w)$ pour tout w dans X^*x_1 par $\mathrm{Ze}(x_{\underline{s}}) = \mathrm{Ze}(\underline{s})$. Un symbole $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ est dit *convergent* si $s_1 \geq 2$ ou $k = 0$: ce sont les $\mathrm{Ze}(w)$ pour w dans $x_0X^*x_1$ sans oublier $\mathrm{Ze}(e) = \mathrm{Ze}(\emptyset)$.

On considère d'abord $\mathrm{MZV}_{\mathrm{conv}}$ (*"multiple zêta values" convergentes*) comme étant l'algèbre commutative sur $\mathbb{Q}$ définie par les générateurs convergents $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ et les relations quadratiques *standard*, qui sont celles que l'on déduit de (1), (2) et (3) en remplaçant $\zeta(w)$ par $\mathrm{Ze}(w)$:

$$\mathrm{Ze}(w)\mathrm{Ze}(w') = \mathrm{Ze}(w * w') \quad \text{pour } w \text{ et } w' \text{ dans } x_0X^*x_1, \tag{1'}$$

$$\mathrm{Ze}(w)\mathrm{Ze}(w') = \mathrm{Ze}(w ⧢ w') \quad \text{pour } w \text{ et } w' \text{ dans } x_0X^*x_1, \tag{2'}$$

$$\mathrm{Ze}(x_1 ⧢ w - x_1 * w) = 0 \quad \text{pour tout } w \in x_0X^*x_1. \tag{3'}$$

On dispose donc d'un morphisme naturel de spécialisation de cette algèbre dans $\mathbb{C}$, qui envoie $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ sur $\zeta(\underline{s})$. La conjecture principale est :

Conjecture Diophantienne. *Le morphisme de l'algèbre* $\mathrm{MZV}_{\mathrm{conv}}$ *dans* $\mathbb{C}$ *qui envoie* $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ *sur* $\zeta(\underline{s})$ *est injectif.*

En d'autres termes toutes les relations de dépendance algébrique entre les nombres $\zeta(\underline{s})$, $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$, $s_1 \geq 2$, $s_j \geq 1$ $(2 \leq j \leq k)$ proviennent (conjecturalement) des relations quadratiques fournies par les deux produits de mélange.

On va maintenant inclure parmi les générateurs les symboles $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ avec $s_1 = 1$.

Définition. L'algèbre MZV^* (resp. $\mathrm{MZV}^{\sqcup\!\sqcup}$) est l'algèbre (sur $\mathbb{Q}$, pour fixer les idées) commutative définie par les générateurs $\mathrm{Ze}(\underline{s})$, où $\underline{s}$ décrit l'ensemble de toutes les suites finies $(s_1, \ldots, s_k)$ (avec $k \geq 0$) d'entiers positifs, et la loi $*$ (resp. $\sqcup\!\sqcup$) définie par

$$\mathrm{Ze}(w) * \mathrm{Ze}(w') = \mathrm{Ze}(w * w') \quad (\text{resp. } \mathrm{Ze}(w) \sqcup\!\sqcup \mathrm{Ze}(w') = \mathrm{Ze}(w \sqcup\!\sqcup w')\ )$$

pour tout $w \in X^* x_1$.

Chacune de ces deux algèbres contient la sous-algèbre correspondante, notée $\mathrm{MZV}^*_{\mathrm{conv}}$ et $\mathrm{MZV}^{\sqcup\!\sqcup}_{\mathrm{conv}}$ respectivement, obtenue en ne prenant comme générateurs que les $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ avec $s_1 \geq 2$. L'algèbre $\mathrm{MZV}_{\mathrm{conv}}$ est à la fois quotient de $\mathrm{MZV}^*_{\mathrm{conv}}$ par les relations $(2')$ et $(3')$, et de $\mathrm{MZV}^{\sqcup\!\sqcup}_{\mathrm{conv}}$ par les relations $(1')$ et $(3')$.

