Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **12** (2000), 309–347

Davenport-Hasse relations and an explicit Langlands correspondence, II: twisting conjectures

par Colin J. BUSHNELL et Guy HENNIART

To Jacques Martinet on his retirement

Résumé. Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. La correspondance de Langlands donne une bijection canonique entre l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de dimension n du groupe de Weil $\mathcal{W}_F$ de F, et l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$. Nous regardons le cas où n est une puissance de p, $n = p^m$. Dans un travail antérieur, nous avons construit une bijection $\boldsymbol{\pi}$ de $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(p^m)$ sur $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(p^m)$, grâce à la construction d'un changement de base modéré (non nécessairement galoisien). Si le changement de base satisfait certaines relations conjecturales, dites de Davenport-Hasse, et si l'on admet l'existence d'une correspondance de Langlands en degré p^m, alors cette correspondance n'est autre que $\boldsymbol{\pi}$. Dans ce papier, nous ne supposons pas *à priori* l'existence d'une correspondance de Langlands, mais nous voulons prouver directement, en supposant vérifiées les conjectures de Davenport-Hasse, que π est une telle correspondance. Nous réduisons le problème à des propriétés élémentaires des constantes locales $\varepsilon(\pi_1 \times \pi_2, s, \psi_F)$, pour $\pi_i \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(p^{m_i})$ (qui peuvent d'ailleurs se déduire de l'existence de la correspondance de Langlands et de propriétés analogues du côté galoisien). Au cours de cet article, nous obtenons de nouvelles propriétés inconditionnelles pour π, et décrivons complètement les propriétés de rationalité des fonctions L et des constantes locales de paires pour $\mathrm{GL}_n(F)$.

Abstract. Let $F/\mathbb{Q}_p$ be a finite field extension. The Langlands correspondence gives a canonical bijection between the set $\boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(n)$ of equivalence classes of irreducible n-dimensional representations of the Weil group $\mathcal{W}_F$ of F and the set $\boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(n)$ of equivalence classes of irreducible supercuspidal representations of $\mathrm{GL}_n(F)$.

Manuscrit reçu le 12 janvier 2000.
This work was partially supported by EU network TMR "Arithmetical Algebraic Geometry".

This paper is concerned with the case where $n = p^m$. In earlier work, the authors constructed an explicit bijection $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\mathcal{G}}_F^0(p^m) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(p^m)$ using a non-Galois tame base change map. If this tame base change satisfies a certain conjectured *automorphic Davenport-Hasse relation,* and there exists a Langlands correspondence in p-power degree, then $\boldsymbol{\pi}$ is the Langlands correspondence. This paper is concerned with the problem of showing, without assuming *a priori* the existence of the Langlands correspondence, that (on the Davenport-Hasse conjecture) $\boldsymbol{\pi}$ preserves local constants of pairs, and so is a Langlands correspondence. The principal obstruction is the lack of knowledge of certain elementary properties of the local constant $\varepsilon(\pi_1 \times \pi_2, s, \psi_F)$, for $\pi_i \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_F^0(p^{m_i})$. We state these properties as conjectures (which are certainly true, as consequences of the existence of the Langlands correspondence and analogous properties of the Langlands-Deligne local constant) and show that they imply the desired result: $\boldsymbol{\pi}$ is a Langlands correspondence. In the process, we prove several new unconditional results concerning $\boldsymbol{\pi}$, and give a complete account of the rationality properties of L-functions and local constants of pairs for $\mathrm{GL}_n(F)$.

Colin J. BUSHNELL
Department of Mathematics
King's College, Strand
London WC2R 2LS
United Kingdom
E-mail : bushnell@mth.kcl.ac.uk

Guy HENNIART
Département de Mathématiques, UMR 8628
Université de Paris-Sud
91405 Orsay cedex
France
E-mail : Guy.Henniart@math.u-psud.fr