On aimerait bien étendre le morphisme de spécialisation, qui est défini sur $\mathrm{MZV}_{\mathrm{conv}}$, à chacune des deux algèbres MZV^* et $\mathrm{MZV}^{\sqcup\!\sqcup}$. Ce n'est pas possible *simultanément* pour la simple raison suivante : comme

$$x_1 * x_1 = 2x_1^2 + x_0 x_1 \quad \text{et} \quad x_1 \sqcup\!\sqcup x_1 = 2x_1^2,$$

on a

$$\mathrm{Ze}(x_1) * \mathrm{Ze}(x_1) = 2\mathrm{Ze}(x_1^2) + \mathrm{Ze}(x_0 x_1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ze}(x_1) \sqcup\!\sqcup \mathrm{Ze}(x_1) = 2\mathrm{Ze}(x_1^2),$$

mais $\zeta(2) = \pi^2/6$ n'est pas nul! On peut cependant le faire séparément pour chacune des deux lois. On vérifie en effet que chacune des deux algèbres MZV^* et $\mathrm{MZV}^{\sqcup\!\sqcup}$ est constituée des polynômes en $\mathrm{Ze}(1)$ à coefficients dans la sous-algèbre convergente correspondante :

$$\mathrm{MZV}^* = \mathrm{MZV}^*_{\mathrm{conv}}[\mathrm{Ze}(1)] \quad \text{et} \quad \mathrm{MZV}^{\sqcup\!\sqcup} = \mathrm{MZV}^{\sqcup\!\sqcup}_{\mathrm{conv}}[\mathrm{Ze}(1)].$$

Par conséquent pour chaque $\theta \in \mathbb{C}$, et pour chacune des deux lois $*$ et $\sqcup\!\sqcup$, il existe une manière unique de définir, pour toute famille finie $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ d'entiers ≥ 1, la valeur *régularisée* $\zeta^{\mathrm{reg},*}(\underline{s})$ (resp $\zeta^{\mathrm{reg},\sqcup\!\sqcup}(\underline{s})$) de telle sorte que

(a) Pour $k = 1$ et $s = 1$ on ait

$$\zeta^{\mathrm{reg},*}(1) = \theta \qquad (\text{resp } \zeta^{\mathrm{reg},\sqcup\!\sqcup}(1) = \theta).$$

(b) Pour tout w et w' dans $X^* x_1$, on ait

$$\zeta^{\mathrm{reg},*}(w * w') = \zeta^{\mathrm{reg},*}(w)\zeta^{\mathrm{reg},*}(w')$$
$$(\text{resp } \zeta^{\mathrm{reg},\sqcup\!\sqcup}(w \sqcup\!\sqcup w') = \zeta^{\mathrm{reg},\sqcup\!\sqcup}(w)\zeta^{\mathrm{reg},\sqcup\!\sqcup}(w')).$$

(c) Pour tout $\underline{s}$ convergent on ait

$$\zeta^{\mathrm{reg},*}(\underline{s}) = \zeta(\underline{s}) \qquad (\text{resp } \zeta^{\mathrm{reg},\sqcup\!\sqcup}(\underline{s}) = \zeta(\underline{s})).$$

On peut choisir par exemple pour θ la constante d'Euler (que nous désignerons par γ), mais Écalle préfère prendre $\theta = 0$.

Comme on l'a vu, on a alors

$$\zeta^{\mathrm{reg},*}(1,1) = \frac{1}{2}\zeta^{\mathrm{reg},*}(1)^2 - \frac{1}{2}\zeta(2) \quad \text{et} \quad \zeta^{\mathrm{reg},ш}(1,1) = \frac{1}{2}\zeta^{\mathrm{reg},ш}(1)^2.$$

Plus généralement, en notant $1^{(p)}$ la suite $(1,\ldots,1)$ codée par x_1^p (bien entendu la suite de longueur nulle $1^{(0)} = \emptyset$ est codée par le mot vide e), on a

$$\zeta^{\mathrm{reg},ш}(1^{(p)}) = \frac{1}{p!}\zeta^{\mathrm{reg},ш}(1)^p,$$

tandis que

$$\sum_{p\geq 0}\zeta^{\mathrm{reg},*}(1^{(p)})z^p = \exp\left\{\zeta^{\mathrm{reg},*}(1)z - \sum_{k\geq 2}(-1)^k\zeta(k)\frac{z^k}{k}\right\}.$$

Cette dernière formule, qu'il est intéressant de comparer avec le développement pour la fonction Gamma d'Euler :

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = \exp\left\{\gamma z - \sum_{k\geq 2}(-1)^k\zeta(k)\frac{z^k}{k}\right\},$$

se déduit des relations de Newton concernant les fonctions symétriques : en posant, pour $s \geq 0$,

$$\psi_s(\underline{t}) = \sum_{n\geq 1} t_n^s \quad \text{et} \quad \sigma_s(\underline{t}) = \sum_{n_1>\cdots>n_s\geq 1} t_{n_1}\cdots t_{n_s},$$

on a dans $\mathbb{Q}[[\underline{t}]]$

$$\sum_{s\geq 0}\sigma_s(\underline{t})z^s = \exp\left\{-\sum_{k\geq 1}(-1)^k\psi_k(\underline{t})\frac{z^k}{k}\right\}.$$

Revenons à la conjecture diophantienne. Pour qu'elle permette *effectivement* de décrire conjecturalement toutes les relations entre les valeurs de fonctions zêta multiples, il faut encore savoir décrire $\mathrm{MZV}_{\mathrm{conv}}$. Les travaux récents d'Écalle vont dans ce sens (voir § 4).

Goncharov conjecture que l'algèbre $\mathrm{MZV}_{\mathrm{conv}}$ est duale de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie engendrée par des générateurs $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_5, \ldots, \varphi_{2n+1}, \ldots$, avec les seules relations $[\varphi_2, \varphi_{2n+1}] = 0$ pour tout $n \geq 1$.

L'énoncé suivant, conjecturé par Zagier, Drinfeld, Kontsevich et Goncharov, décrit la dimension d_p du sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathrm{MZV}_{\mathrm{conv}}$ engendré par les 2^{p-2} éléments $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ avec $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ de poids p et $s_1 \geq 2$:

Conjecture. *On a $d_1 = 0$, $d_2 = d_3 = d_4 = 1$ et $d_p = d_{p-2} + d_{p-3}$ pour $p \geq 4$.*

Pour chaque $p \geq 0$, définissons $\mathcal{Z}_p$ comme le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ avec $\underline{s}$ (convergent) de poids p et $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}$. Alors la somme des $\mathcal{Z}_p$ $(p \geq 0)$ est directe, et la dernière conjecture s'énonce de manière équivalente :

$$\sum_{p \geq 0} q^p \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_p = \frac{1}{1 - q^2 - q^3}.$$

4. Fonctions Génératrices

Quand on dispose des $\zeta(w)$ pour tous les $w \in X^* x_1$ et pas seulement pour les mots convergents, on peut les insérer tous simultanément dans des séries génératrices.

Pour montrer que l'algèbre $\mathrm{MZV}_{\mathrm{conv}}$ est librement engendrée par une sous-famille d'irréductibles, Écalle introduit des fonctions génératrices qui possèdent un grand nombre de symétries. Ainsi, pour chaque entier $k = 0, 1, \ldots$, il définit

$$\mathrm{Zig}(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{s_1 \geq 1} \cdots \sum_{s_k \geq 1} \mathrm{Ze}(\underline{s}) v_1^{s_1 - 1} \cdots v_k^{s_k - 1}.$$

Si on sommait formellement en remplaçant $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ par $\zeta(\underline{s})$ (même pour $s_1 = 1$, bien que la série définissant $\zeta(\underline{s})$ diverge), en permutant les signes de sommation on trouverait, à la place de $\mathrm{Zig}(v_1, \ldots, v_k)$, la série

$$\sum_{n_1 > \cdots > n_k > 0} \frac{1}{(n_1 - v_1) \cdots (n_k - v_k)}.$$

La série Zig est donc un substitut pour cette dernière série divergente. Noter que pour $k = 1$ une régularisation de la série est

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n - v} - \frac{1}{n} \right) = -\frac{\Gamma'(-v)}{\Gamma(-v)} - \gamma + \frac{1}{v}.$$

Définissons aussi des $\mathrm{Wa}(\underline{s})$ liés aux $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ par la relation

$$\mathrm{Wa}(s_1, \ldots, s_k) = \mathrm{Ze}(1 + s_k, \ldots, 1 + s_1)$$

dans le cas convergent $s_1 > 1$ et par une relation analogue mais un peu plus compliquée dans le cas divergent $s_1 = 1$, puis associons aux $\mathrm{Wa}(\underline{s})$ la série génératrice

$$\mathrm{Wag}(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{s_1 \geq 1} \cdots \sum_{s_k \geq 1} \mathrm{Wa}(\underline{s}) u_1^{s_1} (u_1 + u_2)^{s_2} \cdots (u_1 + \cdots + u_k)^{s_k}.$$

Les familles $\mathrm{Ze}(\underline{s})$ et $\mathrm{Wa}(\underline{s})$ sont des exemples de “moules” au sens d'Écalle. Un anneau (commutatif) étant donné, un *moule* est la donnée, pour chaque suite finie $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ de longueur arbitraire $k \geq 0$, d'un élément $M^{\underline{s}}$ de cet anneau. Un tel moule est noté $M^\bullet$. À $k = 0$ correspond $M^\emptyset$. L'addition de deux moules $A^\bullet$ et $B^\bullet$ est le moule $(A + B)^\bullet$ qui à $\underline{s}$ associe l'élément

$(A+B)^{\underline{s}} := A^{\underline{s}} + B^{\underline{s}}$ de l'anneau. La multiplication de deux moules est définie de la manière suivante :

$$A^\bullet B^\bullet = C^\bullet$$

où

$$\begin{aligned} C^{\underline{s}} &= \sum_{\underline{s}=\underline{s}'\underline{s}''} A^{\underline{s}'} B^{\underline{s}''} \\ &= A^{\emptyset} B^{\underline{s}} + A^{(s_1)} B^{(s_2,\dots,s_k)} + \cdots + A^{\underline{s}} B^{\emptyset}. \end{aligned}$$

Dans la première somme, $\underline{s}'\underline{s}''$ est la suite obtenue par concaténation de $\underline{s}'$ et $\underline{s}''$.

Une troisième opération sur les moules est utile : la composition

$$A^\bullet \circ B^\bullet = C^\bullet$$

où

$$C^{\underline{s}} = \sum_{\ell>0} \sum_{\substack{\underline{s}^1\cdots\underline{s}^\ell=\underline{s} \\ \underline{s}^i\neq\emptyset}} A^{(|\underline{s}^1|,\dots,|\underline{s}^\ell|)} B^{\underline{s}^1} \cdots B^{\underline{s}^\ell},$$

et $|\underline{s}|$ désigne le poids $p = s_1 + \cdots + s_k$ de $\underline{s}$.

Multiplication et composition sont associatives, non commutatives.

Sur ces objets Écalle définit six types de symétrie : partant de deux suites $\underline{s}'$ et $\underline{s}''$ il introduit trois ensembles $\mathrm{Sha}(\underline{s}', \underline{s}'')$, $\mathrm{She}(\underline{s}', \underline{s}'')$, $\mathrm{Shi}(\underline{s}', \underline{s}'')$. Le premier est obtenu par le mélange des deux suites, pour le second on ajoute les termes obtenus en contractant deux termes "adjacents" (voir les exemples ci-dessous), et pour le troisième au lieu de les ajouter on fait une différence symétrique.

Quand la somme des $M^{\underline{s}}$ pour les $\underline{s}$ dans cet ensemble $\mathrm{Sha}(\underline{s}', \underline{s}'')$, $\mathrm{She}(\underline{s}', \underline{s}'')$ ou $\mathrm{Shi}(\underline{s}', \underline{s}'')$ est égale à $M^{\underline{s}'} M^{\underline{s}''}$, on dit que le moule est *symétral, symétrel* ou *symétril* respectivement. Si la somme correspondante est nulle, alors le moule est *alternal, alternel* ou *alternil*. Par exemple un moule symétral satisfait

$$M^{s_1} M^{s_2} = M^{s_1,s_2} + M^{s_2,s_1}$$

et

$$M^{s_1} M^{s_2,s_3} = M^{s_1,s_2,s_3} + M^{s_2,s_1,s_3} + M^{s_2,s_3,s_1},$$

pour un moule symétrel on a

$$M^{s_1} M^{s_2} = M^{s_1,s_2} + M^{s_2,s_1} + M^{s_1+s_2}$$

et

$$M^{s_1} M^{s_2,s_3} = M^{s_1,s_2,s_3} + M^{s_2,s_1,s_3} + M^{s_2,s_3,s_1} + M^{s_1+s_2,s_3} + M^{s_2,s_1+s_3},$$

et enfin pour un moule symétril

$$M^{s_1} M^{s_2} = M^{s_1,s_2} + M^{s_2,s_1} + \frac{1}{s_1 - s_2}(M^{s_1} - M^{s_2})$$

et

$$\begin{aligned} M^{s_1}M^{s_2,s_3} &= M^{s_1,s_2,s_3} + M^{s_2,s_1,s_3} + M^{s_2,s_3,s_1} \\ &\quad + \frac{1}{s_1-s_2}(M^{s_1,s_3} - M^{s_2,s_3}) + \frac{1}{s_1-s_3}(M^{s_2,s_1} - M^{s_2,s_3}). \end{aligned}$$

Le moule $\mathrm{Wa}^\bullet$ est symétral, tandis que $\mathrm{Ze}^\bullet$ est symétrel et que la série Zig définit un moule symétril. Par exemple les formules de réflexion

$$\mathrm{Ze}(s_1)\mathrm{Ze}(s_2) = \mathrm{Ze}(s_1,s_2) + \mathrm{Ze}(s_2,s_1) + \mathrm{Ze}(s_1+s_2)$$

se traduisent par

$$\mathrm{Zig}(v_1)\mathrm{Zig}(v_2) = \mathrm{Zig}(v_1,v_2) + \mathrm{Zig}(v_2,v_1) + \frac{1}{v_1-v_2}\big(\mathrm{Zig}(v_1) - \mathrm{Zig}(v_2)\big).$$

Pour rigidifier la situation Écalle considère aussi, pour $\sigma_1,\dots,\sigma_k$ racines de l'unité, ce qu'il appelle les *multizêta modulés*

$$\begin{aligned} \zeta(\underline{s};\underline{\sigma}) = \zeta(s_1,\dots,s_k;\sigma_1,\dots,\sigma_k) &= \sum_{n_1>\dots>n_k\geq 1} \frac{\sigma_1^{n_1}\cdots\sigma_k^{n_k}}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}} \\ &= \int_{\Delta_p} \omega_0^{s_1-1}\omega_{\sigma_1}\omega_0^{s_2-1}\omega_{\sigma_1\sigma_2}\cdots\omega_0^{s_k-1}\omega_{\sigma_1\cdots\sigma_k}, \end{aligned}$$

où, pour σ racine de l'unité, on a posé

$$\omega_\sigma(t) = \frac{\sigma dt}{1-\sigma t}\cdot$$

Ces nombres $\zeta(\underline{s};\underline{\sigma})$ apparaissent déjà chez Nielsen en 1904, et aussi plus récemment dans des travaux de A.B. Goncharov concernant les motifs de Tate mixtes sur $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$.

Écalle introduit alors les *bimoules* (moules indexés par des suites doubles), sur lesquels il définit de nouvelles opérations swap, rec, neg et push, à partir de quoi il construit une algèbre de Lie ARI, munie de sous-algèbres ARIM, ARITH, ARITHM et ARITHMÉ, le groupe de Lie GARI (et son sous-groupe de Lie GARITHMÉ), avec des correspondances EXP et LOG entre ARI et GARI. L'introduction de ces objets par Écalle a pour but d'établir que les multizêta symboliques $\mathrm{Ze}(s)$ sont librement engendrés par une sous-famille d'irréductibles canoniques, et de décrire une décomposition explicite programmable des multizêta symboliques en ces irréductibles. Par exemple les irréductibles canoniques d'Écalle de poids ≤ 10 ne sont autres que

$$\mathrm{Ze}(2),\ \mathrm{Ze}(3),\ \mathrm{Ze}(5),\ \mathrm{Ze}(7),\ \mathrm{Ze}(9)$$

ainsi que deux éléments qui coïncident avec $\mathrm{Ze}(6,2)$ et $\mathrm{Ze}(8,2)$ modulo les polynômes en les cinq termes précédents.

5. Polylogarithmes

Le *polylogarithme* classique $\mathrm{Li}_s(z)$, pour s entier ≥ 1 et $|z| < 1$, est

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^s}.$$

Plus généralement, les *fonctions polylogarithmes* sont définies, pour $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ avec s_i entiers ≥ 1, par

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{\underline{s}}(z) &= \sum_{n_1>\cdots>n_k\geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}}\\ &= \int_0^z \omega_0^{\#(s_1-1)} \# \omega_1 \# \cdots \# \omega_0^{\#(s_k-1)} \# \omega_1,\end{aligned}$$

qui converge pour $|z| < 1$. Si, de plus, $s_1 \geq 2$, alors la série et l'intégrale convergent absolument sur tout le disque unité fermé $|z| \leq 1$, et on a

$$\mathrm{Li}_{\underline{s}}(1) = \zeta(\underline{s}).$$

On écrit encore $\mathrm{Li}_w(z) = \mathrm{Li}_{\underline{s}}(z)$ quand $\underline{s}$ est codé par le mot $w \in X^*x_1$:

$$\mathrm{Li}_w(z) = \int_{\mathrm{Ch}}^z \omega_{\epsilon_1}\cdots\omega_{\epsilon_p}$$

quand $w = x_{\epsilon_1}\cdots x_{\epsilon_p}$. La condition $\epsilon_p = 1$ garantit la convergence de l'intégrale.

L'exemple le plus simple avec $k = 1$, $s_1 = 1$, $x = x_1$ est

$$\mathrm{Li}_1(z) = \mathrm{Li}_{x_1}(z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t} = -\log(1-z).$$

Pour tout $w \in X^*x_1$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{x_0w}(z) &= \int_0^z \mathrm{Li}_w(t)\frac{dt}{t},\\ \mathrm{Li}_{x_1w}(z) &= \int_0^z \mathrm{Li}_w(t)\frac{dt}{1-t},\end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned}z\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_{\underline{s}}(z) &= \mathrm{Li}_{(s_1-1,s_2,\dots,s_k)}(z) \quad \text{si } s_1 \geq 2,\\ (1-z)\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_{\underline{s}}(z) &= \mathrm{Li}_{(s_2,\dots,s_k)}(z) \quad \text{si } s_1 = 1.\end{aligned}$$

Afin de définir une série génératrice, il faut encore étendre la définition de $\mathrm{Li}_w(z)$ à tous les mots w, même ceux qui ne terminent pas par x_1. Une méthode de régularisation des intégrales divergentes consiste à intégrer à partir de 1 au lieu de 0 quand l'intégrale diverge. Ainsi on pose

$$\mathrm{Li}_{x_0}(z) = \int_1^z \frac{dt}{t} = \log z, \quad \mathrm{Li}_{x_0^2}(z) = \int_1^z \frac{dt_1}{t_1} \int_1^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} = \frac{1}{2}(\log z)^2,$$

et plus généralement, pour $s \geq 1$,

$$\mathrm{Li}_{x_0^s}(z) = (-1)^s \int_{1>t_s>\cdots>t_1>z} \frac{dt_1 \cdots dt_s}{t_1 \cdots t_s} = \frac{1}{s!}(\log z)^s.$$

L'intégrale qui sert d'intermédiaire est bien définie pour z réel dans l'intervalle $0 < z < 1$, mais cela permet de définir $\mathrm{Li}_w(z)$ pour tout $w \in X^*$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, avec

$$\mathrm{Li}_{u \sqcup\!\sqcup v}(z) = \mathrm{Li}_u(z)\mathrm{Li}_v(z)$$

pour tout (u, v) dans $(X^*)^2$. En revanche les relations de mélange liées aux séries ne s'étendent pas aux polylogarithmes en une variable.

La série génératrice

$$\mathrm{Li}(z) = \sum_{w \in X^*} \mathrm{Li}_w(z) w$$

est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}(z) = \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z}\right)\mathrm{Li}(z)$$

déterminée par la condition initiale

$$\mathrm{Li}(\epsilon) = e^{x_0 \log \epsilon} + O(\sqrt{\epsilon}) \qquad \text{quand } \epsilon \to 0^+.$$

Grâce à l'étude de la monodromie de cette équation différentielle, Petitot et ses collègues montrent que les fonctions Li_w, pour w décrivant X^*, sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

Il en résulte que tout polylogarithme Li_w s'exprime de manière unique comme polynôme à coefficients rationnels en des polylogarithmes codés par des mots de Lyndon. En particulier pour $k = 1$ les polylogarithmes classiques Li_s, s entier ≥ 1, qui sont codés par les mots de Lyndon $x_0^{s-1}x_1$, sont algébriquement indépendants.

6. Sujets connexes

Nous n'avons fait qu'effleurer le sujet. Les quelques références ci-dessous développent d'autres aspects de la question. L'algèbre $\mathrm{MZV}_{\mathrm{conv}}$ a aussi des liens très intéressants avec le groupe fondamental de la droite projective privée de trois points et le théorème de Belyi, le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$, le groupe de Grothendieck-Teichmüller, les catégories monoïdales tressées, la théorie des noeuds (invariants de Vassiliev), la K-théorie, les diagrammes de Feynman et la théorie quantique des champs, la renormalisation en physique, les quasi-algèbres de Hopf quasi-triangulaires et l'associateur Φ_{KZ} (lié à la connexion de Knizhnik-Zamolodchikov) de Drinfeld.

Un groupe de travail consacré à ce thème se réunit à l'Institut Henri Poincaré depuis un an. Le texte ci-dessus est un condensé de quelques exposés qui y ont été donnés par Pierre Cartier, Jean Écalle, Michel Petitot. Quand ils sont originaux, les résultats présentés ici leur sont tous dus.

Bibliographie

[1] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus.* In: Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series Prima XV, Commentationes Analyticae Vol. 2, 217–267; Novi Comm. Acad. Sci. Petropol. **20** (1775), 140–186.

[2] V.G. Drinfeld, *On quasitriangular Quasi-Hopf algebras and a group closely connected with* Gal$(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Leningrad Math. J. **2** 4 (1991), 829–860.

[3] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications.* Proc. First European Congress of Mathematics, Vol. 2, Birkhäuser, Boston (1994), 497–512.

[4] A.B. Goncharov, *Polylogarithms in arithmetic and geometry.* roc. ICM-94 Zürich, Vol. 1, Birkhäuser, Boston (1995), 374–387.

[5] D. Bar-Natan, *On associators and the Grothendieck-Teichmuller Group I.* In `http://xxx.lanl.gov/abs/q-alg/9606021` and `http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn`

[6] M.E. Hoffman, *The Algebra of Multiple Harmonic Series.* J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[7] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot, J. Van Der Hoeven, *Shuffle algebra and polylogarithms.* Proc. of FPSAC'98, 10-th international Conference on *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, June 98, Toronto.

[8] J.M. Borwein, D.M. Bradley, D.J. Broadhurst, P. Lisoněk, *Combinatorial Aspects of Multiple Zeta Values.* The Electronic Journal of Combinatorics **5** (1998), #R38.

[9] A.B. Goncharov, *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes.* Math. Research Letter **5** (1998), 497–516.

[10] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot, J. Van Der Hoeven, *L'algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices.* Proc. of FPSAC'99, 11-th international Conference on *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, June 99, Barcelona.

[11] M. Kontsevich, *Periods.* Journée annuelle de la Société Mathématique de France 1999, 28–39.

[12] U. Müller, C. Schubert, *A Quantum Field Theoretical Representation of Euler-Zagier Sums.* `http://xxx.lanl.gov/abs/math/9908067`

[13] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot, *Lyndon words, polylogarithms and the Riemann ζ function.* Formal power series and algebraic combinatorics (Vienna, 1997). Discrete Math. **217** (2000), 273–292.

[14] J. Écalle, *La libre génération des multizêtas et leur décomposition canonico-explicite en irréductibles.* Manuscrit, 1999.

[15] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot, *Contribution à l'étude des MZV.* Manuscrit, 1999.

[16] Hoang Ngoc Minh, G. Jacob, M. Petitot, N.E. Oussous, *Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d'Euler-Zagier.* Sém. Lothar. Combin. **43** (1999), Art. B43e, 29 pp. (electronic).

Michel Waldschmidt
Université P. et M. Curie (Paris VI)
Institut de Mathématiques CNRS UMR 7586
Théorie des Nombres Case 247
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
France
E-mail : `miw@math.jussieu.fr`